MAGNETOSTATIQUE .

Généralités sur le champ magnétostatique :

- Les sources les plus anciennes de champs magnétique sont les aimants utilisés depuis des siècles dans les boussoles . Ils créent un champ magnétique sortant par le pôle Nord et entrant vers le pôle Sud .
- 1820 Oersted découvre qu'une aiguille aimantée est déviée lorsqu'on établit un courant à proximité de celle-ci : les courants électriques sont les sources de champ magnétique .
- Pour créer des champs intenses , on utilise des bobines parcourues par des courants .
- Unité Tesla symbole T .
- Ordres de grandeur :
  Champ magnétique terrestre : $B \approx 5.10^{-5} T$
  Fil parcouru par une intensité de 1 A à 1 cm : $B \approx 2.10^{-5} T$
  Bobine 1000sp/m 1 A : $B \approx 10^{-3} T$
  Aimant permanent à qqs mm : 0,1 à 1 T
  Appareil IRM : 6T
  Bobine supraconductrice $B \leq 45 T$

I- Courants électriques :

1- Définition :

On appelle courant électrique tout mouvement d'ensemble (mouvement à l'échelle macroscopique) de particules chargées dans un référentiel .
Il est existe différents types de courants :
→ les courants de conduction : mouvements de particules chargées par rapport à un support fixe , mouvement lié à l'existence d'un champ électrique .
→ courants de convection : charges liés à un conducteur en mouvement .
→ courants de diffusion : mouvements dû à des différences de concentrations en porteurs de charge .

2- Intensité :

Soit un conducteur cylindrique de section S parcouru par un courant d'intensité I .
Ce courant électrique est lié au mouvement de particules de charge q de vitesse moyenne $\vec{v}$ dans le référentiel d'étude lié au circuit .

n_m = nbre de charges q mobiles par unité de volume (m^{-3})

Généralisation :

Soit un milieu contenant des charges mobiles de densité volumique $n_m(M,t)$ (en m^{-3}), de charge q de vitesse au point M $\vec{v}(M,t)$, ces mouvements de particules chargées sont à l'origine de courants volumiques caractérisés par la densité volumique de courant $\vec{j}(M,t)$:

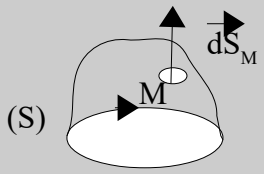
$$\vec{j}(M,t)=n_m(M,t)q\vec{v}(M,t)=\rho_m(M,t)\vec{v}(M,t)$$

avec $\rho_m(M,t)=q\,n_m(M,t)$ densité volumique de charges mobiles en $C.m^{-3}$.

Unité : $[\|\vec{j}\|]=A.m^{-2}$

S'il existe plusieurs types de porteurs de charge : $\vec{j}=\sum_i \rho_{mi}\vec{v}_i=\sum_i n_i q_i \vec{v}_i$

L'intensité traversant une surface S est définie comme le flux du vecteur densité volumique de courants à travers cette surface :



$$\boxed{I(t)=\int\int_{(S)}\vec{j}(M,t).d\vec{S}_M=\frac{\delta q_m}{dt}}$$ unité $[I]=A$.

où δq_m désigne la quantité de charges mobiles traversant S entre t et t+dt .

Exercice cours 1 :

1- On considère un conducteur cylindre de rayon R d'axe (Oz) parcouru par des courants axiaux uniformes de densité volumique $\vec{j}=j_0\vec{u}_z$. Déterminer l'intensité traversant le conducteur .

2- On considère un milieu conducteur compris entre deux cylindres coaxiaux d'axe (Oz) et de rayons R_1 et R_2 parcouru par des courants uniformément répartis en volume . L'intensité totale traversant le conducteur vaut I . Déterminer le vecteur densité volumique de courants .

Lignes de courant:lignes qui en chacun de leur point sont tangentes au vecteur densité de courant en ce point .

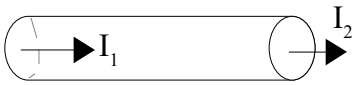
Tube de courant : ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé .

3- Cas du régime permanent :

$\vec{j}$ est indépendant du temps .

Les densités de charges sont indépendantes du temps .

On considère un tube de courant délimité par deux surfaces S1 et S2 .



L'ensemble délimite un volume fixe , la charge contenue à l'intérieur de ce volume ne variant pas au cours du temps , on en déduit que $I_1 = I_2$.

E**n régime permanent l'intensité est la même à travers tout section d'un tube de courant .**(analogie avec la conduction thermique) .

4- Courants filiformes :

Dimensions transversales faibles .
Les courants sont totalement caractérisés par leur intensité I .

