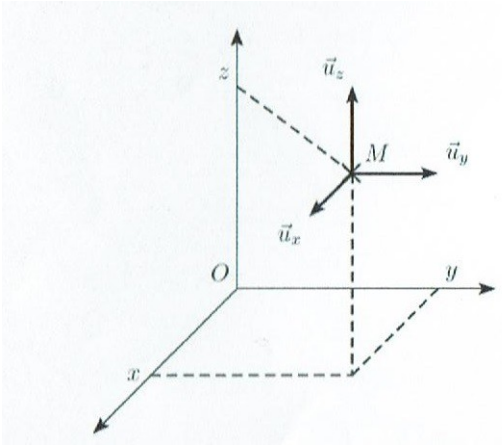
# ELECTROSTATIQUE .

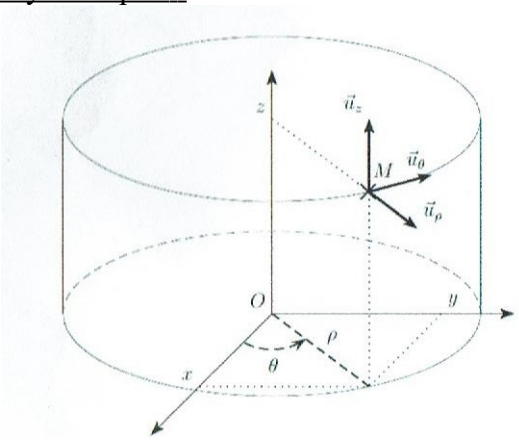
Rappels :coordonnées, éléments de surface et de volume .

Coordonnées cartésiennes :



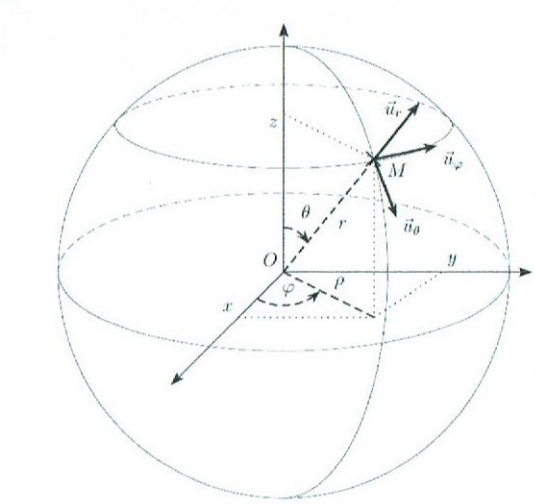

- ⋆ **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$
- ⋆ **Déplacement élémentaire :** $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$
- ⋆ **Surfaces élémentaires :** $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}S = \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}z$
- ⋆ **Volume élémentaire :** $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$

Coordonnées cylindriques :




- ⋆ **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$
- ⋆ **Déplacement élémentaire :** $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$
- ⋆ **Surfaces élémentaires :** $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times \mathrm{d}z$
- ⋆ **Volume élémentaire :** $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times \mathrm{d}z$

Coordonnées sphériques :




- ⋆ **Vecteur position :** $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$
- ⋆ **Déplacement élémentaire :** $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\,\overrightarrow{u_\varphi}$
- ⋆ **Surfaces élémentaires :** $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$ et $\mathrm{d}S = \mathrm{d}r \times r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$
- ⋆ **Volume élémentaire :** $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}r \times r\mathrm{d}\theta \times r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$

Objet de l'électrostatique :
L'électrostatique est la partie de l'électromagnétisme qui étudie les charges électriques à l'état statique et les interactions qu'elles exercent entre elles.
L'interaction électromagnétique est une des **quatre interactions fondamentales** : ces interactions régissent à elles seules tous les phénomènes physiques de l'univers.

Les trois autres interactions connues sont la gravitation (qui se manifeste surtout avec les corps très massiques), l'interaction forte (celle qui assure la cohésion des noyaux des atomes) et l'interaction faible (qui permet notamment les réactions nucléaires).

| | **Interaction faible** | **Interaction forte** | **Interaction électromagnétique** | **Interaction gravitationnelle** |
|---|---|---|---|---|
| **Echelle d'action** | $10^{-18}$ m | $10^{-15}$ m | $10^{-15}$ m à $10^{0}$m | de $10^{0}$ m à $10^{26}$ m |
| **Portée** | Très courte | Courte | Infinie | Infinie |
| **Rôle** | Radioactivité | Cohésion du noyau | Cohésion de l'atome | Cohésion des galaxies |

## I Notion de charges et distributions de charges :

### I-1 Notion de charge électrique :

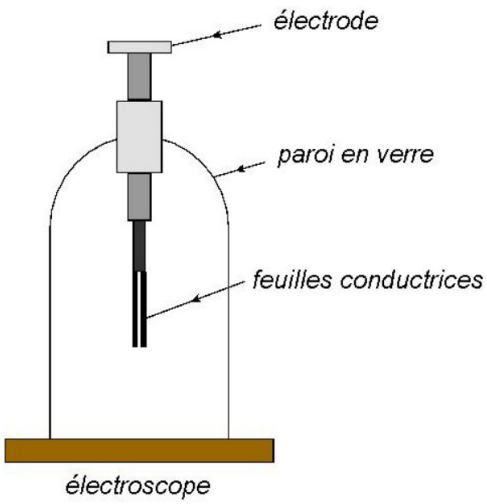
a- Approche expérimentale :
Dès le XVIIIème siècle des expériences d'électrisation ont permis de montrer que certains matériaux (verre, plexiglas. . .), possèdent lorsqu'ils ont été frottés avec d'autres matériaux, la propriété d'attirer des corps légers (corps électrisé).
La matière est constitué d'atomes constitué de Z protons de charge $+e = 1{,}9.10^{-19}$ C ,N neutrons de charge nulle et Z électrons de charge -e.
Le frottement produit un déséquilibre entre la charge des noyaux et la charge des électrons :
* Le matériau frotté acquiert une charge positive lorsque des électrons sont arrachés. C'est par exemple le cas du plexiglas lorsqu'on le frotte avec un mouchoir en papier ou du verre lorsqu'il est frotté avec de la laine.
* Le matériau frotté acquiert une charge négative lorsque des électrons sont captés (ébonite avec de la peau de chat).
Une fois que ces corps sont électrisés, ils peuvent attirer des corps légers en modifiant la répartition de charges à l'intérieur de ces corps (électrisation par influence).

Les interactions observables conduisent à distinguer deux types d'électrisation : deux objets semblablement électrisés se repoussent et s'attirent dans le cas contraire.
L'étude quantitative fut réalisé par Coulomb en 1785 et attribua à un état d'électrisation un paramètre q appelée charge électrique (grandeur scalaire extensive et algébrique).

