

ACTION D'UN FILTRE SUR UN SIGNAL PERIODIQUE .

I- Signaux périodiques :

1- Définitions :

→ Un signal $s(t)$ est périodique de période T si quel que soit t , $s(t) = s(t+T)$.

La donnée de $s(t)$ ou de son graphe sur une période est appelée le motif élémentaire du signal.

La fréquence fondamentale $f = \frac{1}{T}$ représente le nombre de motifs élémentaires par seconde .

Unités : $[T] = s$ $[f] = \text{Hz}$

→ Cas d'un signal sinusoïdal :

$s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation du signal , S son amplitude et φ sa phase à l'origine . $[\omega] = \text{rad.s}^{-1}$.

→ Valeur moyenne d'un signal périodique :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} s(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t) dt$$

à retenir : $\langle \cos \rangle = 0$ $\langle \sin \rangle = 0$ $\langle \cos^2 \rangle = 0,5$ $\langle \sin^2 \rangle = 0,5$

→ Valeur efficace :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{(T)} s^2(t) dt}$$

Pour un signal $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$, $S_{eff} = \frac{S}{\sqrt{2}}$ attention il ne faut pas généraliser ce résultat à un signal non sinusoïdal .

2- Représentation de Fourier d'un signal sinusoïdal ou d'une somme de signaux sinusoïdaux :

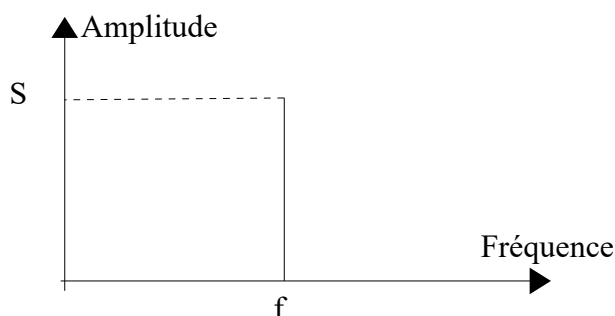
a- Spectre en amplitude d'un signal sinusoïdal :

Soit le signal $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$ avec $S > 0$.

Pour représenter le signal on peut privilégier les informations amplitude S et fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, ces informations représentent le spectre en fréquence du signal (ou représentation de Fourier) .

Joseph Fourier étant un mathématicien et physicien français du XIX^e siècle .

Le spectre en fréquence d'un signal est le plus souvent représenté sous la forme d'un graphique où une composante sinusoïdale est représentée par un bâton d'amplitude S centré sur la fréquence f portée en abscisse (en abscisse on porte également parfois la pulsation ω) .

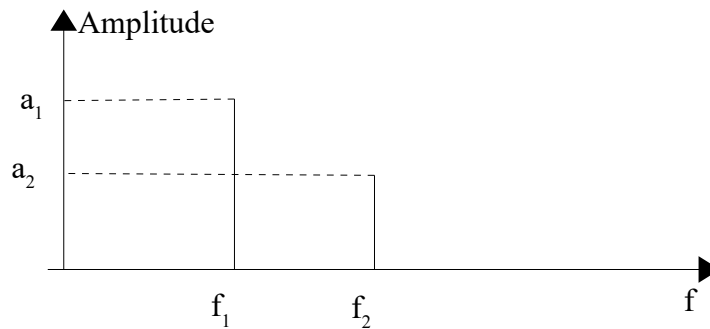


b- Signal comportant deux fréquences :

→ Signal deux tons :

$$s(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2) \quad \text{avec } a_1 > 0 \text{ et } a_2 > 0$$

Un signal de ce type s'interprète plus facilement à partir de son spectre qu'à partir de son graphe temporel



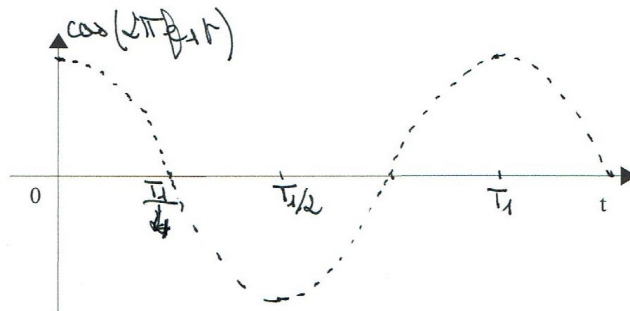
→ Produit de deux signaux sinusoïdaux :

$$s(t) = k a_1 \cos(2\pi f_1 t) a_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

Représentation du chronogramme s en fonction de t dans le cas où $f_1 \ll f_2$ c'est à dire $T_1 \gg T_2$.

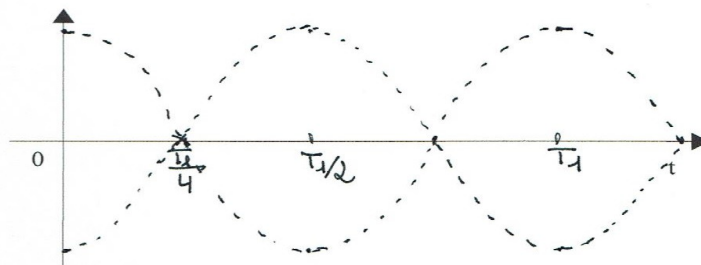
Le terme de plus grande période (celui qui évolue le plus lentement en fonction du temps) c'est à dire $\cos(2\pi f_1 t)$ va moduler l'amplitude du terme de plus faible période (le terme qui évolue le plus rapidement en fonction du temps) .

Pour représenter $s(t)$, on représente dans un premier temps le terme de plus grande période $\cos(2\pi f_1 t)$.

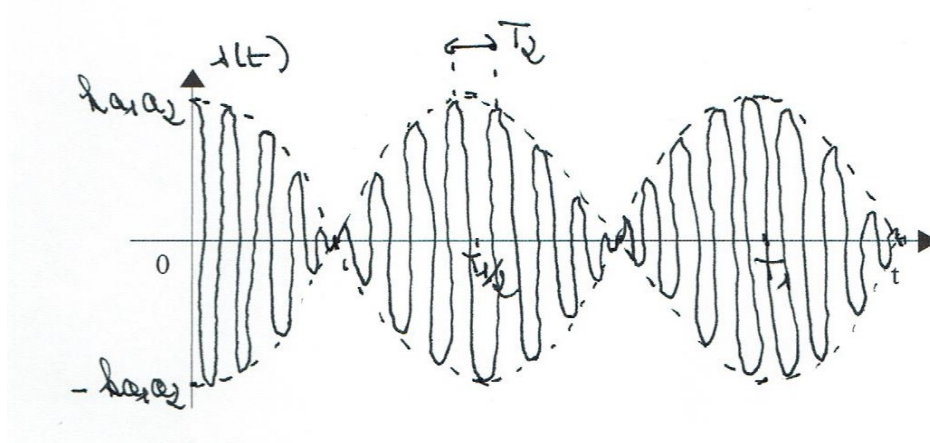


Sur un intervalle de temps pendant lequel ce terme varie peu, le terme en $\cos(2\pi f_2 t)$ varie et passe un certain nombre de fois par les valeurs +1 et -1 . On va donc symétriser la courbe représentant

$\cos(2\pi f_1 t)$ par rapport à l'axe des abscisses, la courbe en pointillée obtenue constitue donc l'enveloppe du signal et module le terme $\cos(2\pi f_2 t)$.



Il suffit ensuite de multiplier la courbe obtenue par $k a_1 a_2$ pour obtenir $s(t)$ (le signal est caractéristique d'un phénomène de battement temporel) .



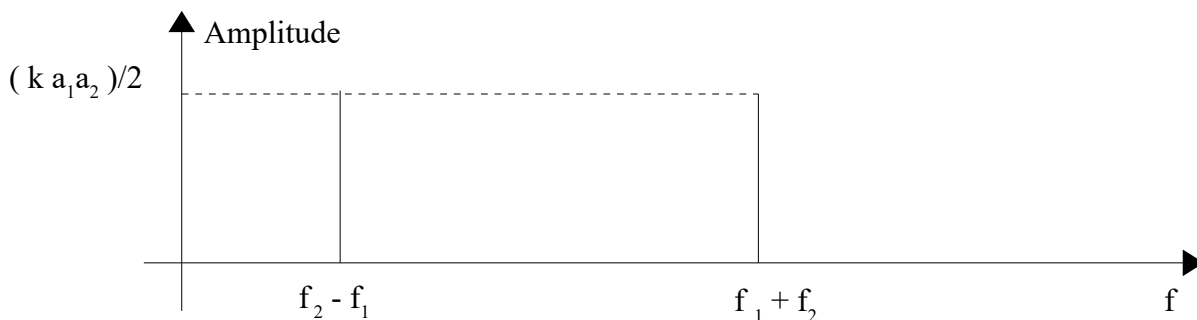
Spectre en fréquence :

Pour pouvoir déterminer le spectre en fréquence d'un signal il faut que celui-ci soit écrit sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux .

Pour cela, on linéarise l'expression de $s(t)$:

$$s(t) = k a_1 a_2 \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) = \frac{k a_1 a_2}{2} [\cos(2\pi(f_2 - f_1)t) + \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)]$$

Le spectre de $s(t)$ est constitué de deux raies d'amplitude $\frac{k a_1 a_2}{2}$ centrées sur les fréquences $f_2 - f_1$ et $f_1 + f_2$.



II Développement d'une fonction périodique en série de Fourier , spectre en fréquence d'un signal :

1- Théorème de Fourier :

Soit $s(t)$ un signal périodique de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$ tel que $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |s(t)| dt$ ait une valeur finie (cette

hypothèse sera supposée toujours vérifiée dans les pb de physique) .

$s(t)$ est alors développable en série de Fourier :

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)$$

Avec $A_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} s(t) dt$

$$A_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{et} \quad B_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} s(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Le développement en série de Fourier peut encore s'écrire sous la forme suivante (forme adaptée à la représentation du spectre du signal) .

$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t + \phi_n) \quad \text{avec} \quad C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad \text{et} \quad \tan \phi_n = \frac{-B_n}{A_n}$$

2- Signification physique :

→ Composante continue :

C'est la composante A_0 qui représente la valeur moyenne ou composante continue ou décalage (offset en anglais) du signal . Cette composante a une **fréquence nulle** .

→ La partie variable du signal :

$s_{\text{var}}(t) = s(t) - \langle s(t) \rangle$ ce signal a même forme que $s(t)$ mais est centré autour de 0 .

Sur un oscilloscope on visualise :

- l'intégralité du signal $s(t)$ lorsque celui-ci est en position DC (direct current)
- la partie variable uniquement $s_{\text{var}}(t)$ lorsque l'oscilloscope est réglé en position AC (alternative current) .

On privilégie la position DC sauf dans le cas d'un signal ayant une très grande composante continue .

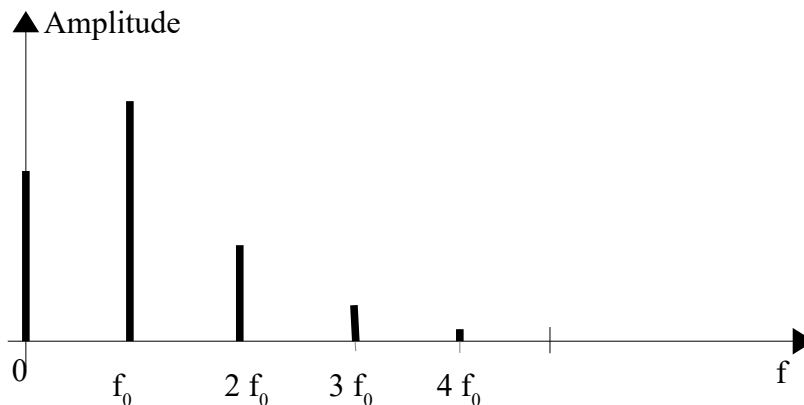
La composante sinusoïdale $A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t) = C_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$ qui a la même fréquence que le signal $s(t)$ est appelée **fondamental** .

