Ex : Radioactivité α.

$${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{A-4}_{Z-2}Y$$

1- (a) $V(x) = \dfrac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x}$ ← énergie pot d'interaction 2 protons et $(Z-2)$ protons

$K = 2(Z-2)e^2$

$$V_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0} = \frac{2\times 90\times(1,6\cdot10^{-19})^2\times 9\cdot10^{9}}{3,5\cdot10^{-15}}$$

$$V_0 = 1,18\cdot10^{-11}\ J = 74,1\ MeV$$

(b) $V(x_m) = E \Rightarrow x_m = \dfrac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 E}$

$$x_m = \frac{2\times 90\times(1,6\cdot10^{-19})^2\times 9\cdot10^{9}}{4\times 1,6\cdot10^{-13}}$$

$$x_m = 6,48\cdot10^{-15}\ m$$

On peut évaluer la longueur de la barrière par $a = x_m - x_0 = 2,98\cdot10^{-15}\ m$.

(c) Évaluons $qa = \dfrac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}\times a$

$qa = 10,9$ barrière épaisse.

2- a- $T(x+dx) = T(x)\,e^{-2q\,dx}$

$$\simeq T(x)\left[1 - 2q\,dx\right]$$

$$\frac{dT}{dx}dx = -T(x)\,2q\,dx.$$

$$\frac{dT}{dx} = -2q\,T(x)$$

$$\frac{dT}{T} = -2q\,dx = -\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m\left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x} - E\right)}\,dx$$

$$\ln T \simeq -\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_M}\sqrt{2m\left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}-E\right)}\,dx$$

(b) $$\ln T \simeq -\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_M}\sqrt{2mE}\sqrt{\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E x}-1}\,dx$$

$$\simeq -\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar}\int_{x_0}^{x_M}\sqrt{\frac{x_M}{x}-1}\,dx$$

$$\simeq -\frac{2\sqrt{2mE}}{\hbar}\,x_M\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{\frac{x_0}{x_M}}\right)$$

$$\ln T \simeq \frac{4\sqrt{2mE}}{\hbar}\times\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\times\sqrt{\frac{x_0\,E\,4\pi\varepsilon_0}{K}}$$

$$-\frac{\pi\sqrt{2mE}}{\hbar}\times\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}$$

$$\ln T \simeq \frac{4}{\hbar}\sqrt{2m}\sqrt{\frac{Kx_0}{4\pi\varepsilon_0}}-\frac{\sqrt{2m}\,K}{\hbar\,4\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\ln T \simeq \frac{2}{\hbar}\sqrt{\frac{2mKx_0}{\pi\varepsilon_0}}-\frac{K\sqrt{2m}}{4\hbar\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{E}}$$

On retrouve bien une expression analogue à celle de Gamow-Condon-Gurney.

3 - (a). $v=\sqrt{\frac{2E}{m}}$

$t_m \simeq \frac{2x_0}{v}$

(b) $f_m=\frac{1}{t_m}=\frac{v}{2x_0}$

$dp=$ nbre de choc contre la barrière pdt dt $\times$ proba T de transmission

$$dp=f_m\,dt\,T=\frac{vT}{2x_0}\,dt$$

(c) Entre t et $t+dt$

$$N(t+dt) = N(t) - N(t) \times dp$$

$$\frac{dN}{dt}\,dt = -N(t)\,dp$$

$$\frac{dN}{N} = -dp = -f_m T\,dt$$

$$N(t) = N_0\, e^{-f_m T t}$$

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0\, e^{-f_m T \tau}$$

$$\tau = \frac{\ln 2}{f_m T}$$

$$T = \frac{\ln 2}{f_m} \times \frac{1}{\tau}$$

$$\ln T = \ln\left(\frac{\ln 2}{f_m}\right) - \ln \tau$$

$$= a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

$$\boxed{\ln \tau = \text{cste} + \frac{b}{\sqrt{E}}}$$ loi de Geiger et Nuttal

4 – $\log \tau = \dfrac{\ln \tau}{\ln 10} = \text{cste}' + \dfrac{b'}{\sqrt{E}}$

$\log \tau$ est bien une fonction affine de $E^{-1/2}$

L'ordonnée à l'origine permet de déterminer x_0, largeur du puits de potentiel.