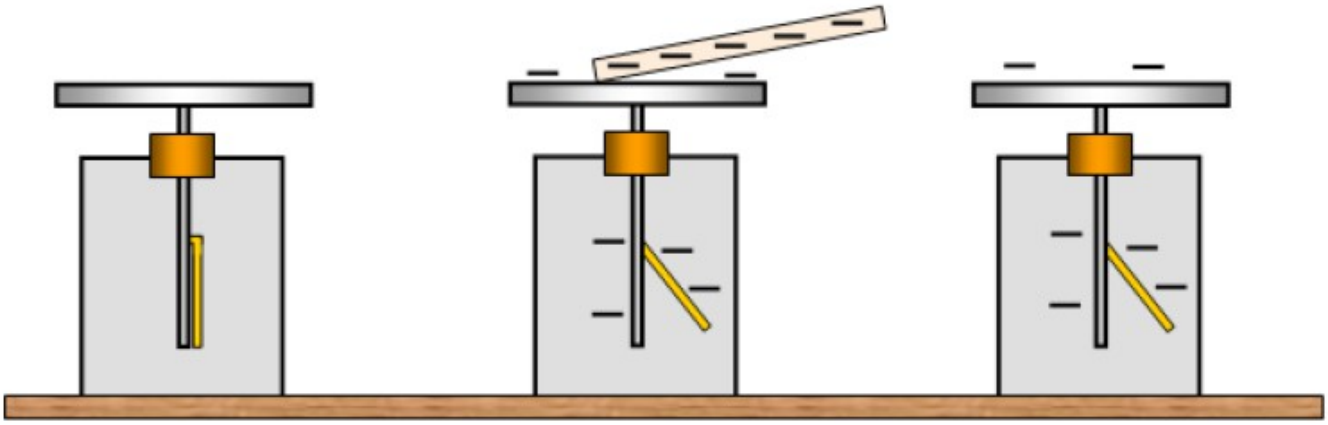
b- Propriétés de la charge :
* La charge q s'exprime en coulomb C .
* Au niveau microscopique , la charge est quantifiée, elle peut se mettre sous la forme : $q = \pm ne$ où n est un entier. $e = 1{,}6.10^{-19}$ C
* La charge se conserve : la charge totale d'un système isolé (absence de contact) reste constante au cours du temps.
* La charge totale d'un système est une grandeur indépendante du référentiel .

c- L'électroscope :
Un **électroscope** est un appareil constitué d'une électrode ayant la forme d'un plateau, relié par un conducteur à deux fines feuilles métalliques en or, aluminium … Ces feuilles sont isolées du milieu environnant en étant placées sous une cloche en verre. Son seul contact est le contact électrique avec l'électrode. Au repos, les feuilles sont verticales et proches l'une de l'autre.



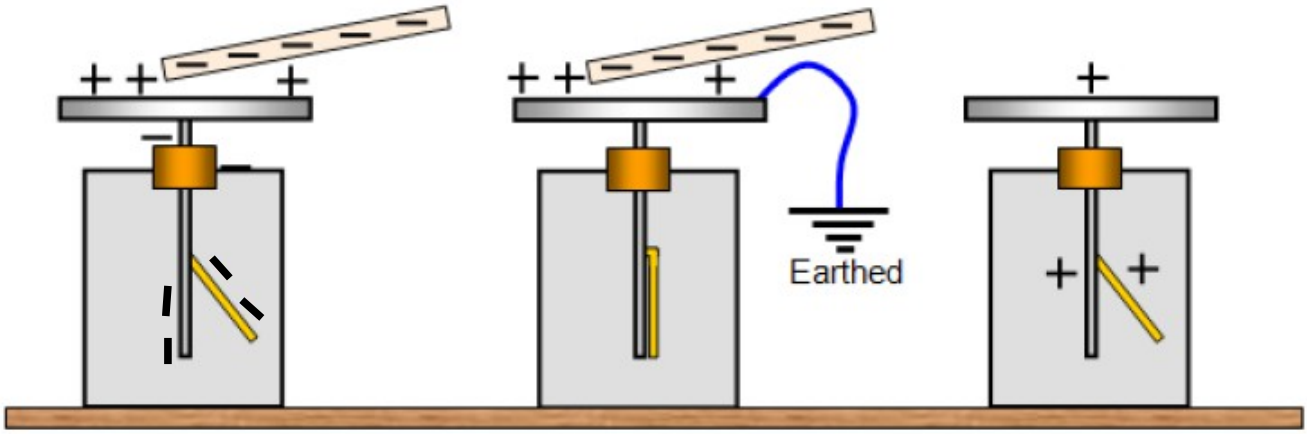



Les feuilles de l'électroscope peuvent être chargées par contact ou par influence .
→ Charge par contact :



Si on touche le plateau de l'électroscope avec une tige chargée négativement, on charge négativement l'électroscope, les feuilles se repoussent . Lrsqu'on éloigne la tige, l'électroscope reste chargé .
Pour décharger l'appareil, il suffit de toucher le plateau l'appareil, la charge est transférée à la terre .

→ Charge par influence :




Si on approche maintenant d'un électroscope, initialement non chargé, une tige chargée négativement, les électrons du plateau sont repoussés vars les feuilles qui se repoussent . Si on éloigne la tige, l'effet disparaît car l'électroscope reste globalement neutre .
Si on refait l'expérience en touchant avec le doigt le plateau, les électrons du plateau sont cette fois ci repoussés vers la terre, l'électroscope se retrouve chargé positivement et garde sa charge lorsqu'on éloigne

la tige , il y a eu charge par influence électrostatique .

**I-2 Distributions de charges :**

a- Distribution discrète de charges :

Si un corps chargé a des dimensions petites par rapport à la distance d'observation , alors il peut être assimilé à une charge macroscopique ponctuelle . Ex particules cahrgées élémentaires : électrons, protons...

Une distribution discrète de charges est un ensemble de charges ponctuelles .

b- Distributions continues de charges :

La notion de charge électrique ne s'applique qu'à des particules ponctuelles (extension spatiale de l'ordre de $10^{-15}$ m). L'observation de la matière se faisant à plus grande échelle on va donc comme en thermodynamique s'intéresser à des grandeurs moyennes.

Il convient donc de choisir une échelle adaptée :

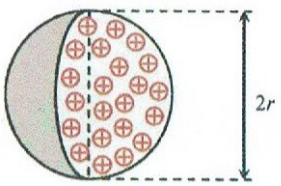
* échelle microscopique : Échelle atomique caractérisé par une distance caractéristique d $\approx 10^{-10}$ m. La matière est alors discontinue.

* échelle macroscopique : La matière est observée à l'échelle humaine caractérisé par une distance D $\approx 10^{-3}$m . La description de la matière est alors trop imprécise. Par exemple, un millimètre cube de dioxygène dans les conditions normales de température et de pression contient $8{,}6.10^{17}$ charges élémentaires.

* échelle mésoscopique : l'échelle mésoscopique est intermédiaire (grandeur caractéristique $\ell$ telle que d << $\ell$<< D). Un petit volume d$\tau$ à cette échelle est assez grand pour contenir un très grand nombre de charges ( moyenne des comportements microscopiques ) et qu'on puisse considérer le milieu comme continu et assez petit pour considérer que la matière est décrite précisément par une densité locale de charges ( le nombre de charges étant très grand, la quantification de la charge n'est plus détectable ) .

c- Distribution volumique de charges :

Les charges sont réparties de manière continue dans un volume macroscopique V .



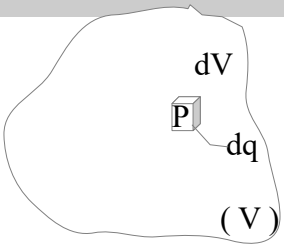

Sphère uniformément chargée en volume .