La composante sinusoïdale $A_n \cos(n \omega_0 t) + B_n \sin(n \omega_0 t) = C_n \cos(n \omega_0 t + \phi_n)$ avec $n \geq 2$ qui a une fréquence qui vaut n fois la fréquence de $s(t)$ est appelée **harmonique de rang n** .

3- Spectre en fréquence d'un signal périodique :

L'ensemble des amplitudes A_0 et C_n forment le spectre en fréquence du signal $s(t)$. Ce spectre est représenté sous forme de segments d'amplitude A_0 centré sur la fréquence nulle et C_n centrés sur les fréquences $f = n f_0$.

Le spectre peut être également représenté en fonction de ω ou en fonction de $n = \frac{\omega}{\omega_0}$.



Les C_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini .

Remarque :

- Si $s(t)$ est pair alors les coefficients $B_n = 0$
- Si $s(t)$ est impair les coefficients $A_n = 0$
- Le spectre en fréquence d'un signal est indépendant de l'origine des temps , il est lié uniquement à la forme de celui-ci . Un décalage temporel sur le signal ne modifie pas son spectre par contre son développement en série de Fourier est modifié .
- Les oscilloscopes numériques possèdent une fonction FFT qui permet de visualiser le spectre en fréquence du signal affiché sur une voie de celui-ci .
- La données du spectre du signal ne permet pas d'avoir toute l'information sur le signal car il manque l'information liée à la phase .

4- Aspect énergétique :

Si $v(t)$ est la tension aux bornes d'un résistor de résistance R ou $i(t)$ l'intensité traversant cette même résistance alors la puissance moyenne dissipée dans R vaut $P = \langle v^2 \rangle / R = R \langle i^2 \rangle$.

La puissance moyenne est donc proportionnelle à la moyenne quadratique du signal c'est à dire au carré de sa valeur efficace .

Dans le cas où $s(t)$ est un signal périodique de période T_0 , $s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t + \phi_n)$ et

$$\langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} s^2(t) dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{2} = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{2} .$$

Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est donc égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques .

Remarque :

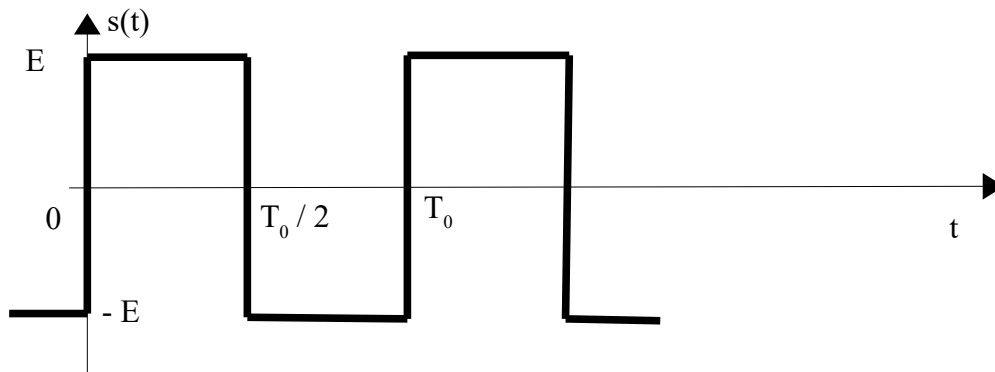
Les multimètres RMS(ou TRMS) : Root Means Square mesurent cette valeur efficace .

5- Exemples , lien entre spectre et forme du signal :

a- Signal carré de rapport cyclique 1/2:

Rapport cyclique : durée de l'état haut sur la période .

Exemple du signal carré impair symétrique :



Remarque : si on décale temporellement le signal $s(t)$, le spectre est inchangé .

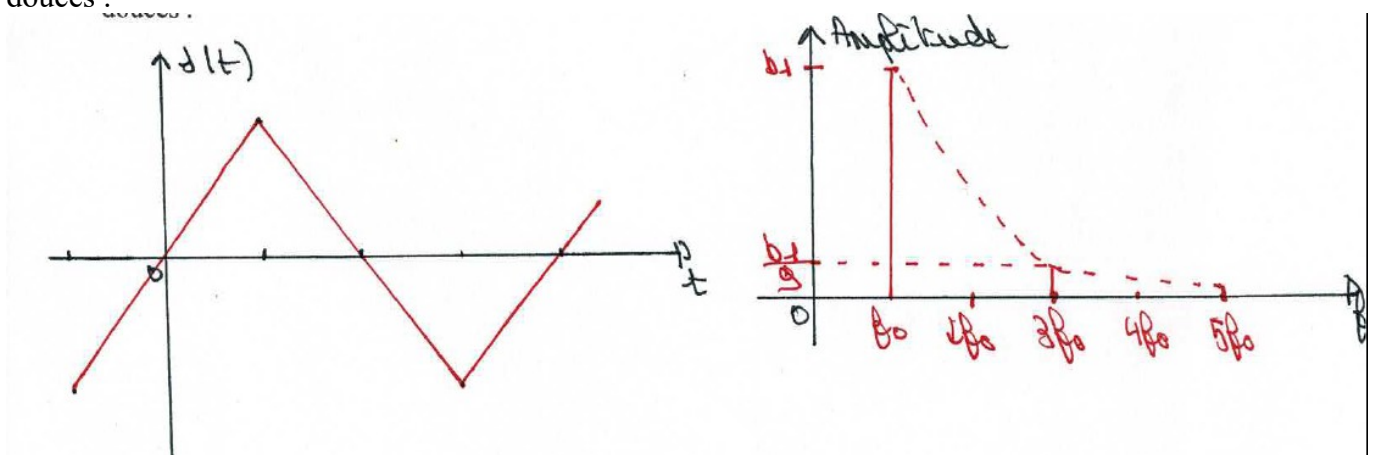
b- Signal triangle de rapport cyclique $\frac{1}{2}$:

On passe d'un signal carré à un signal triangle par intégration . L'amplitude de l'harmonique de rang n du signal carré subissant l'intégration se retrouvera multiplié entre autres par $\frac{1}{n}$.

L'harmonique de rang n aura donc une amplitude proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$.

Si le signal est symétrique, le spectre ne comportera que des harmoniques de rang impair .

Le poids des harmoniques est plus faible que pour un signal carré car les transitions du signal sont plus douces .



c- Lien entre spectre et forme du signal :

→ L'existence ou non d'une raie à la fréquence nulle permet de savoir si la valeur moyenne du signal est nulle ou pas .

→ Le poids des harmoniques est lié aux variations brutales au cours du temps du signal .

Un signal carré présente des variations brutales au cours du temps (discontinuités) , le poids des harmoniques est donc plus important que pour un signal triangle qui présente des variations plus douces .

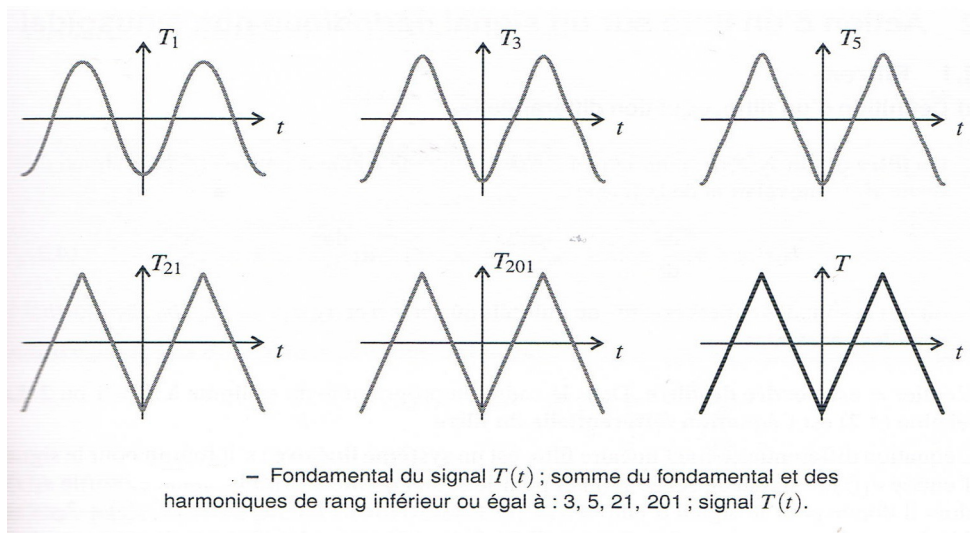
L'existence de variations brutales au cours du temps est associé à un poids significatif des harmoniques de rang élevé dans le spectre du signal .

→ Un signal qui est tel que $s(t + \frac{T_0}{2}) = -s(t)$ aura un spectre qui ne comportera que des harmoniques de rangs impairs .

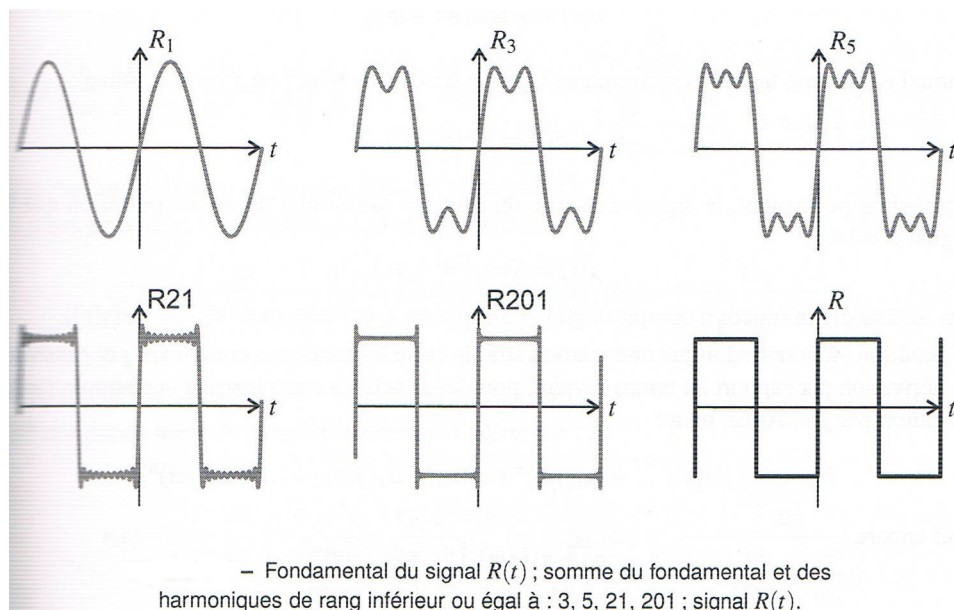
→ Reconstitution d'un signal à partir de ses harmoniques .

Dans le cas du signal carré (cas 2) , l'absence dans les sommes partielles des plus hautes fréquences liées au discontinuités du signal provoque l'apparition d'oscillations qui n'existent pas dans le signal .

Cas 1 : signal triangle $T(t)$.



Cas 2 signal carré $R(t)$:



6- Décomposition de Fourier de signaux non périodiques :

Un signal non périodique peut s'écrire sous la forme d'une intégrale de Fourier .

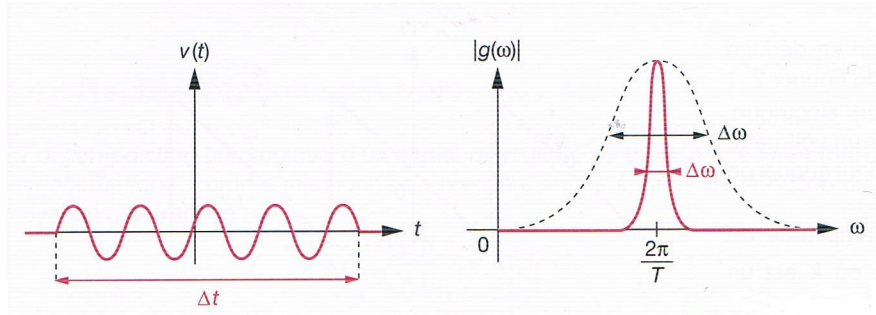
$$v(t) = \int g(w) \exp(iwt) dt$$

$g(w)$ caractérise le spectre de $v(t)$ et joue un rôle similaire à celui des coefficients du développement en série de Fourier d'une fonction périodique .