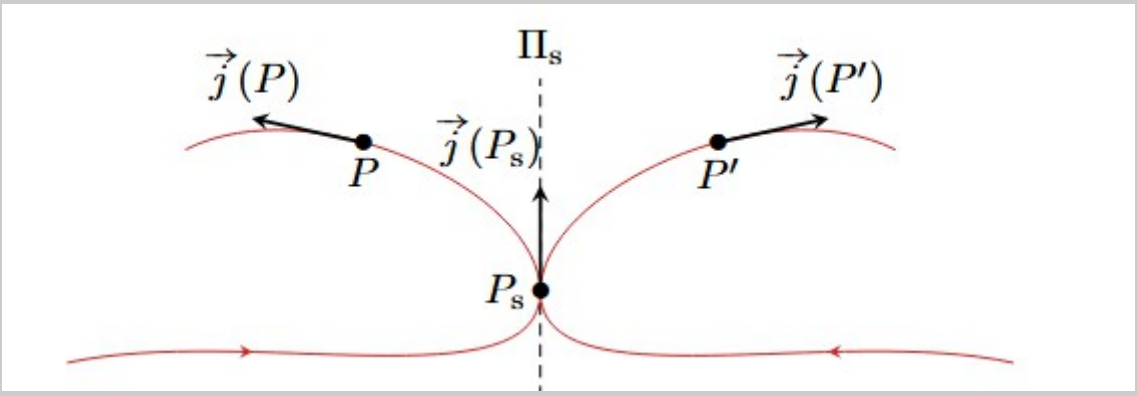
5- Symétries et invariances des distributions de courant :
Notion d'élément de courant : pour une distribution volumique de courants $\vec{dC} = \vec{j}\, d\tau$, pour une distribution linéique de courants $\vec{dC} = I\, \vec{dl}$.

a- Invariances :

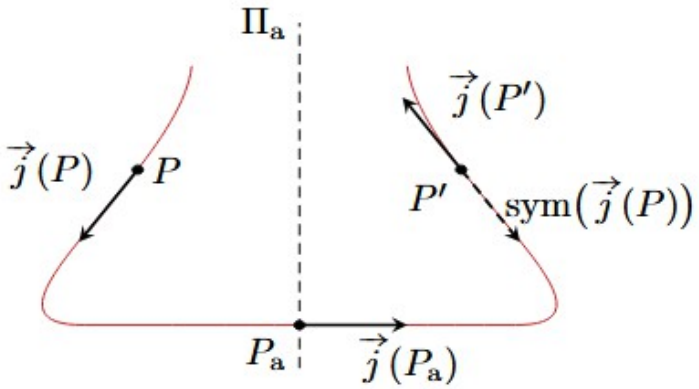
- Invariance par translation : la distribution est invariante par translation si la distribution obtenue après translation est identique à la distribution initiale aussi bien en position dans l'espace que en valeur locale de densité de courant (ex invariance par translation selon (zz')dans ce cas $\vec{j}$ indépendant de z .

- Invariance par rotation:une distribution est invariante par rotation d'angle θ autour de (zz') si la distribution reste inchangée par toute rotation d'angle θ aurour de (zz')
dans ce cas $\vec{j}$ indépendant de θ .

b- Symétries et anti-symétries planes :
→ Plan de symétrie :
(π_s) est plan de symétrie de la distribution de courant (D) si lorsqu'on symétrise (D) par rapport à (π_s) , on obtient une distribution (D') identique à (D) (il suffit en général de travailler avec deux éléments de courant de part et d'autre de (π_s) .
Les éléments de courant de même taille en tous points P et P' symétriques par rapport à (π_s) sont symétriques par rapport à (π_s) . $\vec{j}(P') = sym_{\pi_s} \vec{j}(P)$
Le vecteur densité de courant $\vec{j}(P_S)$ en un point Ps ∈(π_s) est inclus dans Πs.



→ Plan d'antisymétrie :
(π_a) est plan de d'anti-symétrie de la distribution de courant (D) si lorsqu'on symétrise (D) par rapport à (π_a) , on obtient une distribution (D') qui est l'opposée (D) (il suffit en général de travailler avec deux éléments de courant de part et d'autre de (π_a) .
Les éléments de courant de même taille en tous points P et P' symétriques par rapport à (π_a) sont anti-symétriques $\vec{j}(P') = -sym_{\pi_a} \vec{j}(P)$
Le vecteur densité de courant $\vec{j}(P_a)$ en un point Pa ∈(π_a) est orthogonal à(π_a) .



II- Symétries et invariances du champ magnétostatique :

Les courants sont les sources de champ magnétique . Les propriétés des distributions de courant influent sur la géométrie du champ magnétique qu'elles génèrent .

