QCM Mécanique.

I –

1 – Mouvement à force centrale : conservation du moment cinétique, mouvement plan,

Réponse D. Aucune raison que le mvt se fasse dans le plan équatorial.

2 – 3ème loi de Kepler

$$\frac{(R_T+h)^3}{T^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2} \qquad \boxed{T = \left(\frac{4\pi^2}{GM_T}(R_T+h)^3\right)^{1/2}}$$

$T \simeq 6000\ s$

Réponses A et D.

3 – T centre de la terre.
S = satellite

$$\frac{d\vec{\sigma_T}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_T} = \vec{TS} \wedge \vec{F} = \vec{0} \qquad \vec{F} = -\frac{GM_T m}{r^2}\vec{u_r}$$

$\vec{F}$ = force exercée par la terre sur le satellite.

$\vec{\sigma_T} = \vec{cste}$

Mvt circulaire $\vec{\sigma_T} = m(R_T+h)\vec{u_r} \wedge \vec{v} = \vec{cst}$

$\|\vec{v}\| = cste \Rightarrow$ mvt uniforme.

$$\vec{v} = v\vec{u_\theta} = (R_T+h)\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = -(R_T+h)\dot{\theta}^2\vec{u_r} = -\frac{v^2}{(R_T+h)}\vec{u_r}$$

On applique le PFD au satellite :

$$-m\frac{v^2}{(R_T+h)} = -\frac{GM_T m}{(R_T+h)^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{(R_T+h)}}}$$ réponse B

4 – $v \simeq 7{,}7\ km.s^{-1}$

Vitesse de libération = vitesse qu'il doit avoir pour aller de son orbite à l'infini avec une vitesse nulle.

L'énergie mécanique étant constante :

$$\frac{1}{2}m v_\ell^2 - \frac{GM_T m}{(R_T+h)} = 0 \qquad \boxed{v_\ell = \sqrt{\frac{2GM_T}{(R_T+h)}} = \sqrt{2}\,v_S}$$

Réponses A et D.

5 – Satellite géostationnaire $T_1 = 24h = 24 \times 3600\ s$

3ème loi de Kepler

$$\frac{(R_T+h)^3}{T_1^2} = \frac{GM_T}{4\pi^2}$$

$$h = \left(\frac{GM_T T_1^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T$$

$h \simeq 36000\ km$ réponse C

6 – $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{(R_T+h)}$

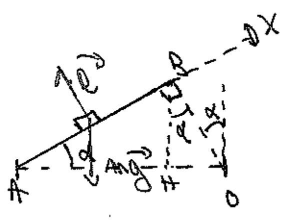
$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} \qquad E_c = \frac{GM_T m}{2(R_T+h)}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{GM_T m}{2(R_T+h)} = -E_c = \frac{E_p}{2}}$$

Réponse C

II –

1 –



Le palet est soumis à son poids et à la réaction de la piste t.q $\vec{R} \perp (AB)$ car glisse sans frottement.
On applique le Th. de l'Ec entre A et B.

$$\frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = W(m\vec{g}) + \underbrace{W(\vec{R})}_{0} = -mg\,AB\sin\alpha$$

or $AB\sin\alpha = BH = R\cos\alpha$

$$\frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = -mgR\cos\alpha$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\alpha}}$$ réponse A.

2 – Pour que B soit atteint par le palet, il faut que $v_A > v_{A,1} = \sqrt{2gR\cos\alpha} = \sqrt{4\times 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$v_{A,1} = \sqrt{40\times\sqrt{3}} \simeq 6\ m.s^{-1}$ réponse C

3 – PFD appliqué au palet projeté sur (AX)

$m\ddot{x} = -mg\sin\alpha$

$\ddot{x} = -g\sin\alpha$

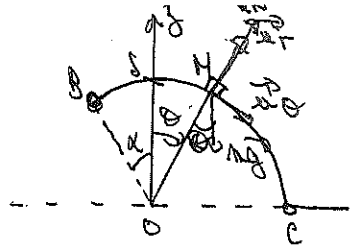
$\dot{x} = -g\sin\alpha\, t + V_A$

$t = \tau \quad \dot{x} = V_B$

$$\boxed{\tau = \frac{V_A - V_B}{g\sin\alpha} = \frac{V_A - \sqrt{v_A^2 - 2gR\cos\alpha}}{g\sin\alpha}}$$

Réponse A.