On appelle **densité volumique de charges en un point P** du volume $\rho(P)$ la grandeur telle que la charge dq contenue dans le volume dV soit donnée par : $\boxed{dq=\rho(P)dV}$

$\boxed{\rho(P)}$ **s'exprime en Cm $^{-3}$**

La **charge totale contenue dans le volume V** est égale à la somme des charges :

$$\boxed{Q=\iiint_V dq=\iiint_V \rho(P)dV}$$




Rem 1 :

Seules les distributions volumiques correspondent à la réalité physique , les autres distributions vues ci-dessous correspondent à une modélisation .

Rem 2 :

Si ρ est uniforme dans tout le volume V , alors $\boxed{Q=\iiint_V \rho(P)\,dV=\rho\iiint_V dV=\rho V}$

---

***Exercice cours 1 :***

***1- Déterminer la charge totale contenue dans un cylindre ( hauteur H et rayon R ) uniformément chargé en volume avec la densité volumique de charge $\rho_0$ .Faire de même pour une boule de rayon R uniformément chargée en volume .***

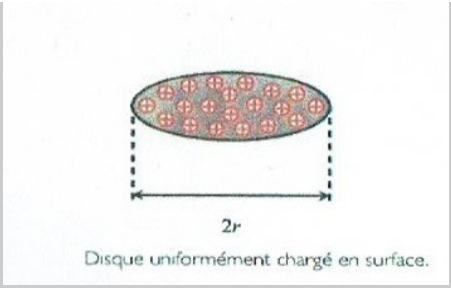
***2- Déterminer la charge totale contenue dans une boule de rayon R de densité volumique de charge*** $\rho(r)=\frac{a}{r^2}$ ***( symétrie sphérique ) , où a est une constante .***

---

d- Distribution surfacique de charges :

Lorsqu'une des trois dimensions est très faible devant les deux autres , on l'assimile à une surface chargée caractérisées par une **densité surfacique de charge au point P** $\sigma(P)$ telle que la charge dq portée par la surface dS soit donnée par : $\boxed{dq=\sigma(P)\,dS}$

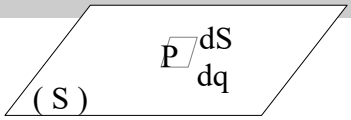
$\boxed{\sigma(P)}$ **s'exprime en Cm $^{-2}$**



Disque uniformément chargé en surface.

La charge totale portée par la surface S est égale à la somme des charges :

$$\boxed{Q=\iint_S dq=\iint_S \sigma(P)\,dS}$$

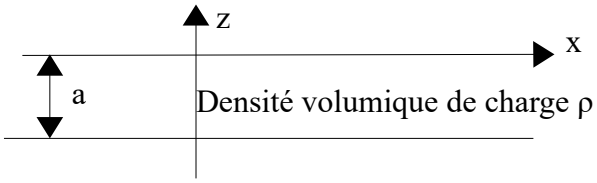



Rem 1 :

Si σ est uniforme dans tout le volume V , alors $\boxed{Q=\iint_S \sigma(P)\,dS=\sigma\iint_S dS=\sigma S}$

Rem 2 :

Modélisation d'une répartition volumique par une répartition surfacique .




Si l'épaisseur a est faible , on peut modéliser la distribution par une distribution surfacique de charges telle que une surface dS découpée sur les deux ditributions portent la même charge .

dQ = ρadS = σdS d'où σ = ρa .

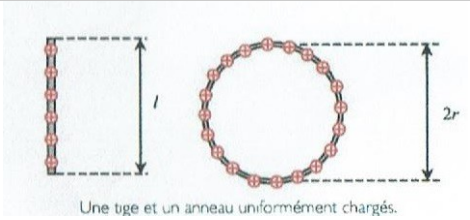
***Exercice cours 2 :***

***Déterminer la charge totale portée par la surface latérale d'un cylindre ( hauteur H et rayon R ) lorsque que celle-ci est uniformément chargée avec la densité surfacique de charge uniforme $\sigma_0$ Faire de même pour une sphère uniformément chargée en surface .***

e- Distribution linéique de charges :

Lorsque les charges sont réparties dans des tubes de faibles dimensions transversales , on assimile la distribution à une ligne chargée caractérisée par **une densité linéique de charge** au point P $\lambda(P)$ telle que la charge dq contenue sur une longueur dl soit donnée par : $\boxed{dq=\lambda(P)\,dl}$

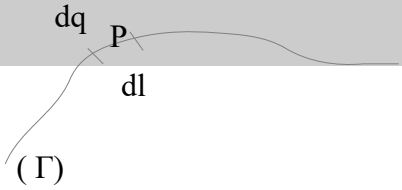
$\boxed{\lambda(P)}$ **s'exprime en Cm $^{-1}$**



Une tige et un anneau uniformément chargés.

La charge totale portée par la courbe Γ est égale à la somme des charges :

$$\boxed{Q=\int_{\Gamma} dq=\int_{\Gamma}\lambda(P)\,dl}$$




Rem :

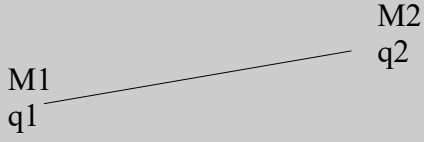
Si λ est uniforme dans toute la ligne Γ , alors $\boxed{Q=\int_{\Gamma}\lambda(P)\,dl=\lambda\int_{\Gamma} dl=\lambda\, l}$

## II Loi de Coulomb . Champ électrostatique :

### II-1Loi de Coulomb :

* Lorsque deux charges ponctuelles sont placées dans le vide , elles sont en interaction électrostatique réciproque selon la loi de Coulomb .

$$\boxed{\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}=\frac{q_1 q_2 \vec{M_1 M_2}}{4\pi\epsilon o\, M_1 M_2^3}}$$




$\epsilon o=\frac{1}{36\pi\,10^9}F.m^{-1}$ permittivité ( diélectrique ) du vide

Rem : à l'échelle atomique les forces d'interaction gravitationnelle peuvent être négligées devant les forces d'interaction électrostatique .( ex pour un électron m = 9,1 .10$^{-31}$ kg e = 1,6.10 $^{-19}$ C )

$\frac{F_e}{F_G}=4{,}2.10^{42}$ interactions entre deux électrons .

Force créée par un ensemble de N charges ponctuelles :

La force créée en un point M sur une charge q par un ensemble de charges qi placées en Mi

$$\vec{F}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i \vec{M_i M}}{M_i M^3}$$ principe de superposition

## II-2 Champ électrostatique :

a- Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle :

Pour caractériser l'effet du champ électrique au point $M_2$ , même en l'absence de charge on introduit le champ électrostatique créé en $M_2$ par la particule $q_1$ .

$$\vec{F}_{12}=q_2 E_1(\vec{M}_2)$$

$$E_1(\vec{M}_2)=\frac{q_1 \vec{M_1 M_2}}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2^3}$$

De manière générale un particule de charge q placée au point P créée au point M un champ électrostatique :

$$E(\vec{M})=\frac{q\vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3}$$ [E]=V.m$^{-1}$

Les lignes de champ ( tangentes en chacun de leur point au vecteur champ en ce point et orientées dans le sens du champ ) sont des droites qui divergent depuis les charges positives et convergent vers les charges négatives, les lignes de champ sont ouvertes .

b- Principe de superposition :

Le champ électrostatique vérifie le principe de superposition , champ créé en M par un ensemble de charges ponctuelles = somme des champs créés par chacune des charges .

$$E(\vec{M})=\sum E_i(\vec{M})=\sum_i \frac{q_i \vec{P_i M}}{4\pi\epsilon_0 P_i M^3}$$

Les lignes de champ du champ électrostatique sont ouvertes et orientées dans le sens du champ ; elles convergent vers les charges négatives et divergent à partir des charges positives .
Deux lignes de champ ne peuvent se croiser qu'en un point où le champ est nul ou en un point où il existe une charge ponctuelle .

c- Ordres de grandeurs :

Intensité du champ électrostatique créé par un électron : à $10^{-10}\,m$ : $1{,}4.10^{11}\,V.m^{-1}$
à 1 mm : $10^{-3}\,V.m^{-1}$
Grille pain : $40\,V.m^{-1}$
Ligne 400000V $200\,V.m^{-1}$ à 100 m
Valeurs limites : WIFI ( 2400 MHz ) $61\,V.m^{-1}$ antenne GSM ( 900 à 1800 MHz) 50V.m$^{-1}$
Champ électrique sol base des nuage en cas d'orage peut atteindre $20000\,V.m^{-1}$ .