1- Invariances :

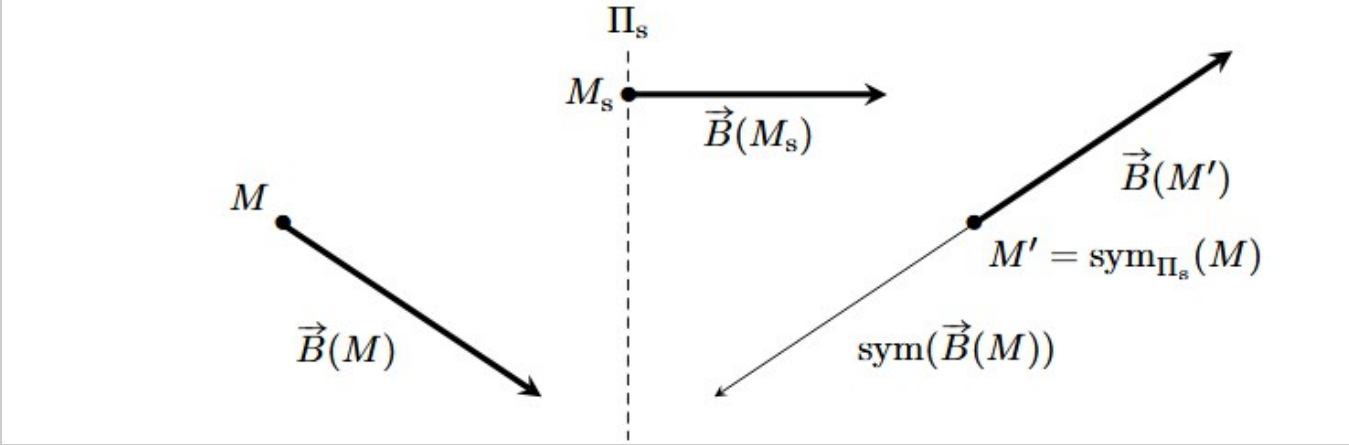
$\vec{B}$ vérifie le principe de Curie : même invariance que les sources .

Si (D) est invariante par translation selon (zz') alors $\|\vec{B}\|$ ne dépend pas de z .

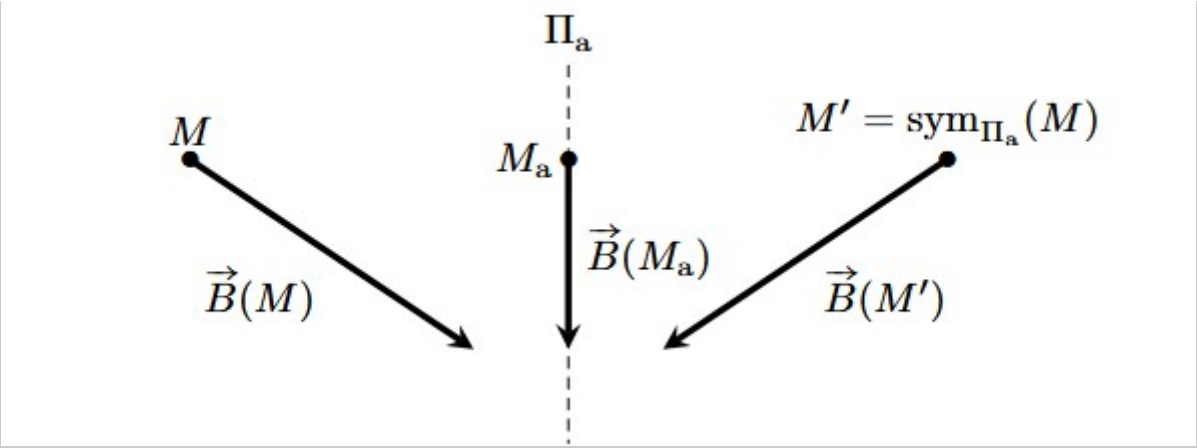
si (D) est invariante par toute rotation d'angle θ alors $\|\vec{B}\|$ est indépendant de θ .

2- Symétries :

- Si (π_s) est un plan de symétrie de la distribution (D) passant par M alors $\vec{B}(M)$ est orthogonal à (π_s) .
- Si M et M' sont deux points symétriques par rapport à un plan (π_s) de symétrie alors $\vec{B}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à (π) .



- Si (π_a) est un plan de d'anti-symétrie de la distribution (D) passant par M alors $\vec{B}(M)$ appartient à (π_a) .
- Si M et M' sont deux points symétriques par rapport à un plan (π_a) de d'anti-symétrie alors $\vec{B}(M')$ est le symétrique de $\vec{B}(M)$ par rapport à (π_a) .



Le champ magnétique créé par une distribution volumique de courant est continu .

Exercice cours 2 :
On considère un conducteur cylindrique d'axe (Oz), de rayon R , infini dans la direction z . Ce conducteur est parcouru par des courants axiaux uniformément repartis en volume avec une densité $\vec{j} = j_0 \vec{u}_z$ ***.***
Déterminer la géométrie du champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de courants .

III- Propriétés du flux et de la circulation du champ magnétostatique :

1- Ligne de champ – Tube de champ :

Lignes de champ:lignes qui en chacun de leur point sont tangentes au vecteur champ en ce point .

Tube de champ : ensemble de lignes de champs'appuyant sur un contour fermé .

2- Conservation du flux de $\vec{B}$:

Le flux du champ magnétostatique sortant de toute surface fermée (S) est nul .