4 –



$\vec{v}(M) = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

$\vec{a}(M) = -R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$

TRD appliqué à M.

$m\vec{a}(M) = m\vec{g} + \vec{R_N}$

Projection sur $\vec{u_r}$

$-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg\cos\theta$

$R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2$ Réponse C

5 – Pas de décollage si $R_N > 0$

Entre A et B $R_N = mg\cos\alpha > 0$ pas de décollement

Entre B et C : Th. de l'Ec appliqué entre A et M

$$\frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 - v_A^2\right) = -mgR\cos\theta$$

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_A^2}{R} - 2g\cos\theta$$

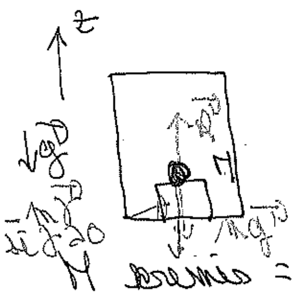
$$R_N = 3mg\cos\theta - m\frac{v_A^2}{R}$$

Entre B et S θ varie de $-\alpha$ à 0.

$R_N > 0 \quad v_A < \sqrt{3gR\cos\theta}$ la condition la plus restrictive correspond à $v_A < \sqrt{3gR\cos\alpha}$

Réponse A.

III Pèse personne :



$\vec{\gamma} = \gamma\, \vec{u}_z$

Référentiel (R') lié à l'ascenseur en translation ($\vec{F}_{ic} = \vec{0}$)

M soumis : → à la force de pesanteur $m\vec{g}$

→ la force d'inertie d'entrainement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\gamma}$

→ réaction $\vec{R}$ des pèse personne

Poids apparent de M = l'opposée de $\vec{R}$.

A l'équilibre dans (R') :

$m\vec{g} + \vec{F}_{ie} + \vec{R} = \vec{0}$

$\vec{P}_{apparent} = -\vec{R} = +m\vec{g} + \vec{F}_{ie}$

$\vec{P}_{apparent} = (-m\, g - m\,\gamma)\vec{u}_z = -m\left(1 + \frac{\gamma}{g}\right) g\, \vec{u}_z$

Masse indiquée par le pèse-personne :

$m_{app} = m\left(1 + \frac{\gamma}{g}\right)$

Si translation uniforme $m = m_{app}$

$m_{app} > m$ si $\gamma > 0$ phase d'accélération

$m_{app} < m$ si $\gamma < 0$ phase décélération

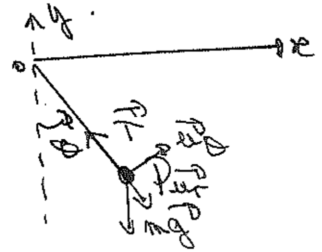
1 – Réponse C –

2 – $\gamma = -3\, m.s^{-2}$ $m_{app} = 56$ kg

réponse a –

IV Pendule en translation.

1 –



P soumis à son poids et à la tension du ressort. TMC appliqué en O dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$\vec{\sigma}_O(P) = \vec{OP} \wedge m\, \vec{v}(P) = m\, l^2 \dot{\theta}\, \vec{u}_z$.