Il existe un lien entre la durée Δt d'un signal et la largeur de son spectre .

Par exemple, un signal de nature sinusoïdale de durée Δt très importante par rapport à sa période T possède un spectre très restreint autour de la valeur $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Lorsque Δt diminue, le signal se comporte moins comme une sinusoïde et le spectre s'élargit (courbe en pointillé ci dessous). Il y a une relation générale liant la durée Δt d'un signal et l'étalement $\Delta \omega$ de son spectre $\Delta t \Delta \omega \approx 1$

Rem : cette dernière relation se retrouve en optique et est liée au caractère plus ou moins monochromatique des sources .



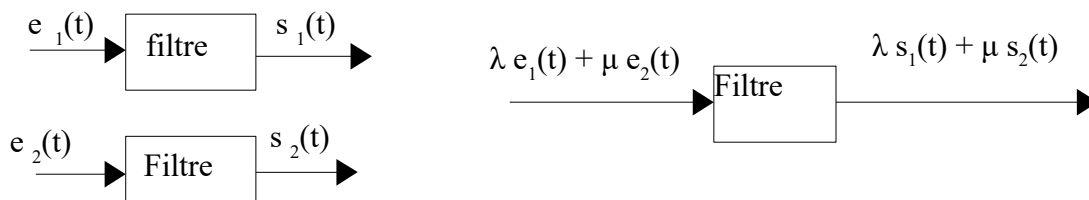
III Réponse d'un filtre à un signal périodique :

L'opération de filtrage est très courante en électronique par ex sur une prise téléphonique le filtre ADSL permet par un filtrage passe bas que seul le signal de téléphonie (de fréquence < 10 kHz) ne parvienne au téléphone .

1- Généralités :

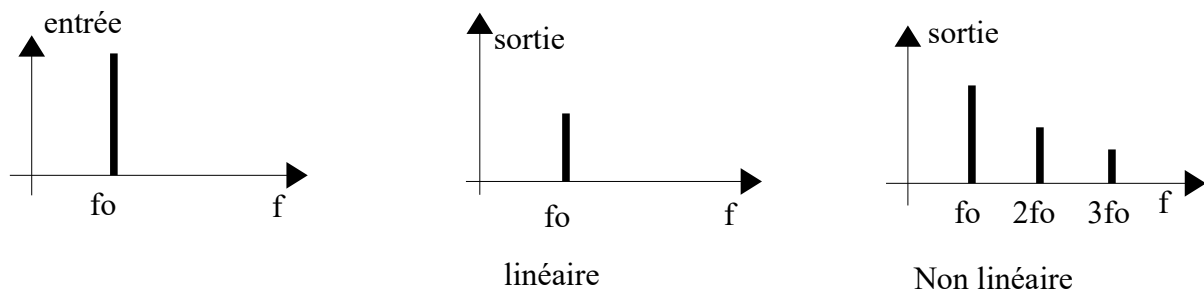
Un filtre est un **système linéaire** permettant de sélectionner des signaux sur un critère fréquentiel .

La linéarité est une propriété fondamentale qui permet de justifier les méthodes utilisées pour étudier ces filtres . λ et μ étant des réels .



Sur le plan spectral, un filtre transforme une entrée sinusoïdale en une sortie sinusoïdale de même fréquence .

Si en entrée d'un filtre, on place un signal ayant un certain spectre, en sortie on retrouve au maximum les fréquences constituant le spectre du signal d'entrée (si des fréquences non présentes dans le spectre du signal d'entrée apparaissent alors le système n'est pas linéaire et ne constitue donc pas un filtre) .



2- Equation différentielle et fonction de transfert :



a- Filtre linéaire :

On considère un filtre linéaire d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ vérifiant une équation différentielle linéaire à coefficients constants .

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n e}{dt^n} = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s}{dt^m} \quad \text{Avec } n \leq m \quad m \text{ étant l'ordre du filtre}$$

Dans le cadre du programme, nous étudierons filtres d'ordre 1 ou 2 .

Le filtre étant linéaire, lorsqu'un signal $e(t)$ périodique de fréquence fondamentale f qui se décompose en somme de signaux sinusoïdaux est appliqué en entrée, le signal de sortie est la somme des signaux de sortie associés à chacune des composantes harmoniques appliquée seule à l'entrée du filtre .

b- Action d'un filtre linéaire d'ordre 1 ou 2 sur un signal sinusoïdal :

On applique en entrée du filtre le signal : $e(t) = E \cos(\omega t + \phi_e)$ auquel on peut associer le signal complexe : $\underline{e} = E e^{j\omega t} e^{j\phi_e} = \underline{E} e^{j\omega t}$ avec $\underline{E} = E e^{j\phi_e}$ est l'amplitude complexe du signal d'entrée .

La solution générale de l'équation différentielle d'ordre 1 ou 2 vérifiée par $s(t)$ est la somme de :

→ la solution générale $s_H(t)$ de l'équation homogène (sans second membre) : pour un ordre 2

$$b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s(t) = 0$$

→ et d'une solution particulière $s_P(t)$ de l'équation complète qui dépend donc de $e(t)$.

$$s(t) = s_H(t) + s_P(t)$$

Si les trois réels b_2, b_1, b_0 sont de même signe alors $s_H(t)$ tend vers zéro à la fin du régime transitoire le filtre est alors stable (condition nécessaire pour que le filtre fonctionne correctement) .

Si τ est le temps caractéristique du régime transitoire , lorsque $t \gg \tau$ $s(t) \rightarrow s_P(t)$ qui est alors pour une entrée sinusoïdale, sinusoïdal de même pulsation ω que le signal d'entrée .

On obtient alors la sortie du filtre en régime établi appelé aussi régime forcé ou permanent (attention à cette dernière terminologie qui peut être source de confusions) .

Pour $t \gg \tau$, $s(t) \approx s_P(t) = S \cos(\omega t + \phi_s)$ auquel on peut associer le signal complexe

$$\underline{s} = S e^{j\omega t} e^{j\phi_s} = \underline{S} e^{j\omega t}$$

Fonction de transfert :

$$b_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 s(t) = a_0 e(t) + a_1 \frac{de}{dt} + a_2 \frac{d^2 e}{dt^2}$$

Pour $t \gg \tau$, l'équation différentielle devient : $(j\omega)^2 b_2 \underline{s} + j b_1 \omega \underline{s} + b_0 \underline{s} = a_0 \underline{e} + j a_1 \omega \underline{e} + a_2 (j\omega)^2 \underline{e}$

On peut donc définir la fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + j\omega a_1 - \omega^2 a_2}{b_0 + j\omega b_1 - \omega^2 b_2}$$

La fonction de transfert du filtre peut s'écrire : $\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$ avec $\phi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega)$

Si on place en entrée du filtre un signal $\underline{e} = E e^{j\omega t} e^{j\phi_e}$ de pulsation ω , on obtient en sortie un signal

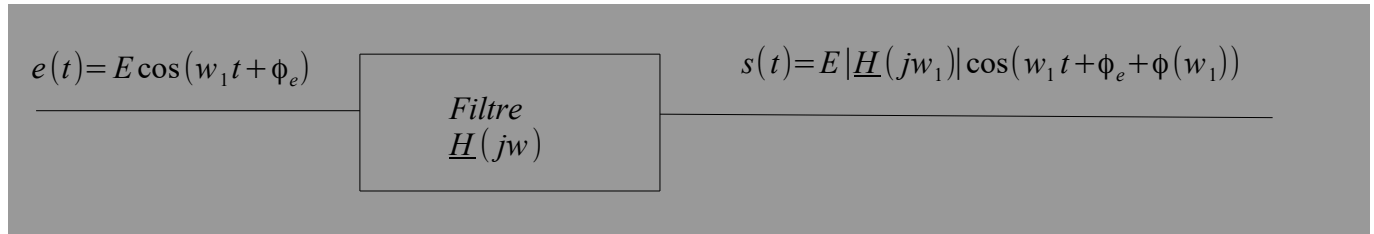
$$\underline{s} \text{ tel que } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \text{ d'où } \underline{s} = \underline{H}(j\omega) \underline{e} = \underline{H}(j\omega) E e^{j\omega t} e^{j\phi_e} = |\underline{H}(j\omega)| E e^{j\omega t} e^{j(\phi_e + \phi(\omega))} = S e^{j\omega t} e^{j\phi_s}$$

soit $\underline{s} = S e^{j\omega t} e^{j\phi_s}$ avec $S = E |H(j\omega)|$ et $\phi_s = \phi_e + \phi(\omega)$

$\phi(\omega) = \phi_s - \phi_e$ représente donc le déphasage entre le signal de sortie et le signal d'entrée à la pulsation ω .

Attention : lorsque l'on étudie la réponse d'un filtre à un signal sinusoïdal, il faut utiliser les caractéristiques de la fonction de transfert correspondant à la pulsation du signal.

Pour obtenir le signal de sortie on multiplie l'amplitude du signal d'entrée par la valeur du module de la fonction de transfert calculé pour la pulsation ω_1 du signal d'entrée et on ajoute à la phase du signal d'entrée la phase de la fonction de transfert calculée pour la pulsation ω_1 du signal d'entrée.



c- Action d'un filtre sur un signal périodique :

Soit $e(t)$ un signal de fréquence $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ appliqué à l'entrée d'un filtre linéaire de fonction de transfert $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\phi(\omega)}$.

Pour déterminer la tension obtenue en sortie du filtre, on procède de la manière suivante :

1- On écrit $e(t)$ sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux soit par linéarisation en utilisant les formules de trigonométrie, soit en développant le signal en série de Fourier.

Dans le cas par exemple où $e(t)$ est développé en série de Fourier :

$$e(t) = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos(k \omega_0 t + \phi_k) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(t)$$

2- On détermine la réponse $s_k(t)$ du filtre à chaque composante sinusoïdale $e_k(t)$ du signal d'entrée

$$s_k(t) = E_k |H(jk\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \phi_k + \phi(k\omega_0))$$

3- On utilise la propriété de linéarité du filtre, la sortie $s(t)$ est la somme des sorties $s_k(t)$:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k |H(jk\omega_0)| \cos(k\omega_0 t + \phi_k + \phi(k\omega_0))$$

$|H(j\omega)|$ et $\phi(\omega)$ dépendant de la pulsation ω , les différents termes du signal d'entrée e_k ne sont pas traités à l'identique ni en terme d'amplification, ni en terme de déphasage : le spectre du signal de sortie est donc différent du spectre du signal d'entrée : le signal est déformé par le filtre.

La composante continue du signal correspond à la pulsation nulle $\omega = 0$.

Aucune fréquence nouvelle par rapport au signal d'entrée ne peut apparaître à la sortie d'un filtre linéaire.

Si des fréquences non présentes dans le spectre du signal d'entrée apparaissent dans le spectre du signal de sortie, alors le système est non linéaire.

IV- Caractérisation d'un filtre :

→ Diagrammes de Bode d'un filtre :

Les diagrammes de Bode d'un filtre est la représentation des caractéristiques de sa fonction de transfert en fonction de la fréquence f (ou de la pulsation w) sur une échelle logarithmique .