Quelle que soit la surface fermée (S) :

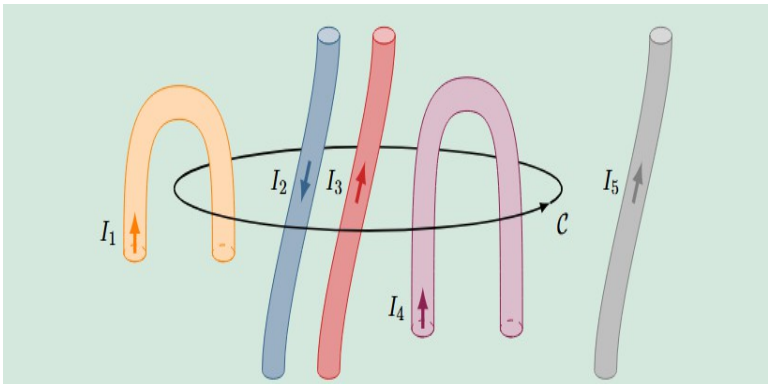
$$\oiint_{(S)} \vec{B}(M).d\vec{S}_M = 0 \quad \leftrightarrow \mathrm{div}(\ \vec{B}(M)\ ) = 0$$

3- Circulation et théorème d'Ampère :

La circulation de $\vec{B}$ le long d'un contour (C) fermé est égale à μ_0 multiplié par l'intensité algébrique du courant traversant (C) (c'est à dire l'intensité traversant une surface (S) s'appuyant sur (C)) appelée intensité enlacée par le contour .

$$\oint_{(C)} \vec{B}(M).d\vec{l}_M = \mu_0 I_{enlacée} \quad \leftrightarrow \quad \vec{rot}(\vec{B}(M)) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

Exemple

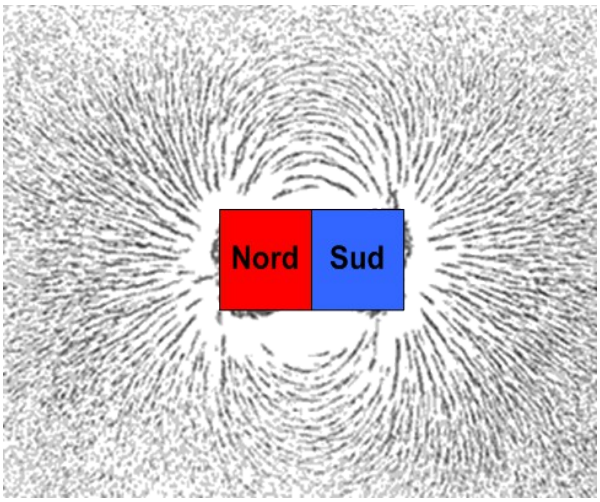


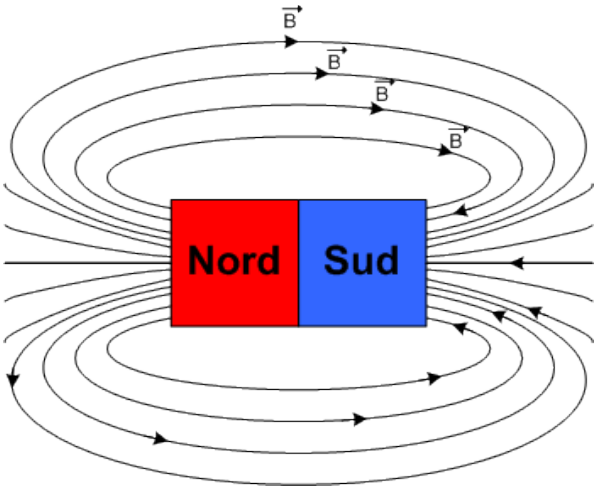
L'expression de l'intensité du courant enlacé par le contour est :

4-Conséquences :

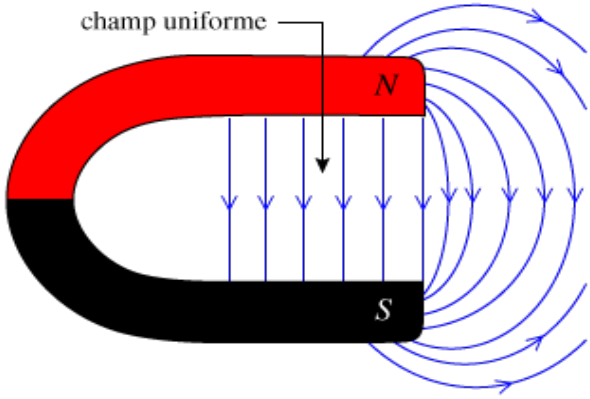
→ Le flux du champ magnétique à travers une surface S s'appuyant sur un contour (C) est indépendant du choix de S , ne dépend que du choix de (C) , on parle de flux à travers le contour (C) .
→ Le flux de $\vec{B}$ est le même à travers toute section d'un tube de champ .
→ Les lignes de champ $\vec{B}$ (contrairement à celle du champ électrostatique) sont fermées et entourent les sources (si ce n'était pas le cas elles pourraient converger (ou diverger en un point et dans ce cas en entourant ce point par une surface fermée on obtiendrait un flux non nul) .
→ Dans une région où les lignes de champ se resserrent , l'intensité du champ magnétostatique augmente
→ On admettra que le champ magnétique créé par une distribution volumique de courants est continu .