$\vec{v}(P) = l\dot{\theta}\, \vec{u}_\theta$

$\vec{M}_O(\vec{T}) = \vec{0}$ $\vec{M}_O(m\vec{g}) = \vec{OP} \wedge m\vec{g}$
$= -m\, l\, g \sin\theta$

$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O \Rightarrow m\, l^2 \ddot{\theta} = -m\, l\, g \sin\theta$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$

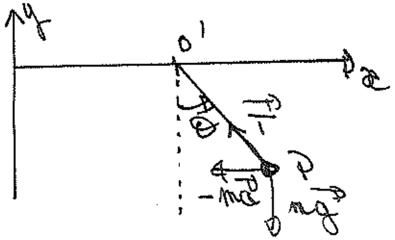
Pour θ petit, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

oscillations harmoniques de période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

$\underline{l = \frac{g\, T_0^2}{4\pi^2}} = \underline{0,248\, m}$ $\underline{\text{réponse D}}$.

2 – (R') étant en translation / à (R)

$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}$



$\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = \vec{O'P} \wedge (-m\vec{a})$

$\underline{\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = -m\, l\, a \cos\theta\, \vec{u}_z}$

$\underline{\text{Réponse A.}}$

3 – $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$ car (R') est en translation

$\vec{\Omega}(R')/(R) = \vec{0}$

4 – $\vec{\sigma}_{O'/(R')}(P) = m\ell^2\dot{\theta}\,\vec{e}_z$

$\frac{d\vec{\sigma}_{O'}}{dt}/(R') = \vec{\mathcal{M}}_{O'}(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) + \underbrace{\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{T})}_{\vec{0}}$

$m\ell^2\ddot{\theta} = -m\ell g\sin\theta - m\ell a\cos\theta$

$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{a}{\ell}\cos\theta}$ réponse D.

5 – A l'eq $\ddot{\theta} = 0$

θ_0 t.q $\quad -\frac{g}{\ell}\sin\theta_0 - \frac{a}{\ell}\cos\theta_0 = 0$

$\tan\theta_0 = -\frac{a}{g} \qquad \theta_0 = -\arctan\left(\frac{a}{g}\right)$

Réponse A.

6 – On pose $\varepsilon = \theta - \theta_0 \quad |\varepsilon| \ll 1$

$\theta = \varepsilon + \theta_0$

$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{\ell}\sin(\varepsilon + \theta_0) - \frac{a}{\ell}\cos(\varepsilon + \theta_0)$

$\ddot{\varepsilon} = -\frac{g}{\ell}(\sin\varepsilon\cos\theta_0 + \cos\varepsilon\sin\theta_0) - \frac{a}{\ell}(\cos\varepsilon\cos\theta_0 - \sin\varepsilon\sin\theta_0)$

En développant à l'ordre 1, on obtient :

$\ddot{\varepsilon} = \left(-\frac{g}{\ell}\cos\theta_0 + \frac{a}{\ell}\sin\theta_0\right)\varepsilon \underbrace{- \frac{g}{\ell}\sin\theta_0 - \frac{a}{\ell}\cos\theta_0}_{0}$

$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{\ell}\cos\theta_0 - \frac{a}{\ell}\sin\theta_0\right)\varepsilon = 0$

$\tan\theta_0 = -\frac{a}{g} \qquad \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{g^2}}} = \frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}$

$\theta_0 < 0 \quad \sin\theta_0 = -\sqrt{1-\cos^2\theta_0} = -\sqrt{1 - \frac{g^2}{g^2+a^2}}$

(6)

$\sin\theta_0 = \frac{-a}{\sqrt{g^2+a^2}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g\cos\theta_0 + a\sin\theta_0}}$

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\sqrt{g^2+a^2}}{g^2 + a^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{a^2+g^2}}}}$

Réponse B.

IV Point attaché à un ressort.

R' est en rotation uniforme à la vitesse $\omega \vec{e}_z$ constante.

1- $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{OM} = m\omega^2 x \,\vec{u}_x$.

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/(R')}(M)$

$\vec{v}_{/(R')}(M) = \dot{x}\,\vec{u}_x$ M est en translation le long de (Ox) dans le référentiel (R')

$\vec{F}_{ic} = -2m\omega\dot{x}\,\vec{u}_y$.