Diagramme de Bode en gain : tracé de $G_{dB} = 20 \log(|H(jw)|)$ en fonction de $\log(w)$ ou $\log(f)$

Diagramme de Bode en phase : tracé de $\phi(w) = \arg H(jw)$ en fonction de $\log(w)$ ou $\log(f)$

Si $\underline{H}(jw) = \underline{H}_1(jw) \underline{H}_2(jw)$, la représentation de Bode de $\underline{H}(jw)$ se présente comme l'addition selon l'axe des ordonnées des représentations de $\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$

→ Diagrammes asymptotiques: dans ces diagrammes doivent figurer :

- $G_{BF} = 20 \log(|\underline{H}_{BF}(jw)|)$ où $\underline{H}_{BF}(jw)$ est l'équivalent à basses fréquences de $\underline{H}(jw)$ (rapport des termes de plus bas degré en w du numérateur et du dénominateur) et $\phi_{BF}(w) = \arg(\underline{H}_{BF}(jw))$.
- $G_{HF} = 20 \log(|\underline{H}_{HF}(jw)|)$ où $\underline{H}_{HF}(jw)$ est l'équivalent à hautes fréquences de $\underline{H}(jw)$ (rapport des termes de plus haut degré en w du numérateur et du dénominateur) et $\phi_{HF}(w) = \arg(\underline{H}_{HF}(jw))$.
- le point d'intersection des asymptotes basses et hautes fréquences .

→ Pour qualifier un filtre , il faut :

Préciser sa nature, sa pulsation w_c (ou sa fréquence f_c) de coupure et son ordre .

La pulsation de coupure w_c d'un filtre est telle que $G_{dB}(w_c) = G_{max} - 3 \text{ dB}$ soit $|\underline{H}(jw_c)| = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

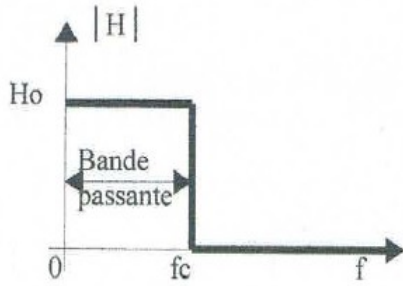
La bande passante à -3 dB d'un filtre est la bande de fréquence dans laquelle le gain en décibels est supérieur au gain maximal du filtre moins trois décibels $G_{dB}(w) \geq G_{max} - 3 \text{ dB}$ soit $|\underline{H}(jw)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

→ Filtre parfait, différents types de filtres :

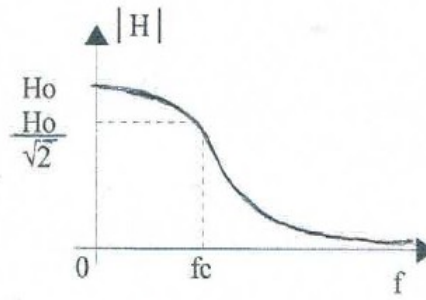
Un filtre parfait est tel que sa fonction de transfert permet :

- de transmettre sans déformation les composantes sinusoïdales d'un signal situées dans la bande passante
- de couper totalement le composantes dont les fréquences sont à l'extérieur de la bande passante .

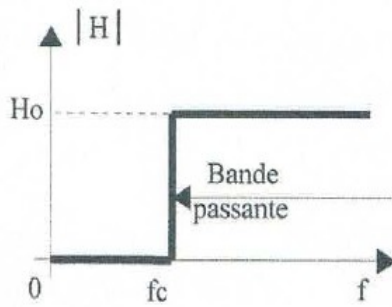
Filtres couramment rencontrés en électronique :



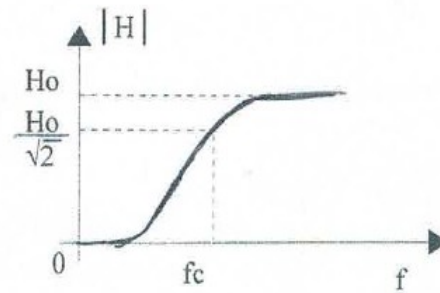
Passe-bas parfait



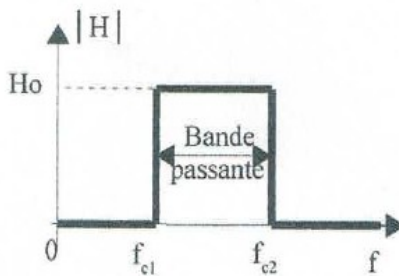
Passe-bas réel



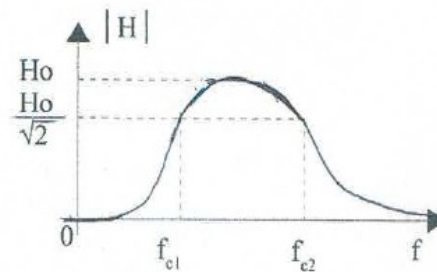
Passe-haut parfait



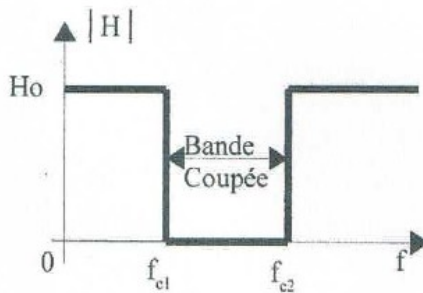
Passe-haut réel



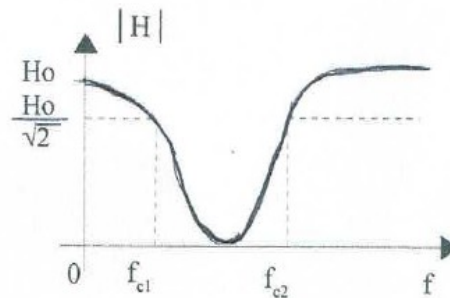
Passe-bande parfait



Passe-bande réel



Coupe-bande parfait

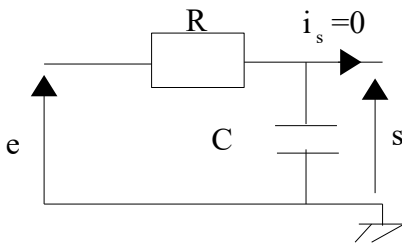


Coupe-bande réel

V- Exemples (filtres passifs) :

1- Passe-bas d'ordre 1 :

a- Etude en régime sinusoïdal :

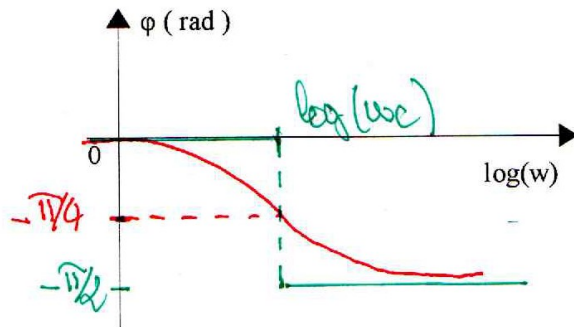
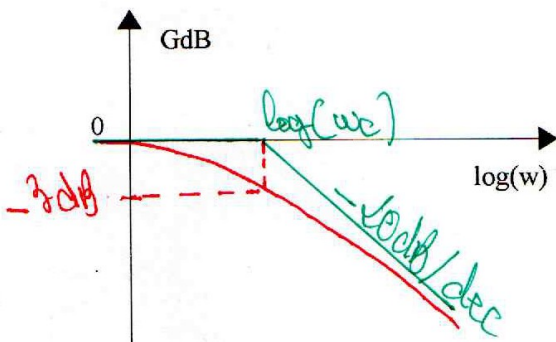


$$H(j\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega \ll \omega_c \quad H(j\omega) \rightarrow 1 \quad G_{dB} \rightarrow 0 \quad \phi \rightarrow 0$$

$$\omega \gg \omega_c \quad H(j\omega) \rightarrow \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad G_{dB} \rightarrow -20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$\omega = \omega_c \quad H = \frac{1}{1+j} \quad G_{dB} = -3 \text{ dB} \quad \phi = -\frac{\pi}{4} \quad \omega_c$ est donc la pulsation de coupure à -3dB du filtre .



Remarque :

1- pour $\omega \gg \omega_c$, $H(j\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{s}{\omega_c}$ d'où $j\frac{\omega}{\omega_c} s = e$ ce qui donne en régime temporel quelconque

$\frac{ds}{dt} = \omega_c e$ le filtre se comporte comme un intégrateur .

Réponse à un signal sinusoïdal de pulsation ω_1 de valeur moyenne non nulle :

$$e(t) = E_0 + E_1 \cos(\omega_1 t)$$

b- Equation différentielle – Réponse à un échelon :

→ Equation différentielle - Réponse à un échelon de tension :

→ Résolution numérique avec la méthode d'Euler explicite :

Comme il n'est pas possible de résoudre une équation différentielle « à tout instant » avec un ordinateur, il est nécessaire de passer par une résolution à N instants discrets $t_0, t_1, t_2 \dots t_{N-1}$ en cherchant à ce que la valeur obtenue numériquement soit aussi proche que possible de ce que donnerait la solution analytique $s(t_n)$. À notre niveau, le pas de temps ou période d'échantillonnage T_e sera toujours pris constant : $t_n = nT_e$.

Schéma d'Euler explicite :

En pratique, il faut transformer l'équation différentielle en une relation de récurrence permettant de calculer s_{n+1} à partir uniquement de ce que l'on connaît, c'est-à-dire la tension aux instants passés s_n , s_{n-1} , ..., la tension d'entrée à tout instant et les paramètres caractéristiques du système.

La « recette » pour passer de l'équation différentielle à la relation de récurrence est appelée schéma numérique.

La relation entre s_{n+1} et s_n est liée au développement de Taylor de $s(t)$ au premier ordre en $s(t_{n+1})$:

$$s(t_{n+1}) = s(t_n) + \dot{s}(t_n)(t_{n+1} - t_n) + O((t_{n+1} - t_n)^2)$$

Si on ne garde que les deux premiers termes du développement on peut approximer $\frac{ds}{dt}$ à l'instant t_n

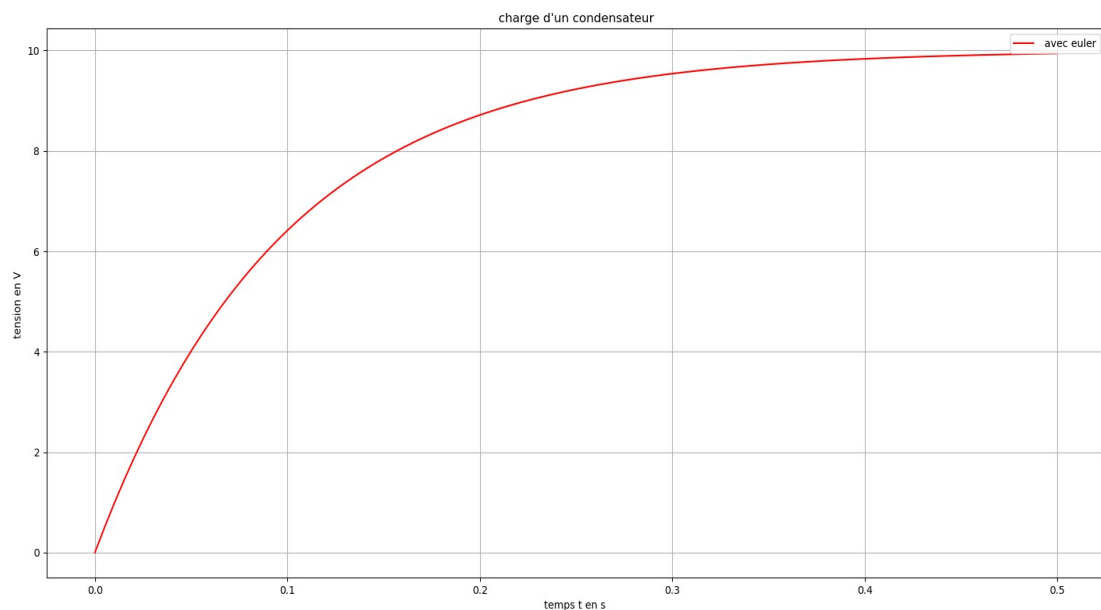
par $\frac{s(t_{n+1}) - s(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$.