LIGNES DE CHAMP MAGNETIQUE

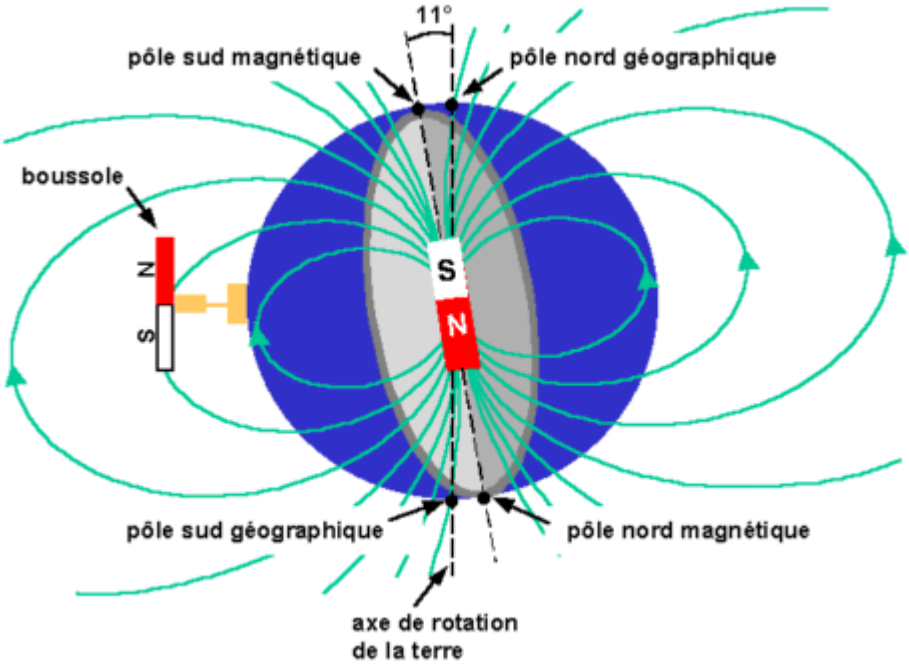




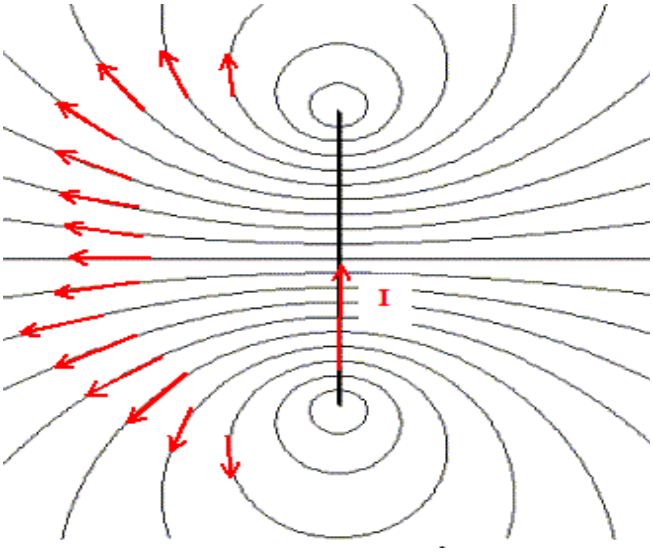
Aimants permanents .

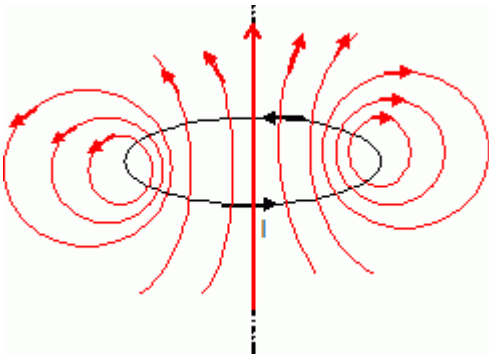


Aimants permanents .