2- Dans (R'), M est soumis :

- → à son poids
- → à la force de rappel du ressort $-k(x-l_0)\vec{u}_x$
- → à la $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 x\,\vec{u}_x$
- → à $\vec{F}_{ic} = -2m\omega\dot{x}$
- → à la réaction $\vec{R}$ du support.

PFD appliqué à M dans (R') :

$\vec{a}_{/(R')}(M) = \ddot{x}\,\vec{u}_x$. $\quad m\vec{a}_{/(R')}(M) = m\vec{g} + \vec{R} - k(x-l_0)\vec{u}_x + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ie}$

Projection sur (Ox) :

$m\ddot{x} = -k(x-l_0) + m\omega^2 x$

A l'éq $\ddot{x} = 0$ $\quad (m\omega^2 - k)x_e = -kl_0$

$\boxed{x_e = \dfrac{kl_0}{k - m\omega^2}}$ Réponse A. Position existe si $\omega < \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

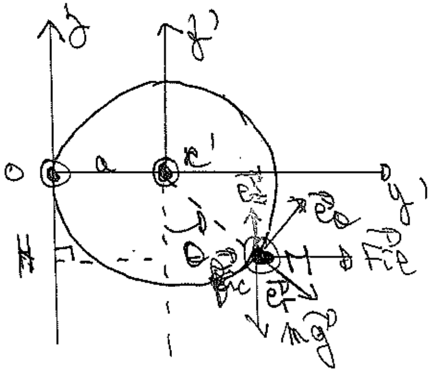
3- $m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = kl_0$

$m\ddot{x} + (k - m\omega^2)x = (k - m\omega^2)x_e$

Réponse B.

$\omega_0' = \sqrt{\dfrac{k - m\omega^2}{m}}$ réponse d -

II Cerceau en rotation:



Dans le référentiel (R') le point M est soumis : (R' en rotation uniforme / à (R))

→ au poids $m\vec{g}$

→ à la force d'inertie d'entrainement

$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM} = m\omega^2(a + a\sin\theta)\,\vec{e}_{y'}$

→ à la force d'inertie de Coriolis.

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{/(R')}(M) = -2m\omega\vec{e}_z \wedge (a\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$

$\vec{F}_{ic} = -2m\omega(-\cos\theta\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta) \wedge a\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

$\vec{F}_{ic} = +2m\omega a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{x'}$

→ à la réaction $\vec{R}$ du support 1-9

$\vec{R}\cdot\vec{e}_\theta = 0$ − $\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_{x'}\vec{e}_{x'}$

TRD à M dans (R')

$\vec{v}_{/(R')}(M) = a\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{a}_{/(R')}(M) = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

proj sur $\vec{e}_r$: $-ma\dot{\theta}^2 = m\omega^2 a(1+\sin\theta)\sin\theta + R_r + mg\cos\theta$

proj sur $\vec{e}_\theta$: $ma\ddot{\theta} = m\omega^2 a(1+\sin\theta)\cos\theta - mg\sin\theta$

proj sur $\vec{e}_{x'}$: $0 = R_{x'} + 2m\omega a\dot{\theta}\cos\theta$

$R_{x'} = -2m\omega a\dot{\theta}\cos\theta$

$R_r = -ma\dot{\theta}^2 - m\omega^2 a(1+\sin\theta)\sin\theta - mg\cos\theta$

2 - Energie potentielle :

$\delta W_{Fie} = \vec{F}_{ie}\cdot a\,d\theta\,\vec{e}_\theta = m\omega^2 a^2(1+\sin\theta)\,d\theta\;\vec{e}_{y'}\cdot\vec{e}_\theta$

$\delta W_{ie} = m\omega^2 a^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,d\theta = -dE_{pie}$.