Il existe des schémas numériques plus astucieux intégrés dans des fonctions issues de bibliothèques en particulier la fonction `odeint` du module `scipy.integrate`

Ecrire le schéma numérique correspondant à l'équation différentielle précédente.

charge condensateur euler avec liste.py

```
01 | # capacité numérique charge d'un condensateur
02 |
03 | # importation des bibliothèque
04 | from scipy.integrate import odeint
05 | import numpy as np
06 | import matplotlib.pyplot as plt
07 |
08 | # conditions initiales
09 | E=10
10 | u0=0
11 | tau=0.1 #constante de temps du circuit
12 | t0=0
13 | tmax=0.5
14 | nt=100#nombre de points de discrétisation
15 | Te=(tmax-t0)/(nt-1)# pas de discrétisation
16 |
17 | t=[t0]
18 | s=[u0]
19 |
20 | si=0
21 |
22 | for i in range(1,nt):
23 |     ti=i*Te
24 |     si=si+Te/tau*(E-si)
25 |     t.append(ti)
26 |     s.append(si)
27 |
28 |
29 | plt.xlabel("temps t en s ")
30 | plt.ylabel("tension en V ")
31 | plt.plot(t,s,color='red',label=' avec euler')
32 | plt.grid(True)
33 | plt.legend(loc="best")
34 | plt.title("charge d'un condensateur")
35 | plt.show()
```



→ Utilisation de la fonction *odeint* :

Il existe un solveur d'équations différentielles d'ordre 1 inclus dans le module *integrate* de *scipy* .

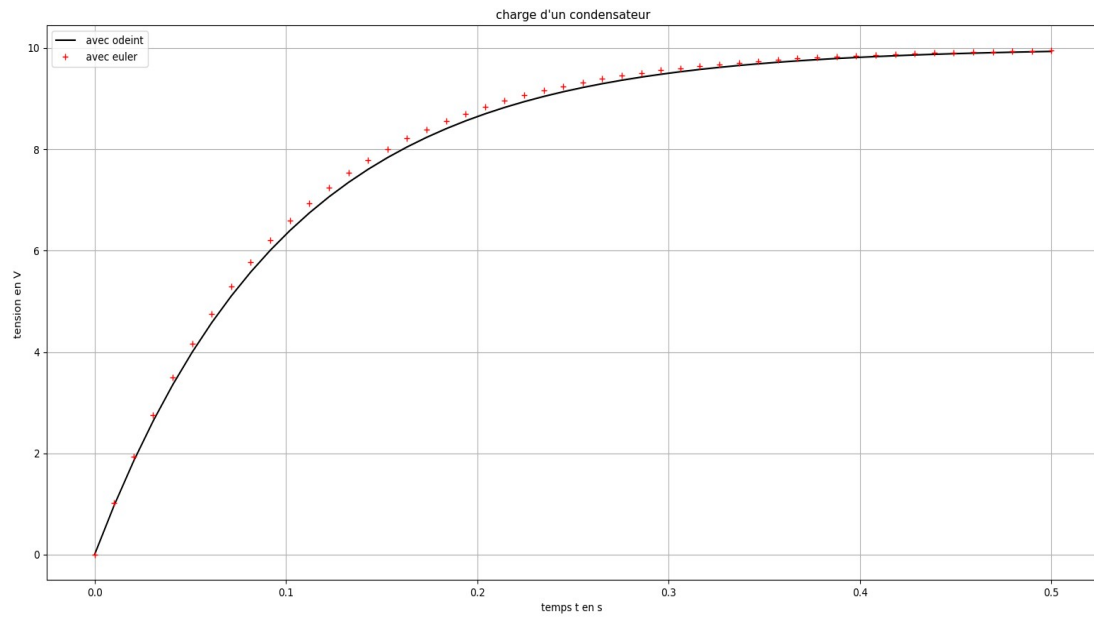
La fonction *odeint* renvoie la solution approchée d'une équation différentielle du type : $\frac{du}{dt} = f(u, t)$

La fonction *odeint* nécessite une liste de valeurs de *t*, commençant en *t*₀ , et une condition initiale *u*(*t*₀) = *u*₀ . L'équation différentielle peut être non linéaire . La fonction renvoie des valeurs approchées (aux points contenus dans la liste des *t*) de la solution *u* de l'équation différentielle qui vérifie *u*(*t*₀) = *u*₀

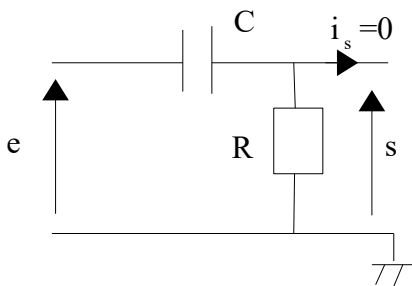
On utilise, dans le script, des tableaux *numpy* (cf fiche outil Python) .

```
# charge condensateur.py

01 | # capacité numérique charge d'un condensateur
02 |
03 | # importation des bibliothèques
04 | from scipy.integrate import odeint
05 | import numpy as np
06 | import matplotlib.pyplot as plt
07 |
08 | # conditions initiales
09 | E=10
10 | u0=0
11 | tau=0.1 #constante de temps du circuit
12 | t0=0
13 | tmax=0.5
14 | nt=50#nombre de points de discrétisation
15 |
16 | #définition de la fonction f
17 | def f(u,t):
18 |     return (E-u)/tau
19 |
20 | #définition du vecteur temps
21 | t=np.linspace(t0,tmax,nt)
22 |
23 | # calcul des valeurs de u à t
24 | s=odeint(f,u0,t)
25 |
26 | #résolution à l'aide de la méthode d'Euler
27 | se=np.zeros(nt)
28 | Te=(tmax-t0)/(nt-1)# pas de discrétisation
29 | for i in range(1,nt):
30 |     se[i]=se[i-1]+Te/tau*(E-se[i-1])
31 |
32 | plt.xlabel("temps t en s ")
33 | plt.ylabel("tension en V ")
34 | plt.plot(t,s,color='silver',label=' avec odeint')
35 | plt.plot(t,se,"+",color='red',label=' avec euler')
36 | plt.grid(True)
37 | plt.legend(loc="best")
38 | plt.title("charge d'un condensateur")
39 | plt.show()
```

2- Passe-haut d'ordre 1 :

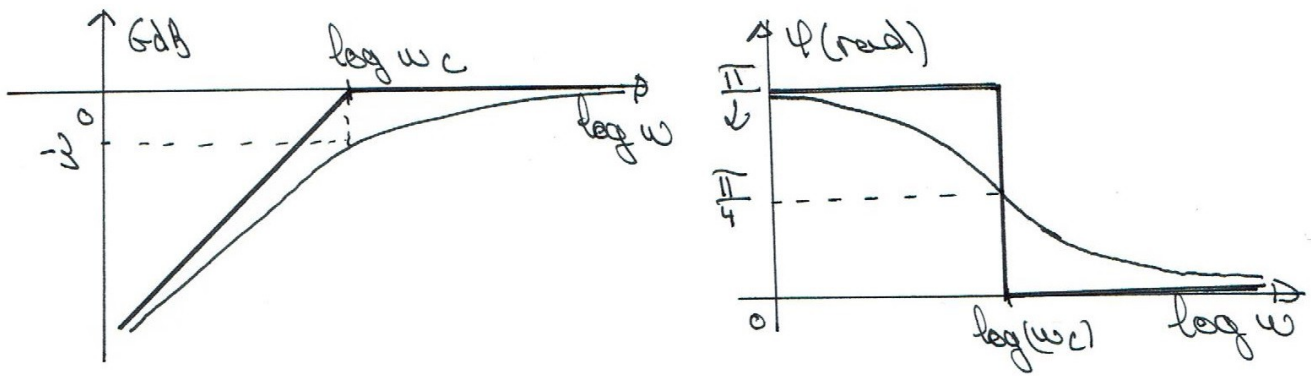


$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$\omega \ll \omega_c \quad \underline{H}(j\omega) \rightarrow j\frac{\omega}{\omega_c} \quad G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad \text{pente} + 20 \text{ dB / d\'ecade} \quad \phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \gg \omega_c \quad \underline{H}(j\omega) \rightarrow 1 \quad G_{dB} \rightarrow 0 \quad \phi \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_c \quad \underline{H} = \frac{j}{1+j} \quad G_{dB} = -3 \text{ dB} \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$



Remarque :

$\omega \ll \omega_c$ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow j \frac{\omega}{\omega_c}$ fonctionnement en dérivateur

3- Passe-bas d'ordre 2 :

a- Etude en régime sinusoïdal :

b- Réponse à un échelon :

→ Passage à l'équation différentielle . Forme des solution :

Conditions initiales : condensateur initialement non chargé et intensité initialement nulle .

→ Résolution à l'aide de la méthode d'Euler explicite :

On cherche une solution numérique au problème par la méthode d'Euler explicite (ou méthode aux différences finies) .

Nous allons chercher $s(t)$ pour t compris entre $t_0=0$ et $t_{max}=50\text{ s}$.

Nous allons faire une discrétisation temporelle avec un pas $T_e = \frac{(t_{max}-t_0)}{n_t-1}$ avec n_t le nombre de points .

L'échantillon $s_n = s(nT_e)$ correspond à la valeur de s à l'instant $t_n = nT_e$.

Pour exprimer la dérivée seconde de s par rapport au temps, nous allons utiliser un développement de Taylor à l'ordre 2

Si on développe la tension s au second ordre discret au voisinage de t_{n+1} et t_{n-1} on a :

$$s(t_{n+1}) = s(t_n) + \frac{ds}{dt}(t_n) \cdot T_e + \frac{1}{2} \frac{d^2s}{dt^2}(t_n) \cdot (T_e)^2 + o((T_e)^2)$$

$$s(t_{n-1}) = s(t_n) - \frac{ds}{dt}(t_n) \cdot T_e + \frac{1}{2} \frac{d^2s}{dt^2}(t_n) \cdot (T_e)^2 + o((T_e)^2)$$

En sommant les deux équations précédentes, on obtient l'expression de la dérivée seconde temporelle discrète » à la date t_n .

De même en travaillant à l'ordre 1, on peut exprimer $\frac{ds}{dt}(t_n)$ en fonction de $s(t_{n+1})$ et $s(t_n)$.