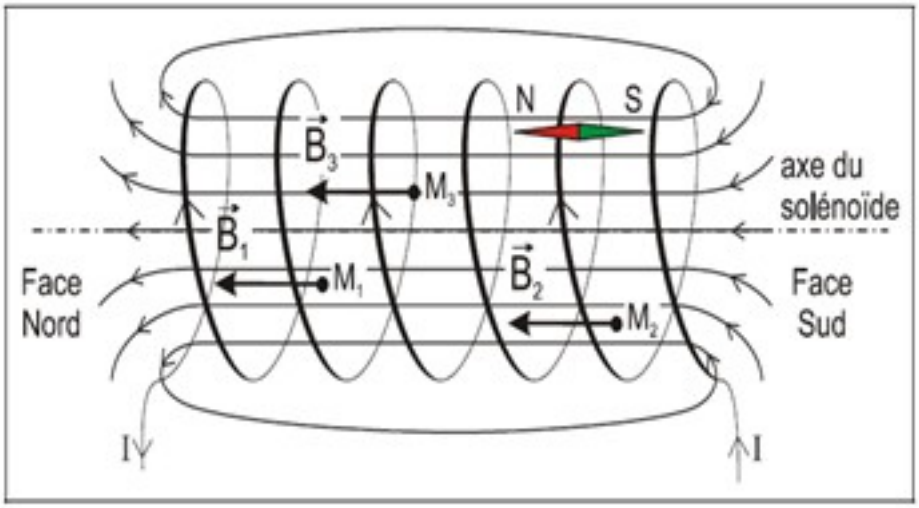


Champ magnétique terrestre .

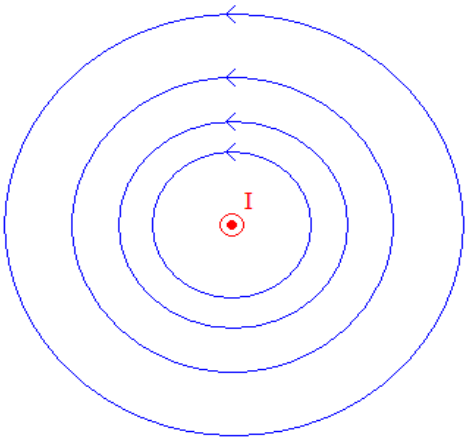




Spire circulaire .



Solénoïde



Fil infini .

IV- Calculs de champs magnétiques produits par des distributions de courant à symétrie forte :

On procède de la manière suivante :

- Choix du système de coordonnées
- Etude des symétries et des invariances .
- Choix d'un contour fermé **orienté** : constitué d'une ligne de champ ou de portions de lignes de champ .
- Application du th d'Ampère en distinguant les différents domaines d'étude .

Exercice cours 3 :

On considère un fil infini , confondu avec l'axe (Oz) , parcouru par un courant d'intensité I . Déterminer l'expression du champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de courants .

Exercice cours 4 :

On considère un conducteur cylindrique d'axe (Oz), de rayon R , infini dans la direction z . Ce conducteur est parcouru par des courants axiaux uniformément repartis en volume avec une densité $\vec{j} = j_0 \vec{u}_z$.

1- Déterminer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de courants à l'aide du théorème d'Ampère .

2- Retrouvez l'expression du champ à l'aide de l'équation locale .

3- Que peut-on dire du champ magnétique créé à l'extérieur du conducteur .

Donnée : en coordonnées cylindriques :

$$\vec{rot}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z$$

Exercice cours 5 :

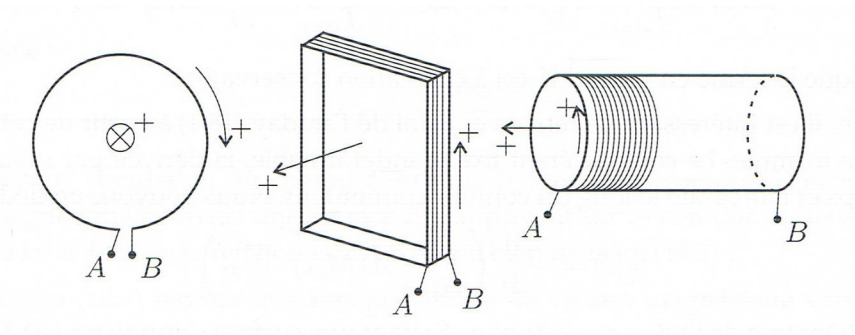
On considère un solénoïde de rayon R, d'axe (Oz), de longueur H >> R , comportant N spires jointives . Il est parcouru par un courant d'intensité I .

Déterminer le champ magnétostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution de courants .

V- Inductance propre – Energie magnétique :

1- Inductance propre :

Flux à travers une bobine :



Le flux d'un champ magnétique à travers une bobine est égal à la somme des flux à travers chaque spire de la bobine .

Flux propre :

Soit un circuit Γ , fixe et indéformable , parcouru par un courant d'intensité I . Ce circuit crée un champ magnétique $\vec{B}_P$ (champ magnétique propre) .

Le flux du champ magnétique propre à travers le circuit Γ est appelé flux propre $\Phi_P = \int\int_{circuit} \vec{B}_P . \vec{dS}$.

$[\Phi_P] = Wb$ Weber

Le champ magnétique propre étant proportionnel à I , Φ_P est proportionnel à I :

$\boxed{\Phi_P = L\,I}$, L inductance propre (ou self inductance ou auto-inductance) .

Propriétés :

- L > 0 , [L] = H (Henry) homogène à μo * longueur
- L ne dépend que de la géométrie du circuit . Si le circuit comporte N spires , L est proportionnelle à N² .

Exercice cours 6 :

Déterminer l'inductance propre d'un solénoïde de rayon R, d'axe (Oz), de longueur H >> R , comportant N spires jointives et parcouru par un courant d'intensité I .