## II-3 Symétries du champ électrostatique :

**On admet que le champ électrostatique vérifie le principe de Curie : un champ électrostatique possède les propriétés d'invariance et de symétrie de la distribution de charges qui le crée .**

a- Invariances :

**Si une distribution est invariante par translation selon un axe alors le champ qu'elle crée également .**
**Une distribution de charges est invariante par translation si on retrouve la même distribution après avoir effectué la translation et si un point de l'espace voit les mêmes charges à la même distance .**
Cela suppose une distribution infinie : (fil infini, nappe infinie …). Si la distribution est invariante par translation suivant $\vec{u}_z$ alors ρ(P) ne dépend pas de z et le champ électrostatique qu'elle crée également .

Remarque : En pratique toutes les distributions son finies mais lorsque la distance d'un point considéré à la distribution est faible devant la dimension de la distribution, on considérera que les dimensions de la distribution tendent vers l'infini. Cela permet de simplifier l'analyse des problèmes.

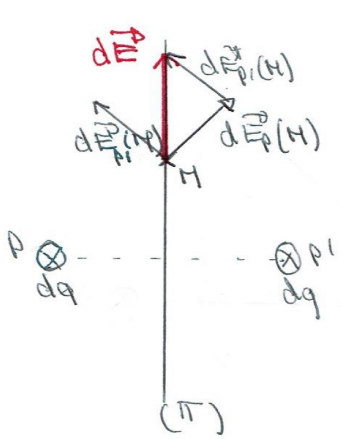
**Si une distribution de invariance par rotation d'angle θ autour d'un axe fixe Δ alors ρ(P) ne dépend pas de θ et le champ électrostatique créé également .**

**Les invariances des distributions de charges impliquent un choix adapté des coordonnées à employer.**

b- Symétries :

**→ Un plan ( π ) est un plan de symétrie d'une distribution de charges si, quels que soient les points P et P' symétriques par rapport à ce plan π : ρ(P) = ρ(P').**
**Si M et M' sont deux points symétriques par rapport à un plan ( π ) de symétrie alors $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques par rapport à ( π ) .**

Considérons deux éléments de charge symétriques par rapport à un plan de symétrie ( π ) , représentons les champs créés en un point M de ( π ) par ces deux champs puis la somme de ces deux champs .



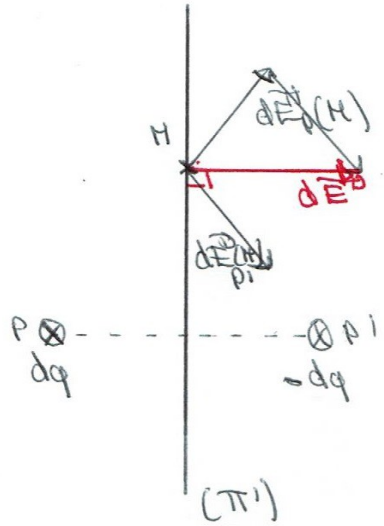

On remarque que le champ résultant appartient au plan ( π ) . Ce résultat se généralise pour le champ créé par l'ensemble de la distribution en un point M d'un plan de symétrie de la distribution de charges .

**Si M est un point contenu dans un plan de symétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan .**

**Si M et M' sont deux points symétriques par rapport à un plan ( π ) de symétrie alors $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques par rapport à ( π ) .**

**→ Un plan ( π ' ) est un plan de d'antisymétrie d'une distribution de charges si, quels que soient les points P et P' symétriques par rapport à ce plan π : ρ(P) = - ρ(P').**
**Si M et M' sont deux points symétriques par rapport à un plan ( π ') de d'antisymétrie alors $\vec{E}(M')$ est l'opposé du symétrique de $\vec{E}(M)$ par rapport à ( π ') .**

Considérons deux points P et P ' symétriques par rapport à un plan de d'antisymétrie ( π ') , représentons les champs créés en un point M de ( π ' ) par les deux éléments de charge situés en P et P ' puis la somme de ces deux champs .




On remarque que le champ résultant est orthogonal au plan ( π ') . Ce résultat se généralise pour le champ créé par l'ensemble de la distribution en un point M d'un plan de d'antisymétrie de la distribution de charges .

**Si M est un point contenu dans un plan de d'antisymétrie des charges alors $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan au point M .**

---

***Exercice cours 3 :***
***Etudier les symétries les invariances et les symétries des distributions de charges suivantes et caractériser le champ électrostatique créé :***
***→ Boule de centre O de rayon R uniformément chargée en volume .***
***→ Cylindre infini d'axe ( Oz ) , de rayon R, uniformément chargé en volume .***
***→ Plan infini uniformément chargé en surface .***

---

## III Circulation du champ électrostatique , notion de potentiel électrostatique :

### III-1- Circulation du champ électrostatique :

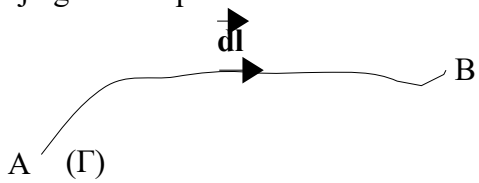
a- Circulation du champ électrostatique :

Pour un déplacement $\vec{dl}$ , on définit la circulation élémentaire du champ électrostatique par :

$$dC = E(\vec{M}).\vec{dl}$$

Sur un trajet fini le long d'une courbe Γ joignant les points A et B :

$$C = \int_{A(\Gamma)}^{B} E(\vec{M}).\vec{dl}$$




b- Circulation conservative :

Soit une charge $q_o$ placée en O . Coordonnées polaires .

On considère la circulation de $\vec{E}$ le long d'une courbe située dans le plan ( O ; **ur** , **uθ** )

$\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$

$$E(\vec{M}) = \frac{q_0 \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$C = \int_{A(\Gamma)}^{B} E(\vec{M}).\vec{dl} = \int_{A(\Gamma)}^{B} \frac{q_o\,dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \left[\frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 r}\right] = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

Ne dépend que de A et B et pas du chemin suivi = circulation est conservative .

Si A = B courbe fermée , la circulation est nulle .