On peut déterminer la relation de récurrence permettant de calculer s_{n+1} en fonction de s_n et s_{n-1}

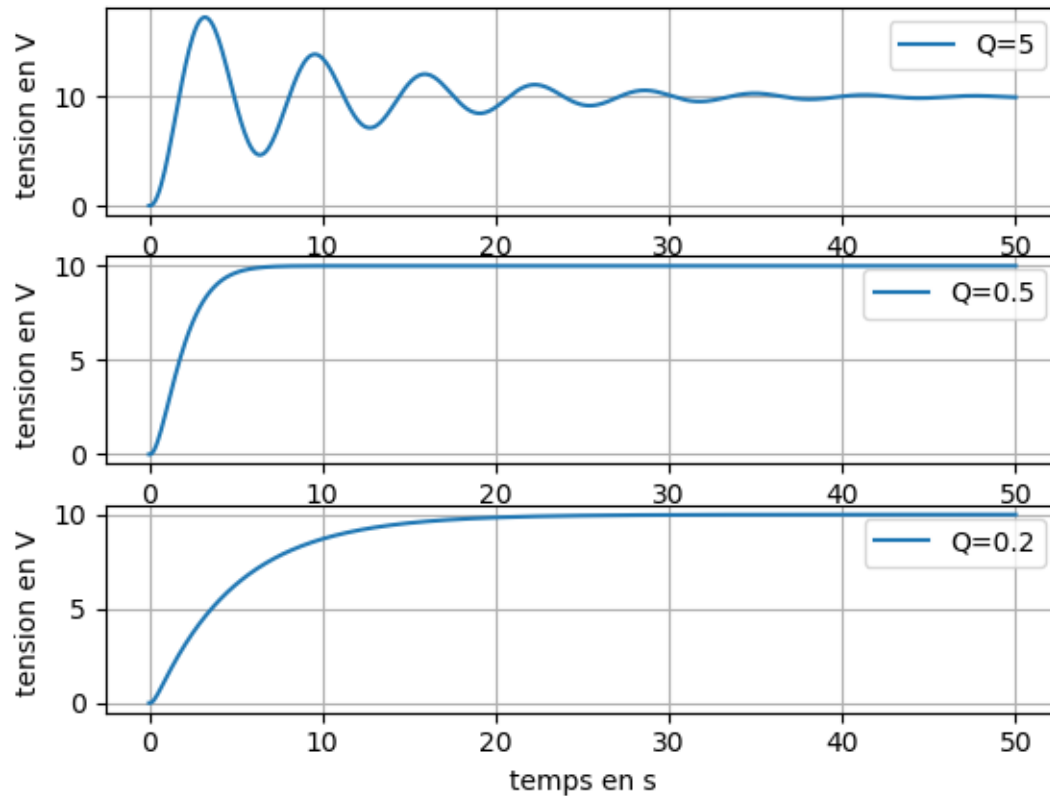
Le but est de représenter en fonction du temps la tension $s(t)$ pour trois valeurs du facteur de qualité .

On posera s_1 la valeur de s pour $Q=Q_1=5$, s_2 la valeur de s pour $Q=Q_2=0,5$ et s_3 la valeur de s pour $Q=Q_3=0,2$.

```
# réponse RLC échelon.py
```

```
01|
02| #circuit RLC réponse à un échelon
03|
04| import numpy as np
05| import matplotlib.pyplot as plt
06|
07| #conditions initiales : condensateur initialement non chargé et dérivée de la
tension aux bornes de C nulle
08| s0=0
09| sd0=0
10| E=10#réponse à un échelon d'amplitude 10V
11| t0=0
12| tmax=50
13| w0=1
14| nt=500#nombre de points de discrétisation
15| Te=(tmax-t0)/(nt-1)#pas de discrétisation
16|
17|
18| #vecteur des temps
19| t=np.linspace(t0,tmax,nt)
20|
21| #calcul par la méthode d'Euler de la tension u pour différentes valeurs du
facteur de qualité
22| Q1=5
23| s1=np.zeros(nt)
24| s1[0]=s0
25| s1[1]=s0
26| for i in range(1,nt-1):
27|     s1[i+1]=Q1/(w0*Te+Q1)*(s1[i]*(2+(w0*Te)/Q1-w0**2*Te**2)-s1[i-1]
+w0**2*Te**2*E)
28|
29| Q2=0.5
30| s2=np.zeros(nt)
31| s2[0]=s0
32| s2[1]=s0
33| for i in range(1,nt-1):
34|     s2[i+1]=Q2/(w0*Te+Q2)*(s2[i]*(2+(w0*Te)/Q2-w0**2*Te**2)-s2[i-1]
+w0**2*Te**2*E)
35|
36| Q3=0.2
37| s3=np.zeros(nt)
38| s3[0]=s0
39| s3[1]=s0
40| for i in range(1,nt-1):
41|     s3[i+1]=Q3/(w0*Te+Q3)*(s3[i]*(2+(w0*Te)/Q3-w0**2*Te**2)-s3[i-1]
+w0**2*Te**2*E)
42|
43| #tracé des courbes
44| plt.subplot(311)
45| plt.plot(t,s1,label='Q=5')
46| plt.legend(loc="best")
47| plt.xlabel("temps en s")
48| plt.ylabel("tension en V ")
49| plt.title ("tension aux bornes de C en fonction du temps pour différentes valeurs
de Q")
50| plt.grid(True)
51|
52| plt.subplot(312)
53| plt.plot(t,s2,label='Q=0.5')
54| plt.legend(loc="best")
55| plt.xlabel("temps en s")
56| plt.ylabel("tension en V ")
57| plt.grid(True)
58|
59| plt.subplot(313)
60| plt.plot(t,s3,label='Q=0.2')
61|
62| plt.legend(loc="best")
63| plt.xlabel("temps en s")
64| plt.ylabel("tension en V ")
65| plt.grid(True)
66|
67| plt.show()
```

tension aux bornes de C en fonction du temps pour différentes valeurs de C



→ Résolution avec *odeint* :

La fonction *odeint* a une syntaxe particulière, qui oblige à transformer l'équation d'ordre 2, en une équation d'ordre 1 sur le couple $(s, \frac{ds}{dt})$. On posera $s_d = \frac{ds}{dt}$ et on désignera par u le couple (s, s_d) . On travaille avec un vecteur à deux composantes.

$$u = (s, s_d) \text{ Si on dérive ce couple, on obtient } \frac{du}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}, \frac{ds_d}{dt} \right) = \left(\frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2} \right)$$

D'après l'équation différentielle vérifiée par s , on a donc :

$\frac{du}{dt} = (s_d, -\frac{\omega_0}{Q}s_d - \omega_0^2(s - E)) = F(u)$ on est passé d'une équation d'ordre 2 en s à une équation d'ordre 1 sur le couple u (ou encore un système de deux équations différentielles).

Comme on a une équation d'ordre 1, nous allons pouvoir utiliser la fonction *odeint*.

Paramètres de *odeint* :

→ F est une fonction de type $F(u, t)$ qui renvoie la dérivée de u à l'instant t . Pour une équation d'ordre 2 u est un vecteur du type (s, s_d) . Attention, même si F ne dépend pas explicitement du temps, il faut quand même que t apparaisse comme second argument.

→ t est un tableau qui contient les instants auxquels la solution sera calculée.

→ il faut deux conditions initiales portant sur s et s_d .

Objets retournés par *odeint* :

Après exécution de la fonction *odeint*, on obtient une matrice dont la première colonne contient les valeurs de $s(t)$ et la deuxième les valeurs de $s_d(t)$. Les différentes lignes correspondent aux différents instants t .

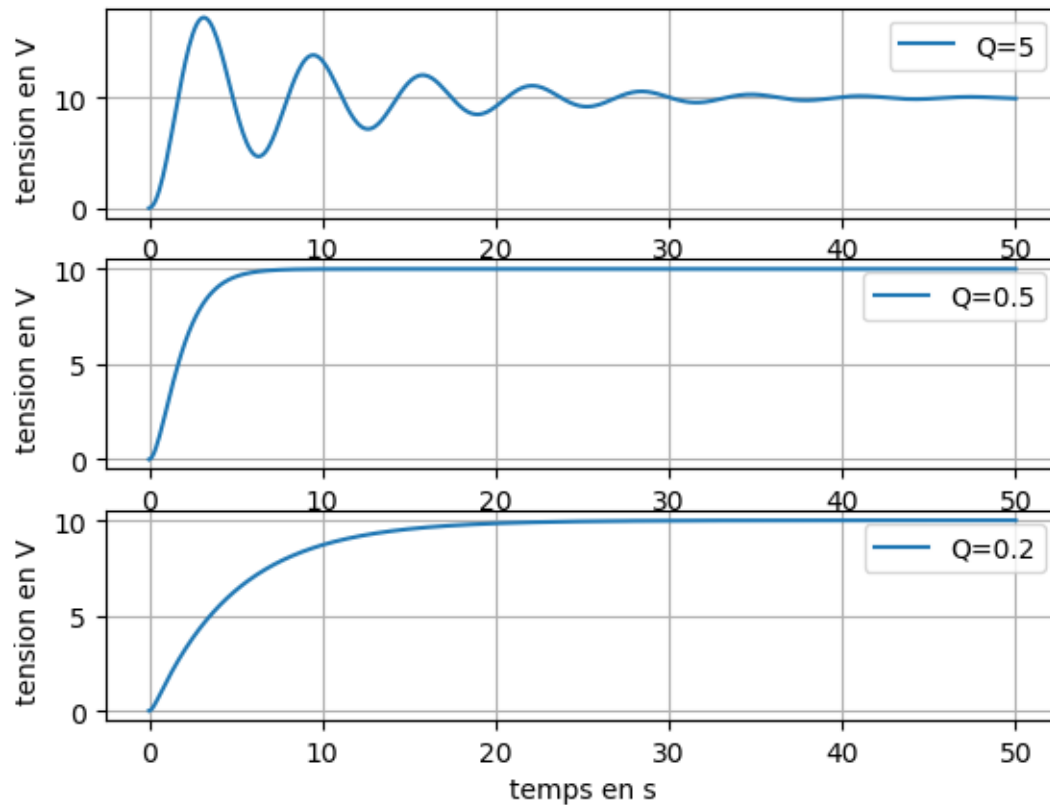
```

# réponse RLC échelon odeint.py

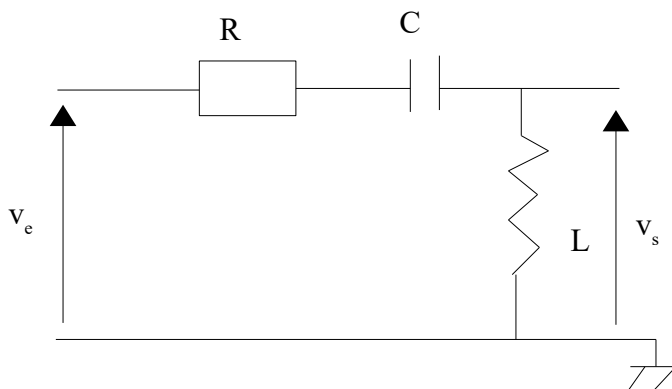
01| #circuit RLC en régime libre
02| from scipy.integrate import odeint
03| import numpy as np
04| import matplotlib.pyplot as plt
05|
06| #conditions initiales : condensateur chargé sous 10V et dérivée de la tension aux
bornes de C nulle
07| s0=0
08| sd0=0
09| t0=0
10| tmax=50
11| w0=1
12| E=10#réponse à un échelon d'amplitude 10V
13|
14| #on définit la fonction f contenant le système d'équations différentielles
15| Q1=5
16| def f1(u,t):
17|     s=u[0]
18|     sd=u[1]
19|     return np.array([sd,-w0*sd/Q1-w0**2*(s-E)])#on retourne la liste des dérivées
de u et de ud
20|
21| Q2=0.5
22| def f2(u,t):
23|     s=u[0]
24|     sd=u[1]
25|     return np.array([sd,-w0*sd/Q2-w0**2*(s-E)])
26|
27| Q3=0.2
28| def f3(u,t):
29|     s=u[0]
30|     sd=u[1]
31|     return np.array([sd,-w0*sd/Q3-w0**2*(s-E)])
32|
33| #vecteur des temps
34| t=np.linspace(t0,tmax,500)
35| #calcul des u et up à t
36| u1=odeint(f1,[s0,sd0],t)#renvoie une matrice où chaque ligne correspond aux
différents instants t et les colonnes respectivement à u(t) et ud(t)
37| u2=odeint(f2,[s0,sd0],t)
38| u3=odeint(f3,[s0,sd0],t)
39|
40|
41| #tracé des courbes
42| plt.subplot(311)
43| plt.plot(t,u1[:,0],label='Q=5') # on ne prend que la première colonne de s pour
avoir u
44| plt.legend(loc="best")
45| plt.xlabel("temps en s")
46| plt.ylabel("tension en V ")
47| plt.title ("tension aux bornes de C en fonction du temps pour différentes valeurs
de Q avec odeint")
48| plt.grid(True)
49|
50| plt.subplot(312)
51| plt.plot(t,u2[:,0],label='Q=0.5') # on ne prend que la première colonne de s pour
avoir u
52| plt.legend(loc="best")
53| plt.xlabel("temps en s")
54| plt.ylabel("tension en V ")
55| plt.grid(True)
56|
57| plt.subplot(313)
58| plt.plot(t,u3[:,0],label='Q=0.2') # on ne prend que la première colonne de s pour
avoir u
59| plt.legend(loc="best")
60| plt.xlabel("temps en s")
61| plt.ylabel("tension en V ")
62| plt.grid(True)
63|
64|
65| plt.show()