2- Energie magnétique :

Vu en électrocinétique : l'énergie magnétique stockée dans une bobine d'inductance propre L parcourue par un courant d'intensité I vaut : $W_m = \frac{1}{2} L\,I^2$.

Cas du solénoïde de longueur H >> R :

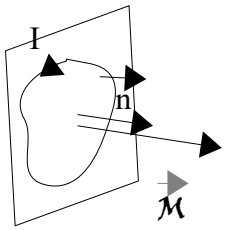
Généralisation :
On peut associer à un champ magnétique, une densité volumique d'énergie (grandeur locale)
$w_m(M)=\frac{\|\vec{B}(M)\|^2}{2\mu_0}$ exprimée en $J.m^{-3}$ telle que l'énergie stockée dans un volume (V) où règne le champ $\vec{B}(M)$ s'écrit $W_m=\iiint_{(V)} w_m(M,t)\,dV=\iiint_{(V)}\frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}\,dV$.

Remarque : on peut passer par le calcul de l'énergie magnétique pour déterminer l'inductance propre d'un conducteur notamment quand celui-ci n'est pas filiforme .

VI- Dipôle magnétique :

1– Moments magnétiques :

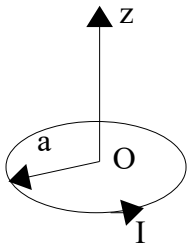
→ Boucle de courant :



Pour un circuit filiforme plan parcouru par un courant d'intensité I .

$\vec{M}=I\,S\,\vec{n}$ $[\|\vec{M}\|]=A.m^2$

Exemple : spire circulaire de rayon a d'axe (Oz) .



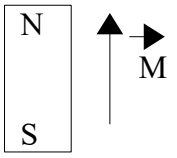
$\vec{M}$ =

→ Enroulement constitué de N spires :
Le moment magnétique total est la somme des moments magnétiques de chaque spire .
Pour une bobine comportant N spires identiques de surface S de normale $\vec{n}$

$\vec{M}=N\,I\,S\,\vec{n}$

La notion de moment magnétique peut s'étendre au cas des aimants permanents .

→ Aimants permanents :
Certains matériaux, dits ferromagnétiques, permettant de créer des aimants permanents . Au niveau microscopique, ils sont constitués de petits dipôles magnétiques alignés (moments magnétiques atomiques) . Les aimants puissants sont constitués d'alliages entre matériaux ferromagnétiques (Fe, Co, Ni) et de terres rares (Néodyne par exemple) .
Un aimant peut donc être modélisé par un moment magnétique :



→ Les atomes et les particules élémentaires possèdent également un moment magnétique .

Ordres de grandeurs :

→ Atome :

Ordre de grandeur : magnéton de Bohr $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9{,}3 .10^{-24}\ A\,m^2 \approx 10^{-23}\ A.m^2$

→ Aimant :

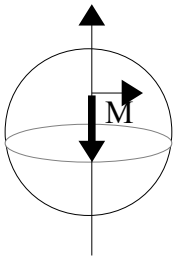
$n \approx 10^{29}\ atomes.m^{-3}$

Le moment magnétique volumique maximum $M_{max} = n\,\mu_B \approx 10^6\ A.m^{-1}$

Pour une aiguille de boussole $M \approx 1\ A.m^2$

→ Terre :

Le moment magnétique de la terre est dû à des mouvements convectifs internes



Pôle Nord terrestre = pôle Sud de l'aimant

$M_T \approx 8.10^{22}\ A.m^2$

2- Champ créé par un dipôle magnétique :

Approximation dipolaire :

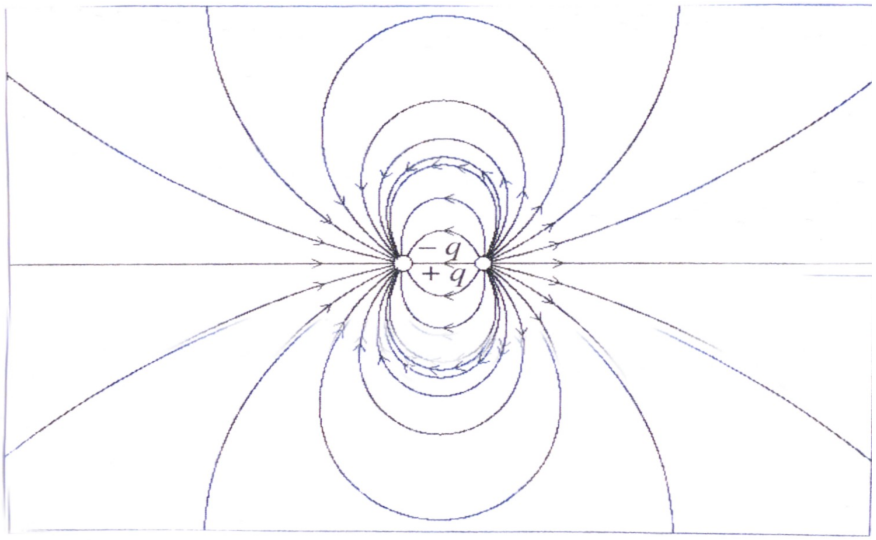
Un dipôle magnétique est une distribution de courant (ou un aimant permanent) de moment magnétique $\vec{M}$ non nul dont la taille caractéristique a est infiniment petite devant les autres dimensions du problème .