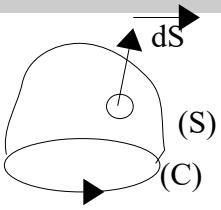
**Résultat généralisable : le champ électrostatique est à circulation conservative .**

$$\oint_{(C)} \vec{E}.\vec{dl} = 0$$ **quelque soit la courbe ( C ) fermée .**

**Cette propriété implique que les lignes de champ d'un champ électrostatique sont ouvertes . Elles divergent depuis les charges positives et convergent vers les charges négatives .**

Equation locale :

D'après le th de Stokes Ampère $\oint_{(C)} E(\vec{M}).\vec{dl} = \int\int_{(S)} r\vec{o}t\,\vec{E}(M).\vec{dS} = 0$ .




Ceci est vrai quelque soit la surface S, on en déduit donc , que localement, le champ électrostatique vérifie $r\vec{o}t(\vec{E}(M)) = \vec{0}$ .

D'où $$pour\ tout\ contour\,(C)\ ferm\acute{e}\ ,\ \oint_{(C)} E(\vec{M}).\vec{dl} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r\vec{o}t\,\vec{E} = \vec{0}$$

### III-2- Potentiel électrostatique :

a- Définition :

La circulation de $\vec{E}$ étant conservative , on est amené à définir une fonction scalaire V(M) appelée potentiel électrostatique exprimée en V telle que :

dC = - dV et $C = V_A - V_B$

Pour la charge ponctuelle placée en O , le potentiel en M $V(M)=\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}+K$ K = cste , on choisit usuellement un potentiel nul à l'infini donc K =0

Pour une charge ponctuelle q placée en P , le potentiel électrostatique créé en M vaut :

$$V(M)=\frac{q}{4\pi\epsilon o PM}$$

Rem : le potentiel électrostatique vérifie le téorème de superposition , le potentiel électrostatique créé par N charges placées en Pi vaut : $V(M)=\sum_{i=1}^{n}(\frac{q_i}{4\pi\epsilon o P_i M})$

b- Lien champ électrostatique – Potentiel électrostatique :

Par définition du gradient $dV=\vec{grad}\,V(M).\vec{dl}$

$dC=E(\vec{M}).\vec{dl}=-dV=-\vec{grad}\,V.\vec{dl}$ d'où $\vec{E}(M)=-\vec{grad}\,V(M)$

**Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérive d'une fonction V(M), appelée potentiel électrostatique telle que $\vec{E}=-\vec{grad}(V(M))$ .**

La différence de potentiel entre 2 points A et B ( tension électrique ) est égale à la circulation du champ électrostatique entre ces deux points : $V(A)-V(B)=\int_A^B -dV=\int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl}$

Remarques :

→ On comprend mieux, avec la définition du potentiel, que l'unité du champ électrostatique est le $V.m^{-1}$ .

→ Le potentiel est **défini à une constante additive près** . Quand la distribution de charges est d'extension finie, on choisira le potentiel nul à l'infini, ce qui fixe cette constante . Quand la distribution est d'extension infinie ( cas d'un modèle idéalisé ) , il ne sera en général pas possible de choisir V nul à l'infini .

→ **Le potentiel est une fonction continue des coordonnées spatiales .**

c- Symétrie , invariances :

→ Symétries : symétries du potentiel associées aux symétries du champ électrostatique .
Vérifie le principe de Curie ( même invariances que les sources ) .
Si M' est le symétrique de M par rapport à un plan π de symétrie de la distribution de charges alors V(M) = V(M') .
Si M' est le symétrique de M par rapport à un plan π* de d'antisymétrie de la distribution de charges alors V(M) = - V(M') le potentiel étant continu alors un plan d'antisymétrie est une équipotentielle nulle si M appartient à π* , V(M) =0 .

→ Carte de champ et potentiel :

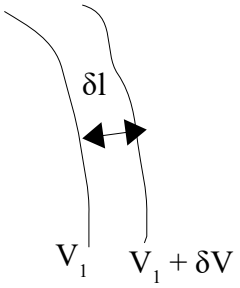
$\vec{E}(M)=-\vec{grad}\,V(M)$ donc $\vec{E}$ est normal aux surfaces équipotentielles et donc les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles .
Le champ électrique est dirigé suivant les potentiels décroissants .

Plus les équipotentielles ( correspondant à des écarts de potentiel toujours identiques d'une surface à la suivante ) sont resserrées plus le champ est intense ( variation importante de V sur une courte distance = forte dérivée donc champ fort ).

•

***Exercice cours 4 :***
***Tracer les lignes de champ et les surfaces équipotentielles relatives à une charge ponctuelle positive puis négative .***

Evaluation du champ à partir d'un réseau d'équipotentielles :
Si deux équipotentielles consécutives de potentiels respectifs $V_1$ et $V_2 = V_1 + \delta V$ où $|\delta V| \ll V_1$ sont distantes de $\delta l$ on peut assimiler la petite variation du potentiel à sa différentielle et écrire $E\,\delta l = -\delta V$ .




## IV- Energie potentielle d'une charge plongée dans un champ électrostatique extérieur :

Soit une distribution de charges créant en M un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ dérivant du potentiel V(M) .
Soit une particule de charge q placée en M , celle-ci subit de la part du champ électrostatique une force $\vec{F} = q\,\vec{E}(M) = -q\,\vec{grad}\,V(M)$ .

Si on déplace légèrement cette charge de $\vec{dl}$ , le travail de la force électrostatique est :
$\delta W = \vec{F}.\vec{dl} = q\,\vec{E}(M).\vec{dl} = -q\,\vec{grad}\,V.\vec{dl} = -q\,dV$

Sur un trajet AB fini on a : $W_{AB} = q(V_A - V_B)$ ce travail est indépendant du chemin suivi , la force électrostatique est donc conservative et on peut donc définir l'énergie potentielle de la particule q dans le champ extérieur $\vec{E}(M)$ , $\delta W = -dE_P$, d'où $E_p = q\,V(M)$ .

**L'énergie potentielle** d'une charge ponctuelle q soumise à la force exercée par un champ électrostatique extérieur $\vec{E}(M) = -\vec{grad}(V(M))$ est égale à $E_p = q\,V(M)$ .

## V- Dipôle électrostatique :

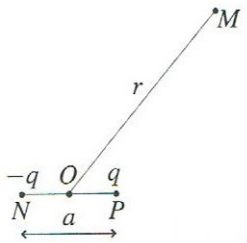
L'étude du dipôle électrostatique revêt une grande importance notamment en chimie . Ce modèle permet d'expliquer les interactions de type électrostatiques, qui existent à l'échelle microscopique .

Dans nous nous intéresserons au dipôle électrostatique sous deux aspects : le dipôle actif en étudiant le potentiel et le champ créés à grande distance par celui-ci et le dipôle passif en étudiant les actions subies par celui-ci lorsqu'il est plongé dans un champ extérieur .

### 1- Définition – Modèle du dipôle :

a- Définition :

**On appelle dipôle électrostatique le système constitué de deux charges ponctuelles opposées -q et +q situées en deux points distincts N et P distants de a et telles que a = NP soit très petite devant les autres distances envisagées .**




Remarque :
Plus généralement, le dipôle électrostatique constitue un modèle simple de distributions de charges de charge totale nulle mais dont les barycentres des charges positives et négatives ne sont pas confondus ( ex molécules polaires comme $H_2O$ ) . Dans ce cas le point N est le barycentre des charges négatives et P le barycentre des charges positives .