```

on aux bornes de C en fonction du temps pour différentes valeurs de Q avec



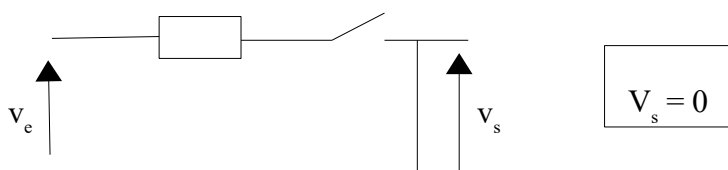
4- Passe-haut d'ordre 2 :



→ Etude des comportements basses et hautes fréquences :

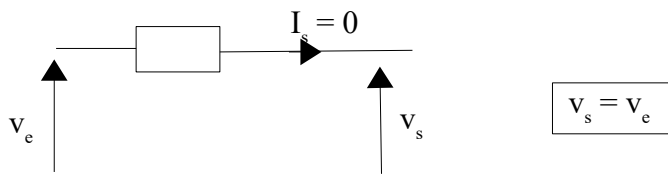
$\omega \rightarrow 0$ L est équivalente à un court circuit
C est équivalent à un circuit ouvert

On obtient le schéma équivalent suivant :



$\omega \rightarrow \infty$ L est équivalente à un circuit ouvert
C est équivalent à un court circuit

On obtient le schéma équivalent suivant :



Le filtre coupe les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences : c'est un filtre passe haut .

→ Fonction de transfert :

D'après le diviseur de tension, on a :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Généralisation: un filtre passe haut d'ordre 2 a une fonction de transfert de la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

5- Passe-bande d'ordre 2 :

6- Action de filtres passe-bas d'ordre 1 et 2 sur un signal carré :

Signal d'entrée : signal carré de valeur moyenne E_0 et de fréquence f_0 .

$$e(t) = E_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin(2\pi(2p+1)f_0 t)$$

a- Action d'un passe-bas idéal :

b- Action de filtres réels :

Etude du cas où $E_0 = 0 \text{ V}$ $E = 1 \text{ V}$ $f_0 = 1 \text{ kHz}$

On note E_k l'amplitude de l'harmonique de rang k en entrée du filtre, S_k l'amplitude de l'harmonique de rang k en sortie du filtre et $\underline{H}(j f)$ la fonction de transfert du filtre alimenté par le signal carré.

On peut déterminer S_k en fonction de E_k :

$\boxed{S_k = E_k |\underline{H}(j k f_0)|}$ attention la fréquence à laquelle doit être calculée la fonction de transfert est celle de l'harmonique considéré c'est à dire la fréquence $k f_0$.

→ Filtre passe-bas d'ordre 1 :

$$\underline{H}_1(j f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_c}} \quad \text{on choisit } f_c = 1,2 \text{ kHz}$$

Ce qui nous intéresse c'est la comparaison du poids des harmoniques par rapport au fondamental en entrée et en sortie .

$$\begin{array}{ll} \text{Entrée :} & \frac{E_3}{E_1} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \qquad \frac{E_5}{E_1} = \frac{1}{5} = 0,2 \\ \text{Sortie :} & \frac{S_3}{S_1} = 0,16 \qquad \frac{S_5}{S_1} = 0,06 \end{array}$$

→ Filtre passe-bas d'ordre 2 :

$$\underline{H_2}(jf) = \frac{1}{1 + j\sqrt{2}\frac{f}{f_c} - \frac{f^2}{f_c^2}} \quad \text{on choisit } f_c = 1,2 \text{ kHz}$$

On note S'_k l'amplitude de l'harmonique de rang k en sortie du filtre :

Fondamental : $f = f_0$

$$\begin{aligned} |\underline{H_2}(j f_0)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{f_0}{f_c})^2)^2 + 2(\frac{f_0}{f_c})^2}} = 0,82 \\ S'_1 &= E_1 |\underline{H_2}(j f_0)| \qquad S'_1 = 1,04 \text{ V} \end{aligned}$$

Harmonique 3 : $f = 3 f_0$

$$\begin{aligned} |\underline{H_2}(j 3 f_0)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{3f_0}{f_c})^2)^2 + 2(\frac{3f_0}{f_c})^2}} = 0,16 \\ S'_3 &= E_3 |\underline{H_2}(j 3 f_0)| \qquad S'_3 = 0,07 \text{ V} \end{aligned}$$

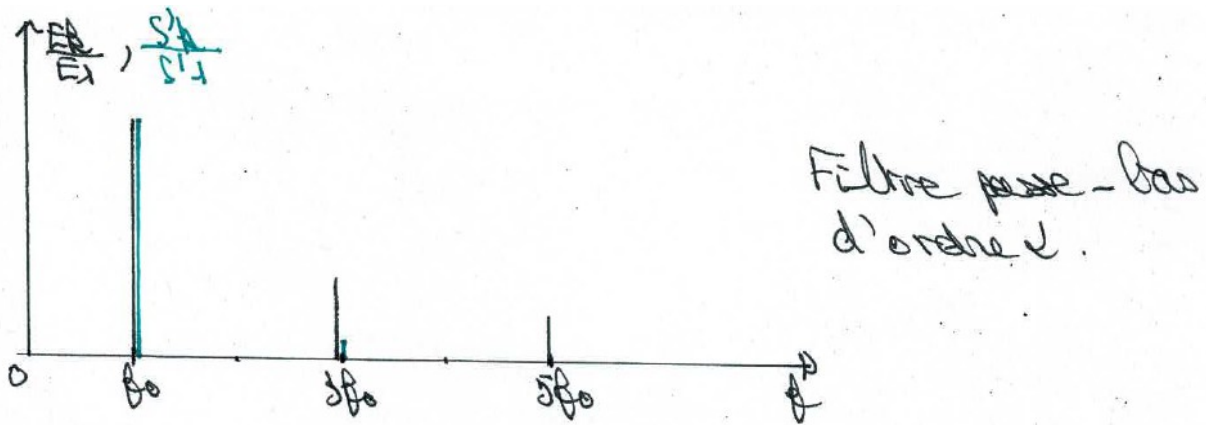
Harmonique 5 : $f = 5 f_0$

$$\begin{aligned} |\underline{H_2}(j 5 f_0)| &= \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{5f_0}{f_c})^2)^2 + 2(\frac{5f_0}{f_c})^2}} = 0,03 \\ S'_5 &= E_5 |\underline{H_2}(j 5 f_0)| \qquad S'_5 = 0,007 \text{ V} \end{aligned}$$

Poids des harmoniques par rapport au fondamental .

$$\begin{array}{ll} \text{Entrée :} & \frac{E_3}{E_1} = \frac{1}{3} \approx 0,33 \qquad \frac{E_5}{E_1} = \frac{1}{5} = 0,2 \\ \text{Sortie :} & \frac{S'_3}{S'_1} = 0,06 \qquad \frac{S'_5}{S'_1} = 0,007 \end{array}$$

→ Représentons $\frac{E_k}{E_1}, \frac{S_k}{S_1}, \frac{S'_k}{S'_1}$ en fonction des fréquences

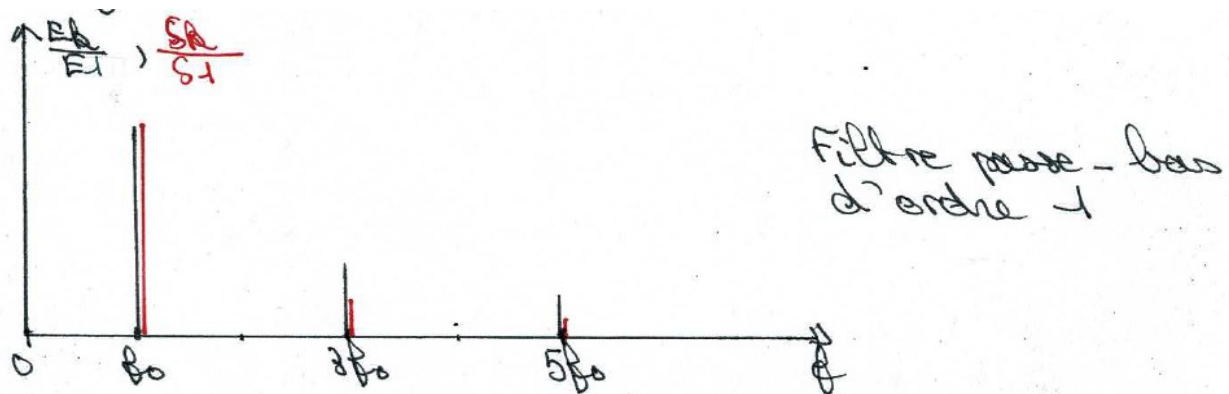


On voit que le passe-bas d'ordre 2 coupe de manière plus efficace les harmoniques du signal d'entrée . Les harmoniques de rangs supérieurs ou égaux à 5 ont disparu en sortie du filtre d'ordre 2 et le poids relatif de l'harmonique 3 est très faible .

On obtient, en sortie du filtre-d'ordre 2, un signal quasi-sinusoïdal de fréquence f_0 .

VI- Impédances d'entrée , de sortie , cascade de quadripôles :

Dans de nombreux montages électroniques, il est nécessaire de cascader plusieurs opérateurs réalisant

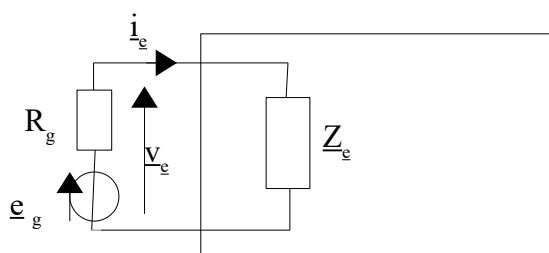


différentes fonctions . Lorsque l'on connecte entre eux deux quadripôles, si on n'a pas étudié les valeurs des impédances d'entrée et de sortie, le comportement du montage global peut-être différent de celui attendu .

1- Impédance d'entrée et de sortie :

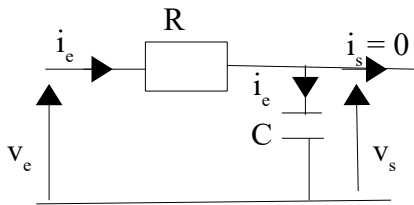
a- Impédance d'entrée :

Dans de nombreux cas, vis à vis de ses grandeurs d'entrée (intensité et tension), un quadripôle linéaire peut-être modélisé, en régime sinusoïdal forcé, par une impédance $\underline{Z}_e$ appelée impédance d'entrée du montage .



$$\underline{Z}_e = \frac{v_e}{i_e}$$

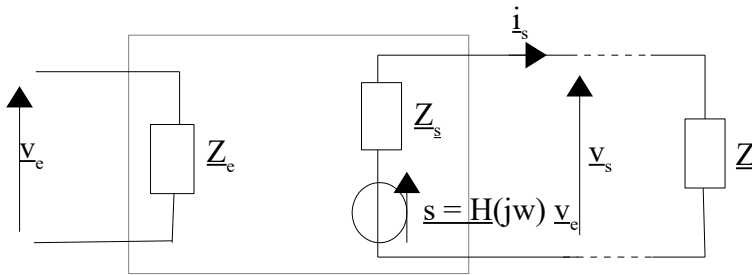
Exemple :



$v_e = e \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + R_g}$ donc si $|\underline{Z}_e| \gg R_g$ alors $v_e \approx e$, on retrouve à l'entrée du quadripôle la tension à vide fournie par le générateur (pas de perte de signal).
On a intérêt à avoir l'impédance d'entrée la plus élevée possible .