Dipôle actif : on étudie le champ créé à grande distance .

Dipôle passif : étude de l'action d'un champ magnétique extérieur dont la distance caractéristique de variation est grande devant a .

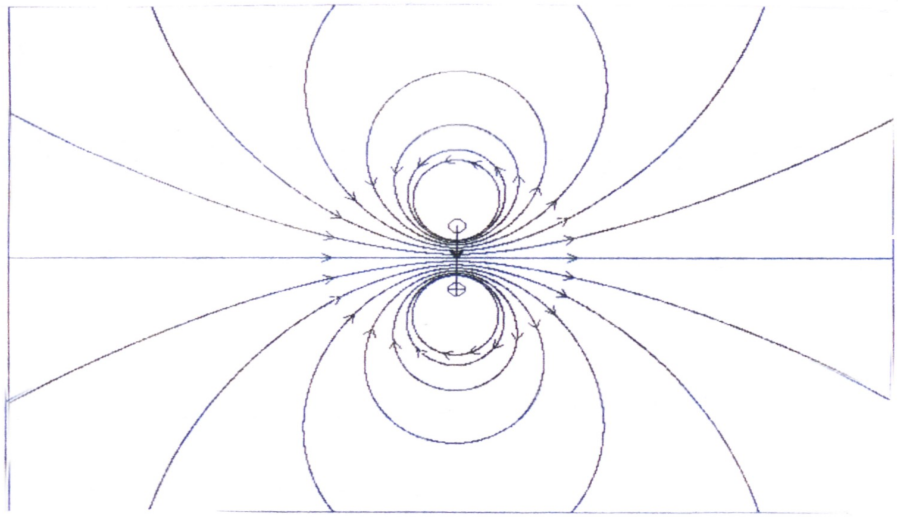
Champ magnétique créé à grande distance par un dipôle magnétique :

Cf cartographie des lignes de champ créées par un dipôle électrostatique et un dipôle magnétique



Dipôle électrostatique

$\vec{p}$



Dipôle magnétique

$\vec{m}$

→ Loin des sources les cartographies sont identiques, le champ magnétique créée à grande distance a même topologie que le champ électrostatique créé à grande distance par un dipôle électrostatique .
Par analogie, on peut déterminer l'expression du champ magnétique créé à grande distance .

Remarque:Près des sources les lignes de champ des dipôles électrostatique et magnétique sont très différentes .
Pour le dipôle électrostatique : les lignes de champ sont ouvertes partent de la charge positive pour converger vers la charge négative .
Pour le dipôle magnétique, les lignes de champ sont fermées et entourent les sources .

3- Action d'un champ magnétique extérieur :

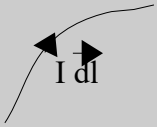
Force de Laplace :

Un conducteur parcouru par un courant d'intensité I et plongé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$ subit des actions mécaniques appelées actions mécaniques de Laplace .

Au niveau microscopique, les porteurs de charges subissent la composante magnétique de la force de Lorentz $q\vec{v}\wedge\vec{B}_e$; les interactions entre les porteurs de charges et le milieu conducteur entraînent un transfert de quantité de mouvement à l'ensemble du conducteur .

Un élément $I\,\vec{dl}$ subit une force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{F}=I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}_e$$



La résultante des forces de Laplace s'exerçant sur un circuit (C) :

$$\vec{F}=\int_{(C)} I\,\vec{dl}\wedge\vec{B}_e$$

Actions d'un champ uniforme :

→ Résultante :

→ Moment :

Généralisation :

Plongé dans un champ magnétique $\vec{B}_e$ uniforme, un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ est soumis à un couple de moment $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_e}$.

On admet que ces actions mécaniques sont associées à une énergie potentielle : $\boxed{E_P = -\vec{M} . \vec{B}_e}$

Champ non uniforme :

La résultante est non nulle $\boxed{\vec{F} = (\vec{M} . \vec{grad}) \vec{B}_e}$

Au premier ordre le moment calculé en un point A est indépendant de A $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_e}$ et $\boxed{E_P = -\vec{M} . \vec{B}_e}$

Effet des actions mécaniques :

Plongé dans un champ extérieur $\vec{B}_e$, un dipôle libre tend à minimiser son énergie potentielle (tend à chercher à atteindre une position d'équilibre stable) .

$\vec{M}$ tend à s'aligner dans le sens de $\vec{B}_e$. Si le champ extérieur n'est pas uniforme, la résultante $\vec{F}$ tend à attirer le dipôle dans la zone où le champ est le plus intense .