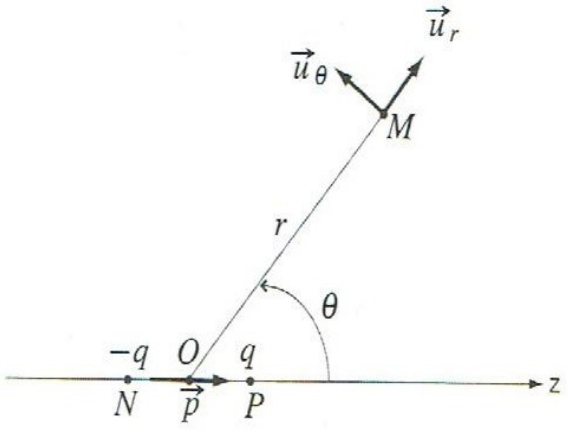
b- Moment dipolaire :

**On définit le moment dipolaire de la distribution par :** $\vec{p}=q\,\vec{NP}$

Le vecteur moment dipolaire est dirigé de la charge négative vers la charge positive .
Le module du moment dipolaire **p = qa s'exprime en C.m .**
A l'échelle d'une molécule, q est de l'ordre de grandeur de la charge élémentaire et a de la taille d'un atome . L'ordre de grandeur des moments dipolaires moléculaire est donc de $10^{-29}$ C. m . On préfère souvent les donner en debye, symbole D, de valeur 1D = $3{,}336.10^{-30}$ C.m .

**2- Potentiel et champ créés à grande distance :**

a-- Symétries et invariances :
On travaille en coordonnées sphériques d'axe celui du dipôle appelé axe ( Oz ) .
La distribution de charges est invariante par rotation autour de l'axe du dipôle, donc le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ et le potentiel V(M) ne dépendent pas de l'angle $\phi$ mais uniquement de r et $\theta$ .
De plus le plan contenant le point M et l'axe ( Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique appartient donc à ce plan , celui-ci n'a donc pas de composante selon $\vec{u}_\phi$ .
On se place donc dans un plan $\phi = cste$ et on repère un point M par ses coordonnées r et $\theta$ . L'origine O est prise au milieu de [ NP ] .




b- Calcul du potentiel :

Le potentiel créé par le dipôle est :

$$V(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}.\vec{OM}}{OM^3}$$

c- Champ créé à grande distance :

$$\vec{E}(M)=E_r(r,\theta)\vec{u}_r+E_\theta(r,\theta)\vec{u}_\theta$$

Le champ créé par le dipôle est :

$$\vec{E}(M)=\frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{u}_r+\frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{u}_\theta$$

Remarque :

1- l'expression ci-dessus est équivalente à l'expression intrinsèque ( indépendante du système de coordonnées ) suivante :

$$\vec{E}(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0 OM^5}\left(3(\vec{p}.\vec{OM})\vec{OM}-OM^2\,\vec{p}\right)$$

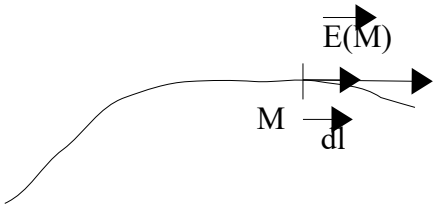
2- Champ et potentiel électrostatiques s'expriment en fonction du moment dipolaire $\vec{p}$ . Le moment dipolaire est la grandeur caractéristique du dipôle .

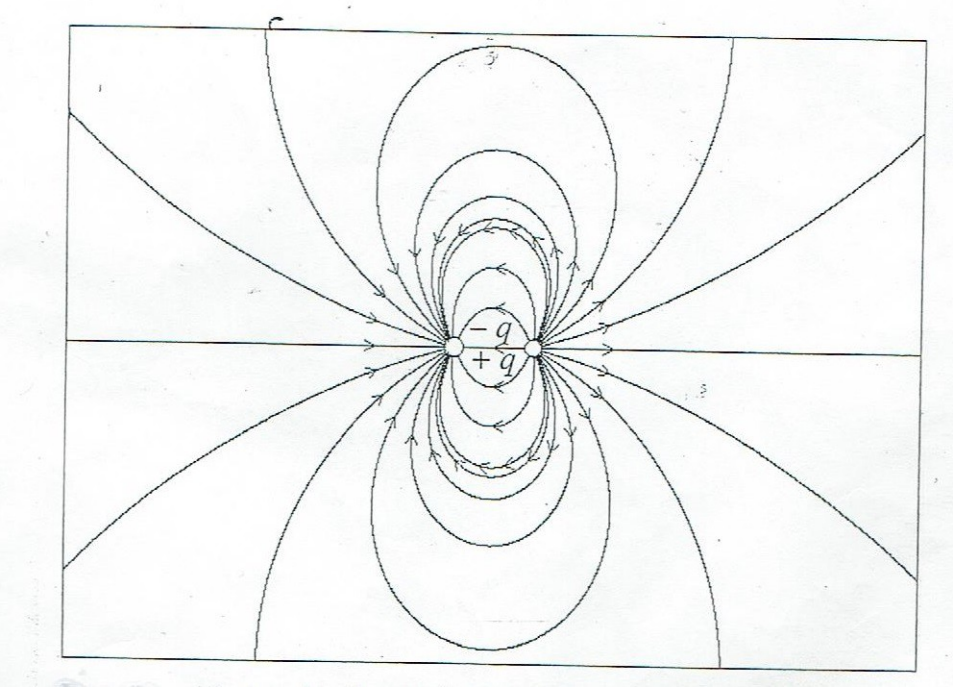
3- Le potentiel créé par un dipôle décroît en $\frac{1}{r^2}$ , le champ en $\frac{1}{r^3}$ alors que pour une charge ponctuelle ils décroissent en $\frac{1}{r}$ et en $\frac{1}{r^2}$ : les effets d'un dipôle se font ressentir à moins grande distance que ceux d'une charge seule .

## 3- Lignes de champ et équipotentielles :

a-- Equation des lignes de champ :

Les lignes de champ sont des lignes tangentes en chacun de leur point au vecteur champ en ce point





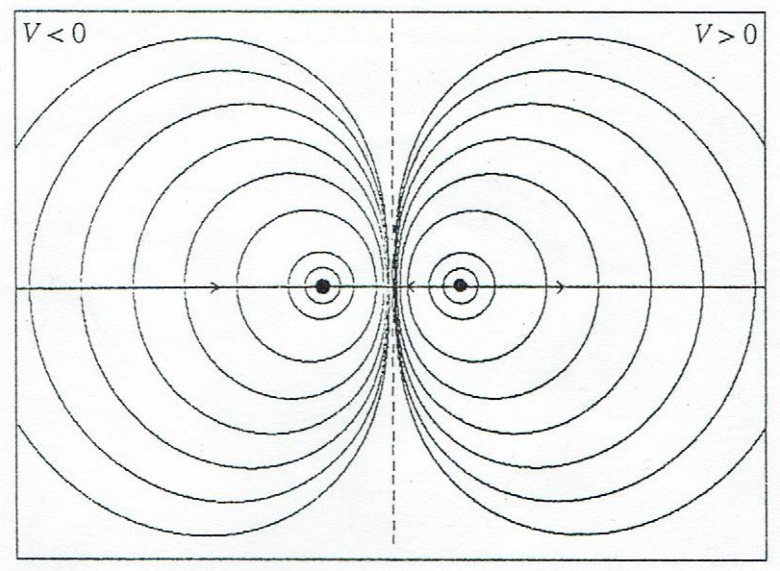

Le plan $\theta=\frac{\pi}{2}$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de charges , en un point M de ce plan $\vec{E}(M)$ est orthogonal à ce plan et est donc dirigé selon $\vec{u}_z$ .
Le plan $\theta=0$ est un plan de symétrie de la distribution de charges , en un point M de ce plan $\vec{E}(M)$ appartient à ce plan c'est à dire selon $\vec{u}_z$ .
Les lignes de champ sont ouvertes, elles partent de la charge positive et convergent vers la charge négative .

b- Equipotentielles :
Ensemble des points M tels que V(M) = cste .