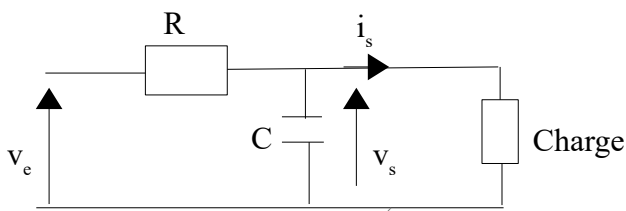
b- Impédance de sortie :

Dans de nombreux cas, en régime sinusoïdal forcé, un opérateur linéaire (ex filtre), peut-être modélisé en sortie comme un générateur de tension commandée par la tension d'entrée en série avec une impédance $\underline{Z}_s$ appelée impédance de sortie du quadripôle .



Par définition $\underline{Z}_s = -\left(\frac{v_s}{i_s}\right)_{v_e=0}$.

Exemple :



Lorsque qu'une charge d'impédance $\underline{Z}$ est branchée en sortie, alors $\underline{v}_s = \underline{v}_e \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}}$.

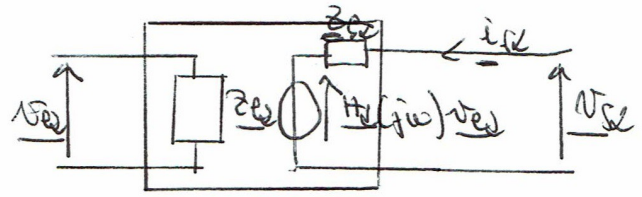
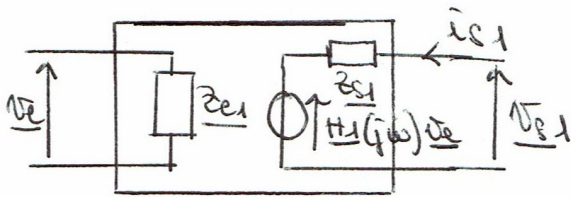
Si $|\underline{Z}_s| \ll |\underline{Z}|$ alors $\underline{v}_s \approx \underline{v}_e = \underline{H}(j\omega) \underline{v}_e$

Remarque :

Les modules des impédances d'entrée et de sortie d'un montage ou d'un appareil de mesure peuvent dépendre de la fréquence des signaux.

L'impédance d'entrée d'un oscilloscope dépend de la fréquence. Dans la gamme usuelle des fréquences utilisées en TP d'électronique, $|\underline{Z}_e|$ est élevée (1 à 10 MΩ), on peut donc considérer que, dans la plupart des cas, que lorsque l'on place un oscilloscope en sortie d'un montage, sa présence ne modifie pas le comportement du montage.

3- Interconnexion d'opérateurs en cascade : ex filtres.

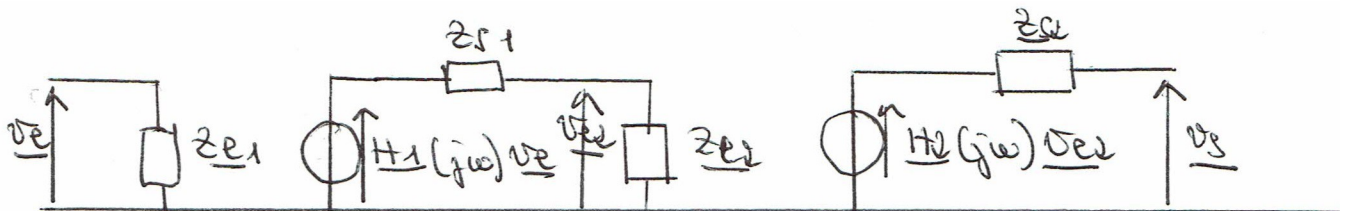


Si on cascade les deux filtres ci-dessus, la fonction de transfert du filtre global, dans le cas général, sera différente du produit des fonctions de transferts de chacun des filtres $\underline{H}(j\omega) \neq \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$.

En effet par définition $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{v}_{s1}}{\underline{v}_{e1}}$ lorsque $\underline{i}_{s1} = 0$

$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{\underline{v}_{s2}}{\underline{v}_{e2}}$ lorsque $\underline{i}_{s2} = 0$

Lorsque l'on cascade les deux filtres $\underline{i}_{s1} \neq 0$



$$\underline{v}_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \underline{H}_1(j\omega) \underline{v}_e \quad \text{et} \quad \underline{v}_s = \underline{H}_2(j\omega) \underline{v}_{e2} = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega) \underline{v}_e$$

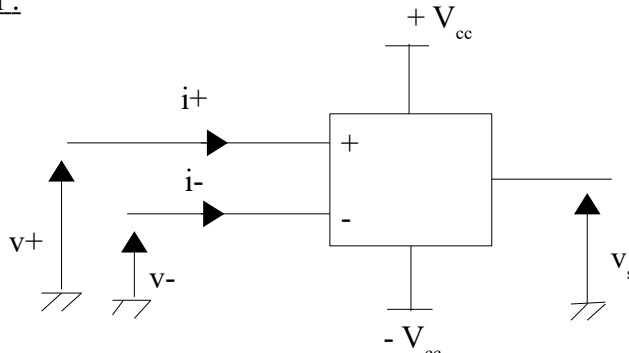
$$\text{D'où} \quad \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{e2}}{\underline{Z}_{e2} + \underline{Z}_{s1}} \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$$

Pour avoir $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \underline{H}_2(j\omega)$ il faut que $|\underline{Z}_{s1}| \ll |\underline{Z}_{e2}|$: il faut réaliser une adaptation d'impédance entre les deux montages.

Cas idéal: obtenu lorsque $\underline{Z}_{s1} = 0$ et $\underline{Z}_{e2} \rightarrow \infty$, ce cas peut-être réalisé avec des montages à ALI (amplificateur linéaire intégré).

VII Amplificateur linéaire intégré :

1- Description :

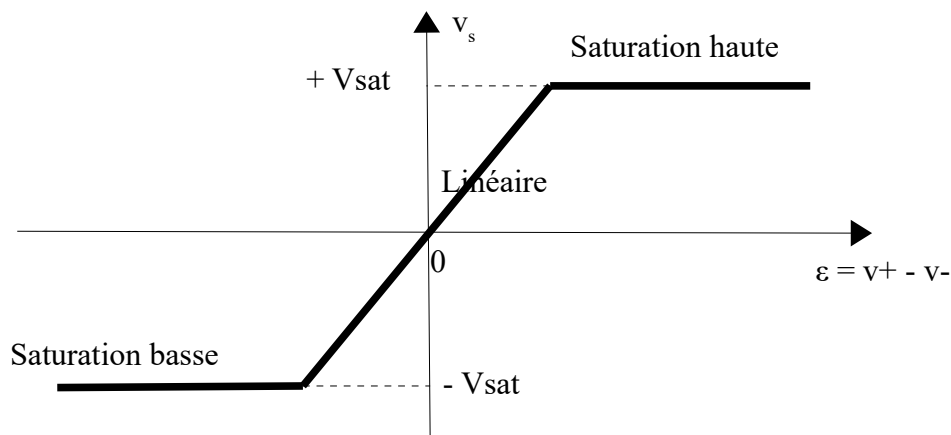


Un amplificateur linéaire intégré (ALI ou amplificateur opérationnel AO) est un composant actif , c'est à dire qu'il peut fournir de la puissance électrique au circuit auquel il est connecté . Pour cela, il est nécessaire que le circuit reçoive de la puissance électrique de l'extérieur, ce qui s'obtient grâce à des alimentations externes, représentées par $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$ sur la figure (en général $+15V$ et $-15V$) . L'amplificateur linéaire intégré (ALI) est un amplificateur de différence dont, en régime linéaire de fonctionnement, la tension de sortie v_s est proportionnelle à la différence $\varepsilon = v_+ - v_-$ entre les potentiels des deux entrées : non inverseuse $+$ de potentiel v_+ par rapport à la masse et inverseuse $-$ de potentiel v_- par rapport à la masse .

En régime linéaire (c'est à dire non saturé) : $v_s = A \varepsilon = A (v_+ - v_-)$ A a une valeur très élevée typiquement de l'ordre de 10^5 .

Lorsque $|\varepsilon|$ devient supérieur à quelques microvolts la tension de sortie atteint une valeur limite (tension de saturation) de $+V_{sat}$ ou $-V_{sat}$ avec V_{sat} de l'ordre de V_{cc} .

Des différents comportements de l'ALI sont résumés dans la caractéristique statique suivante :



De plus le comportement de l'ALI dépend de la fréquence . Dans une première approche celui-ci peut-être modélisé par un filtre passe-bas d'ordre 1 . $A(j\omega) = \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $A_0 \approx 10^5$ et $\omega_0 \approx 100 \text{ rad.s}^{-1}$.

L'ALI est en général utilisé dans un système bouclé comportant une boucle de rétroaction entre la sortie et les entrées .

De manière qualitative :

→ un montage à amplificateur linéaire intégré est stable s'il est bouclé entre la sortie et l'entrée inverseuse . Dans ce cas si $|v_s| < V_{sat}$ alors l'ALI fonctionnera dans sa zone linéaire . Le système bouclé a une bande passante beaucoup plus grande que l'ALI seul .

→ un montage à amplificateur linéaire intégré est instable s'il est bouclé entre la sortie et l'entrée non inverseuse . Dans ce cas $v_s = \pm V_{sat}$.

2- Modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal :

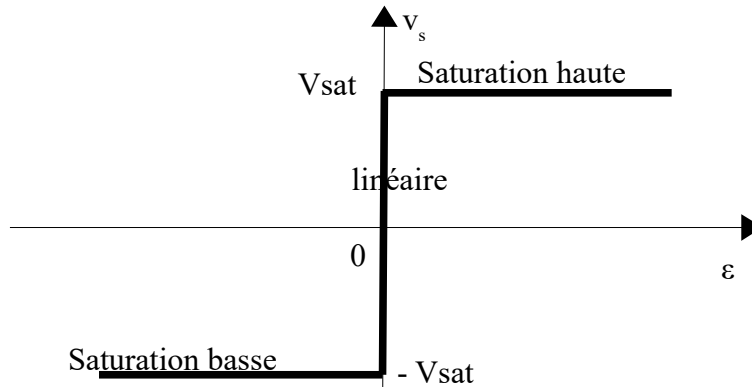
Le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal consiste à considérer que $A \rightarrow \infty$ et que la bande passante est infinie .

Ce qui conduit à considérer la caractéristique de transfert suivante :

→ en régime linéaire : $\varepsilon = 0$ c'est à dire $v_+ = v_-$ et $|v_s| \leq V_{sat}$

→ saturation haute pour $\varepsilon > 0$ alors $v_s = V_{sat}$

→ saturation basse pour $\varepsilon < 0$ alors $v_s = -V_{sat}$



De plus les courants i_+ et i_- étant très faibles, on les considérera comme nuls .

Sauf indications contraires nous utiliserons dans toute la suite et les exercices le modèle de l'ALI idéal .

3- Exemples de montages linéaires simples à ALI :

Dans tous les montages, l'ALI a une contre réaction sur son entrée non inverseuse, on pourra donc considérer son fonctionnement linéaire .

a- Montage suiveur :

b- Amplificateur inverseur :

c- Amplificateur non inverseur :

d- Intégrateur pur :

e- Dérivateur :

f- Passe-bas d'ordre 1 :

4- Comparateur simple :