$E_{pie} = -\frac{m\omega^2 a^2}{2}(1+\sin\theta)^2 + K_1$

$E_{pp} = mgz_M + cste = -mga\cos\theta + K_2$

$E_{c(R')} = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$

$E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - \frac{m\omega^2 a^2}{2}(1+\sin\theta)^2 - mg\cos\theta + K$

$\frac{dE_m}{dt} = 0 = ma^2\dot{\theta}\ddot{\theta} - m\omega^2 a^2(1+\sin\theta)\cos\theta\,\dot{\theta} + mg\sin\theta\,\dot{\theta}$

1 - Réponse d 2 - Réponse a

3 - Rep C - 4 - d

VII Chute libre

1- Dans le référentiel (R), A est soumis au poids qui inclut la force d'intéraction gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement et à la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{P} = -mg\,\vec{e}_z$$
$$\vec{F_{ic}} = -2m\,\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{A/R}$$
$$\vec{\Omega}_T = \Omega_T(\cos\lambda\,\vec{e}_y + \sin\lambda\,\vec{e}_z)$$
$$\vec{v}_{A/R} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z$$
$$\vec{F_{ic}} = -2m\,\Omega_T \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega_T \begin{pmatrix} \cos\lambda\,\dot{z} - \sin\lambda\,\dot{y} \\ \sin\lambda\,\dot{x} \\ -\cos\lambda\,\dot{x} \end{pmatrix}$$

On applique le PFD dans (R) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\,\Omega_T(\cos\lambda\,\dot{z} - \sin\lambda\,\dot{y}) \\ m\ddot{y} = -2m\,\Omega_T \sin\lambda\,\dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\,\Omega_T \cos\lambda\,\dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega_T(\dot{y}\sin\lambda - \dot{z}\cos\lambda) \quad (1) \\ \ddot{y} = -2\Omega_T \sin\lambda\,\dot{x} \quad (2) \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega_T\cos\lambda\,\dot{x} \quad (3) \end{cases}$$

Réponse B

2- En intégrant la relation (2), on obtient

$\dot{y} = -2\Omega_T \sin\lambda\, x + \text{cste}$

$t=0$ $\dot{y}=0$ $x=0$ $\Rightarrow$ $\text{cste}=0 \Rightarrow$ $\dot{y} = -2\Omega_T \sin\lambda\, x$

Réponse B

3- En intégrant la relation (3), on obtient

$\dot{z} = -gt + 2\Omega_T\cos\lambda\, x + \text{cste}$

à $t=0$ $\dot{z}=0$ $x=0 \Rightarrow \text{cste}=0$

$\dot{z} = -gt + 2\Omega_T\cos\lambda\, x$ Réponse D.

4- Il vient d'après 1

$\ddot{x} = 2\Omega_T(-2\Omega_T \sin^2\lambda\, x + g\cos\lambda\, t - 2\Omega_T\cos^2\lambda\, x)$

$\ddot{x} = -4\Omega_T^2 x + 2\Omega_T g\cos\lambda\, t$

$\ddot{x} + 4\Omega_T^2 x = 2\Omega_T g \cos\lambda\, t$ (E)

En identifiant avec la solution proposée, on obtient $\boxed{\begin{matrix} \omega_0 = 2\Omega_T \\ K = 2\cos\lambda \end{matrix}}$ Réponses B et D

5- $x(t) = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t) + Bt$

$t=0$ $x(0)=0$ $\dot{x}(0)=0$ $A_1 = 0$ car $x(0)=0$

$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A_2\omega_0 + B = 0$ $A_2 = -\frac{B}{\omega_0}$

Bt solution particulière qui vérifie (E) d'où

$4\Omega_T^2 Bt = 2\Omega_T g\cos\lambda\, t$

$B = \frac{g\cos\lambda}{2\Omega_T} = \frac{g\cos\lambda}{\omega_0}$ d'où $\boxed{A_2 = -\frac{g\cos\lambda}{\omega_0^2}} = -\frac{g\cos\lambda}{4\Omega_T^2}$