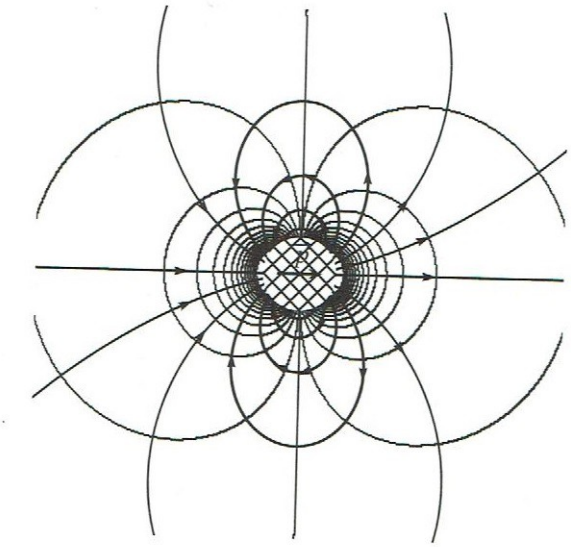
$V_0=\frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ Ce qui donne pour équation $r=K\sqrt{|\cos\theta|}$

Le signe de $\cos\theta$ reste le même sur une équipotentielle .
Si Vo > 0 , $\cos\theta>0$ c'est à dire $\theta\in[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

L'équipotentielle – Vo se déduit de l'équipotentielle Vo par symétrie par rapport au plan médiateur .
$|V_0|$ augmente lorsque r diminue .




Lignes de champ et équipotentielles : les lignes de champ sont normales aux équipotentielles en leur point d'intersection et sont dirigées selon les potentiels décroissants .



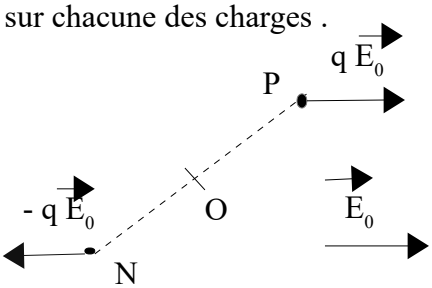
**4- Action d'un champ extérieur sur un dipôle :**

a- Cas d'un champ uniforme :

On s'intéresse aux actions subies par un dipôle plongé dans un champ extérieur uniforme $\vec{E}_{ext} = \vec{E}_0$

→ Résultante :

La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle électrostatique est la somme des forces qui s'exercent sur chacune des charges .

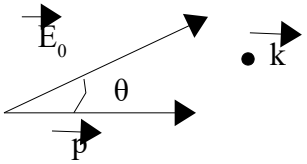



La résultante des actions mécaniques subies par un dipôle électrostatique plongé dans un champ extérieur uniforme est nulle .

→ Moment :
Calculons le moment en O qui est égal à la somme des moments en O des forces exercées sur chaque particule .

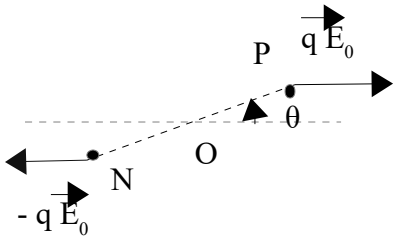
Le moment est non nul et indépendant du point où on le calcule : le torseur des actions mécaniques est donc un couple de moment $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$ .

→ Action d'un champ extérieur uniforme sur un dipôle :
On note $\theta$ l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ et $\vec{k}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ .



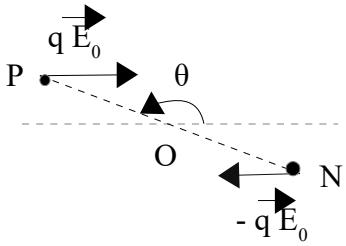

Le dipôle sera à l'équilibre dans le champ extérieur si $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ donc si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ .

→ Etude de la stabilité des positions d'équilibre :
On suppose que l'on écarte légèrement le dipôle de sa position d'équilibre et on étudie l'évolution de ce dernier .
→ $\theta = 0$ :




Les forces s'exerçant sur les deux charges tendent à ramener celui-ci dans sa position d'équilibre, **la position $\theta = 0$ est donc une position d'équilibre stable .**

→ $\theta = \pi$ **:**



Les forces s'exerçant sur les deux charges tendent à éloigner celui-ci dans sa position d'équilibre, **la position** $\theta=\pi$ **est donc une position d'équilibre instable .**

**Plongé dans un champ électrostatique uniforme un dipôle électrostatique tend à s'aligner dans le sens du champ extérieur appliqué .**

b- - Cas d'un champ extérieur non uniforme : $\vec{E_{ext}}(M)=\vec{E}(M)$

→ Résultante :

$\vec{R}=q\vec{E}(P)-q\vec{E}(N)\neq\vec{0}$

Les dimensions du dipôle étant faibles par un développement du champ en N et P, on aboutie à une expression de $\vec{R}$ sous la forme $\vec{R}=(\vec{p}.\vec{grad})\vec{E}$ ( non exigible ) .

Remarques :

→ en coordonnées cartésiennes : $\vec{R}=(\vec{p}.\vec{grad})\vec{E}=(p_x\frac{\partial}{\partial x}+p_y\frac{\partial}{\partial y}+p_z\frac{\partial}{\partial z})\vec{E}$

$$\vec{R}=(p_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+p_y\frac{\partial E_x}{\partial y}+p_z\frac{\partial E_x}{\partial z})\vec{u}_x+(p_x\frac{\partial E_y}{\partial x}+p_y\frac{\partial E_y}{\partial y}+p_z\frac{\partial E_y}{\partial z})\vec{u}_y+(p_x\frac{\partial E_z}{\partial x}+p_y\frac{\partial E_z}{\partial y}+p_z\frac{\partial E_z}{\partial z})\vec{u}_z$$

→ Dans le cas d'un dipôle rigide, c'est à dire un dipôle dont la norme du moment dipolaire est constante alors $\vec{R}=\vec{grad}(\vec{p}.\vec{E})$ . Peut être retrouvé à partir de l'énergie potentielle définie dans le paragraphe suivant .

→ Moment :

Posons $\vec{E}(N)=\vec{E}(O)+\delta\vec{E}(N)$ et $\vec{E}(P)=\vec{E}(O)+\delta\vec{E}(P)$

Le moment en O vaut :

En ne gardant que les termes d'ordre 0, on retrouve la même expression du moment que dans le cas du champ uniforme . $\vec{\Gamma}\approx\vec{p}\wedge\vec{E}(O)$ .

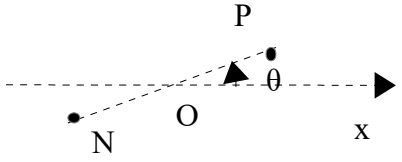
→ Actions d'un champ non uniforme :

L'effet d'un champ non uniforme dépend de la résultante et du moment qui s'exerce sur le dipôle .

