

Formes canoniques des équations différentielles d'ordre 2 en physique :

Il existe plusieurs formes canoniques de l'équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants en physique .
On considère $y(t)$ une fonction du temps :

Forme canonique	Grandeurs caractéristiques introduites
$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{dy}{dt} + w_0^2 y(t) = 0$	Pulsation propre w_0 facteur de qualité : Q (sans dimension)
$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\sigma w_0 \frac{dy}{dt} + w_0^2 y(t) = 0$	Pulsation propre w_0 facteur d'amortissement : σ (sans dimension)
$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + w_0^2 y(t) = 0$	Pulsation propre w_0 coefficient d'amortissement : λ (en s^{-1})

Formes canoniques des fonction de transfert des filtres d'ordre 1 et 2 , caractéristiques et identification

Passe-bas d'ordre 1 :
$$H(jw) = \frac{H_0}{1 + j \frac{w}{w_0}}$$
 $|H_0|$ est le gain maximum , w_0 est la pulsation de coupure à -3 dB .

En BF phase de 0 (si $H_0 > 0$) ou π (si $H_0 < 0$) en HF $\frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0), à la pulsation de coupure $\phi = \frac{\pm\pi}{4}$ (selon le signe de H_0).

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 0 en BF , -20 dB/décade en HF .

Passe-haut d'ordre 1 :
$$H(jw) = \frac{H_0 j \frac{w}{w_0}}{1 + j \frac{w}{w_0}}$$

$|H_0|$ est le gain maximum , w_0 est la pulsation de coupure à -3 dB .

En HF phase de 0 (si $H_0 > 0$) ou π (si $H_0 < 0$) en BF $\frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0), à la pulsation de coupure $\pi = \frac{\pm\pi}{4}$ (selon le signe de H_0).

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : $+20$ dB/décade en BF , 0 en HF .

Pas de résonance pour les filtres d'ordre 1 .**Filtres d'ordre 2 :**

Passe-bas d'ordre 2 :
$$H(jw) = \frac{H_0}{1 - \frac{w^2}{w_0^2} + j \frac{w}{w_0 Q}}$$
 w_0 est la pulsation caractéristique , elle s'identifie à la

pulsation de coupure à -3 dB uniquement lorsque $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il existe une pulsation de résonance w_R ($w_R = w_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$), sinon le gain maximum est obtenu pour $w=0$ et vaut $|H_0|$.

Attention : dans le cas général w_0 n'est ni la pulsation de coupure à -3 dB, ni la pulsation de résonance .

C'est la pulsation caractéristique . Elle correspond à la pulsation pour laquelle il y a intersection des

asymptotes BF et HF du diagramme de Bode en amplitude .

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 0 en BF , -40 dB/décade en HF .

Les valeurs de phase caractéristiques :

→ BF phase de 0 (si $H_0 > 0$) ou π (si $H_0 < 0$), l'étude en BF permet de déterminer H_0 .

→ HF phase de 0 (si $H_0 < 0$) ou π (si $H_0 > 0$)

→ à la pulsation caractéristique $\phi = \frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0), $\underline{H}(j\omega_0) = -jH_0Q$, l'étude du gain à la pulsation caractéristique permet de déterminer Q .

Filtre passe-bande d'ordre 2 :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

ω_0 est la pulsation centrale (ou de résonance) , Q le facteur de qualité et $|H_0|$ le gain maximum (à la résonance) , la bande passante $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ est d'autant plus étroite (filtre d'autant plus sélectif) que Q est grand .

Les valeurs de phase caractéristiques :

→ à la résonance : 0 (si $H_0 > 0$) ou π (si $H_0 < 0$), $\underline{H}(j\omega_0) = H_0$

→ BF phase de $-\frac{\pi}{2}$ (si $H_0 > 0$) ou $\pi/2$ (si $H_0 < 0$)

→ HF phase de $\frac{\pi}{2}$ (si $H_0 > 0$) ou $-\pi/2$ (si $H_0 < 0$)

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 20 dB/décade en BF , - 20 dB/décade en HF .

Les deux asymptotes BF et HF du diagramme de Bode en amplitude se coupent en $\omega = \omega_0$, l'ordonnée du point vaut $20 \log\left(\frac{|H_0|}{Q}\right)$ (courbe de gain « au dessus » des asymptotes si $Q > 1$, « en dessous » si $Q < 1$) .

Filtre passe-haut d'ordre 2 :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0\left(\frac{-\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0}Q}$$

ω_0 est la pulsation caractéristique , elle s'identifie à la pulsation de coupure à - 3 dB uniquement lorsque

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il existe une pulsation de résonance ω_R ($\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$), sinon le gain maximum est obtenu pour $\omega \text{ tend vers l'infini}$ et vaut $|H_0|$.

Attention : dans le cas général ω_0 n'est ni la pulsation de coupure à -3 dB, ni la pulsation de résonance .

C'est la pulsation caractéristique . Elle correspond à la pulsation pour laquelle il y a intersection des asymptotes BF et HF du diagramme de Bode en amplitude .

Pente des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude : 40 dB/décade en BF , 0 en HF.

Les valeurs de phase caractéristiques :

→ HF phase de 0 (si $H_0 > 0$) ou π (si $H_0 < 0$), l'étude en HF permet de déterminer H_0 .

→ BF phase de 0 (si $H_0 < 0$) ou π (si $H_0 > 0$)

→ à la pulsation caractéristique $\phi = \frac{\pm\pi}{2}$ (selon le signe de H_0) .