Réponses A et D

6- $\omega_0 t \ll 1$

$x(t) = -\frac{g\cos\lambda}{4\Omega_T^2}\sin(\omega_0 t) + \frac{g\cos\lambda}{2\Omega_T}t$

$\sin(\omega_0 t) \simeq \omega_0 t - \frac{\omega_0^3 t^3}{6} = 2\Omega_T t - \frac{4}{3}\Omega_T^3 t^3$

$x(t) \simeq -\frac{g\cos\lambda}{2\Omega_T}t + \frac{1}{3}g\cos\lambda\,\Omega_T t^3 + \frac{g\cos\lambda}{2\Omega_T}t$

$\boxed{x(t) \simeq \frac{g\,\Omega_T\cos\lambda}{3}t^3}$ Réponse C

7- $\lambda = \frac{\pi}{3}$ rad $\Omega_T \simeq 7{,}4.10^{-5}$ rad.s^{-1} $z_0 = 80$ m

$g \simeq 10$ m.s^{-2}

$\dot{x}(t) \simeq g\,\Omega_T \cos\lambda\, t^2$

D'après (3), $\ddot{z} = -g + 2g\,\Omega_T^2 \cos\lambda\, t^2$

$\dot{z}(t) = -gt + \frac{2}{3}g\,\Omega_T^2 \cos\lambda\, t^3 \qquad \dot{z}(0) = 0$

$$\boxed{z(t) = -g\frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}g\,\Omega_T^2 \cos\lambda\, t^4 + z_0}$$

Vu la valeur de Ω_T le terme $\frac{1}{6}g\,\Omega_T^2\cos\lambda\, t^4$ est négligeable devant $\frac{1}{2}gt^2$.

La force d'inertie de Coriolis n'apporte qu'un terme correctif faible par rapport à ce que l'on obtient en supposant R galiléen, pour le mvt suivant (Oz), on peut négliger l'effet de la force d'inertie de Coriolis.

$z(t) \simeq z_0 - \frac{1}{2}gt^2$

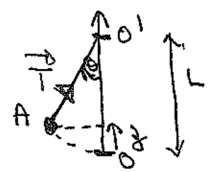
$z(\tau_c) = 0 \qquad \boxed{\tau_c \simeq \sqrt{\frac{2z_0}{g}}} = \sqrt{\frac{160}{10}} \simeq 4$ s réponse B.

$x_d = x(\tau_c) \simeq \frac{g\,\Omega_T\cos\lambda}{3}\left(\frac{2z_0}{g}\right)^3 = \frac{10 \times 7{,}5.10^{-5}}{3} \times \frac{1}{2} \times 16 \times 4$

$x_d \simeq 8$ mm réponse C

VIII Oscillations d'un pendule :

1- Dans le référentiel (R) non galiléen, A est soumis à son poids $m\vec{g}$ (incluant la force d'inertie d'entrainement), et la tension du fil et à la force d'inertie de Coriolis.



PFD dans (R) donne

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F_{ic}} \quad (1)$

$\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\Omega_T} \wedge \vec{v}_{A/(R)}$

$\vec{F_{ic}} = -2m\begin{pmatrix}0\\ \Omega_T\cos\lambda\\ \Omega_T\sin\lambda\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$

$\vec{F_{ic}} = -2m\begin{pmatrix}\Omega_T\cos\lambda\,\dot{z} - \Omega_T\sin\lambda\,\dot{y}\\ \Omega_T\sin\lambda\,\dot{x}\\ -\Omega_T\cos\lambda\,\dot{x}\end{pmatrix}$

$\vec{T}\cdot\vec{e}_z = T\cos\theta = T\,\frac{L-z}{L} = T\left(1 - \frac{z}{L}\right)$

En projetant la relation (1) sur $\vec{e}_z$, on obtient :

$$\boxed{m\ddot{z} = 2m\,\Omega_T\cos\lambda\,\dot{x} - mg + T\left(1 - \frac{z}{L}\right)}$$

$\gamma_z = 2\Omega_T\cos\lambda$. réponse C

2- Projection du PFD selon $\vec{e}_x$: $T \simeq mg$.

$m\ddot{x} = T_x + 2m\,\Omega_T\sin\lambda\,\dot{y} - 2m\,\Omega_T\cos\lambda\,\dot{z}$

$\vec{T} = -T\,\frac{\vec{O'A}}{O'A} = -T\,\frac{\vec{O'A}}{L}$

$\vec{O'A} = \vec{O'O} + \vec{OA} = (-L+z)\vec{e}_z + x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

$T_x = -T\frac{x}{L} \simeq -mg\frac{x}{L}$

De plus $\dot{z} \simeq 0$

D'où $\ddot{x} = -g\frac{x}{L} + 2\Omega_T\sin\lambda\,\dot{y}$

$$\boxed{\ddot{x} - 2\Omega_T \sin\lambda\, \dot{y} + \frac{g}{L} x = 0}$$

$K_x = -2\Omega_T \sin\lambda$ réponse D

3 – Projection du PFD selon $\vec{e}_y$:

$m\ddot{y} = T_y - 2m\Omega_T \sin\lambda\, \dot{x}$ $\quad T_y \simeq -mg\frac{y}{L}$

$$\boxed{\ddot{y} + 2\Omega_T \sin\lambda\, \dot{x} + \frac{g}{L} y = 0}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ $\quad K_y = 2\Omega_T \sin\lambda = -K_x$

Réponses B et D.

4 – Terme entre crochets décrit les oscillations du pendule dans son plan d'oscillation

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ on retrouve la période d'oscillations du pendule simple étudié dans un référentiel galiléen.

Le terme $\exp(-j(\Omega_T \sin\lambda)t)$ lié au caractère non galiléen de R décrit la rotation du plan des oscillations autour de l'axe vertical à la rotation $\Omega_T \sin\lambda \ll \omega_0$ $\quad \sin\lambda > 0$ hémisphère Nord

$T = \frac{2\pi}{\Omega_T \sin\lambda} \gg T_0$

Réponse C.

5 – $L = 67\,m$ $\quad m = 28\,kg$

$T_0 \simeq 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \simeq 6{,}2 \times \sqrt{\frac{67}{10}} \simeq \frac{6\times 8}{\sqrt{10}} \simeq \frac{6\times 8}{3} \simeq 16\,s$

Réponse B

6 – $\omega_p \simeq \Omega_T \sin\lambda$

$\frac{2\pi}{\Omega_T} \simeq 1$ jour $= 86400\,s$.

$\Omega_T = \frac{2\pi}{86400}$ $\quad \sin\lambda \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \lambda \simeq 45°$

$\omega_p \simeq \frac{\pi\sqrt{2}}{86400}$ rad.s^{-1}

$\omega_p \simeq \frac{\pi\sqrt{2}}{86400} \times \frac{180}{\pi}$ °s^{-1}

$\omega_p \simeq \frac{\sqrt{2}\, 180 \times 3600}{86400}$ °.h^{-1}

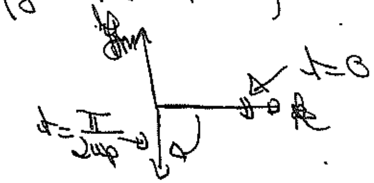
$\omega_p \simeq 10°.h^{-1}$ réponse C

7 – Pôles : $\lambda = \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\lambda = 1$ $\quad T = 24h$

A l'équateur $\lambda = 0$ $\sin\lambda = 0$ le pendule oscille dans un plan fixe $\omega_p = 0$.

Hémisphère Nord $\sin\lambda > 0$

$\exp(j\,\Omega_T \sin\lambda\, t) = \cos(\Omega_T \sin\lambda\, t) - j\sin(\Omega_T \sin\lambda\, t)$



Rotation sens horaire.

Réponses A et C