**Le moment tend comme précédemment à orienter le dipôle dans le sens du champ extérieur . Ce sera l'action principale exercée par la champ extérieur .**
**La résultante tend, quant à elle, à attirer le dipôle vers les zones de champ intense .**

c-Energie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique extérieur :

Prenons par exemple, le cas d'un champ extérieur uniforme $\vec{E_{ext}}=\vec{E}_0=E_0\vec{u}x$



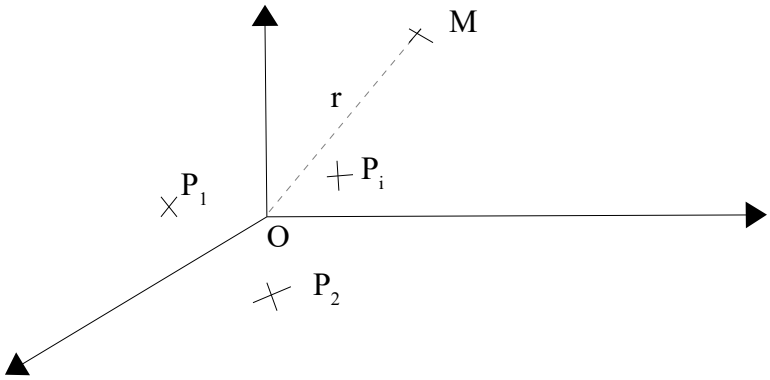
L'expression ci-dessus se généralise ( à l'ordre 0 pour un champ non uniforme ) .

**L'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ extérieur $\vec{E}$ est : $E_P = -\vec{p}.\vec{E}$ .**

Cette énergie correspond à l'énergie que doit fournir un opérateur extérieur pour amener le dipôle rigide depuis l'infini jusqu'à sa position actuelle .

Remarque :
On peut retrouver les positions d'équilibre à partir de l'énergie potentielle .
$E_P = -pE\cos\theta$ où $\theta$ est l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}$ .
A l'équilibre l'énergie potentielle est extrémale ce qui correspond à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ .
Pour $\theta = 0$ l'énergie potentielle est minimale, cette position d'équilibre est stable .
Pour $\theta = \pi$ l'énergie potentielle est maximale, cette position d'équilibre est instable .

**5- Approximation dipolaire- Applications :**
On considère un ensemble de charges qi placées en des points Pi .
On pose $OP_1 = a_i$ , OM = r , ai << r .




Rappel :
DL $(1+x)^{\frac{-1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$

a- Potentiel à grande distance :

$$V(M) = \sum_i V_i(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_i M}$$

$$\frac{1}{P_i M} = (\|\vec{P_i O} + \vec{OM}\|^2)^{\frac{-1}{2}} = (a_i^2 + r^2 - 2\vec{OP_i}.\vec{OM})^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\vec{OP_i}.\vec{OM}}{r^2} + \frac{a_i^2}{r^2}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\frac{1}{P_i M} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\vec{OP_i}.\vec{OM}}{r^2} - \frac{a_i^2}{2r^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{4*(\vec{OP_i}.\vec{OM})^2}{r^4}\right)\right]$$

D'où V(M) peut s'écrire comme la somme de trois termes :
$V(M) = V_0(M) + V_1(M) + V_2(M)$

Avec $V_0(M) = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r}$ , $V_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{OM}.(\sum_i q_i \vec{OP_i})}{r^3}$

$$V_2(M)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sum_i\left(3q_i(\vec{OP}_i.\vec{OM})^2-q_i a_i^2 r^2\right)}{2r^5}$$

b- Distribution unipolaire :

Si $\sum_i q_i\neq 0$ le terme prépondérant est $V_0(M)$ .

En prenant le point O comme barycentre des charges $q_i$ , $\sum_i q_i\vec{OP}_i=\vec{0}$

La distribution se comporte, en première approximation, comme une charge ponctuelle de valeur $Q=\sum_i q_i$ .

$\boxed{V(M)\approx\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$ on dit qu'une telle distribution est unipolaire .

c- Distribution dipolaire :

Cas où $\sum_i q_i=0$ et $\sum_i q_i\vec{OP}_i\neq 0$ le terme $V_1(M)$ est prépondérant .

Soit N le barycentre des charges négatives et P le barycentre des charges positives .

On pose $q=\sum_{i,q_i>0} q_i=-\sum_{i,q_i<0} q_i$

Le point N est tel que : $-q\vec{ON}=\sum_{i,q_i<0} q_i\vec{OP}_i$ et le point P est tel que $q\vec{OP}=\sum_{i,q_i>0} q_i\vec{OP}_i$ .

$$\sum_i q_i\vec{OP}_i=\sum_{i,q_i>0} q_i\vec{OP}_i+\sum_{i,q_i<0} q_i\vec{OP}_i=q(\vec{OP}-\vec{ON})=q\vec{NP}$$

On pose $\boxed{\vec{p}=q\vec{NP}}$ , on a $\boxed{V_1(M)\approx\frac{\vec{p}.\vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$

La distribution est équivalente à deux charges opposées q et – q placées aux barycentres P et N des charges positives et négatives , le système est équivalent à un dipôle de moment $\vec{p}=q\vec{NP}$ , la distribution est dite dipolaire .

d- Distribution quadripolaire :

$\sum_i q_i=0$ et si N et P sont confondus $\sum_i q_i\vec{OP}_i=0$ d'où $V(M)\approx V_2(M)$

La distribution est dite quadripolaire .

e- Application aux molécules polaires :

→ Moment dipolaire permanent :

Dans leur état fondamental, les atomes sont neutres et les barycentres des charges positives et négatives sont confondus donc $\sum_i q_i=0$ et $\vec{p}=\vec{0}$ . La distribution est donc quadripolaire .

Les molécules sont globalement neutres mais peuvent présenter un moment dipolaire non nul . En effet la disposition spatiale des atomes et/ou leur différence des propriétés les rendent dissymétriques : les barycentres des charges positives et des charges négatives peuvent ne pas être confondus . Dans ce cas, on a une distribution dipolaire . On parle alors de moment dipolaire permanent .

Les moments dipolaires sont d'autant plus grands que la molécule est dissymétrique .

Exemples : μ( $H_2O$ ) = 1,85 D μ( CO ) = 0,11 D μ( HCl ) = 1,08 D

→ Moment dipolaire induit :

Sous l'action d'un champ électrique un atome ou une molécule qui ne possède pas de moment dipolaire peut en acquérir un ( déplacement des barycentres des charges positives et négatives ) : on parle de moment dipolaire induit .

Dans le cas où le moment dipolaire n'est pas trop intense , le moment dipolaire induit est proportionnel au champ électrique $\vec{p}=\alpha\epsilon_0\vec{E}$ où $\alpha$ est le coefficient de polarisabilité, la molécule est dite polarisable .

Rem : dans le cas où une molécule possède un moment dipolaire permanent , le moment dipolaire induit est toujours plus faible .

**VI- Tracé numérique des lignes de champ et des surfaces équipotentielles créées par un ensmble de charges ponctuelles .**

On travaille dans le vide . On se restreindra à un espace plan , délimité par un carré de côté h où on place des charges ponctuelles . On découpe la surface sur laquelle on veut tracer les lignes de champ en petits éléments de surface carrée de côté dx = dy = h / N . Ce étape s'appelle **le maillage** . Les grandeurs physiques seront représentées par des matrices de taille N x N qui contiennent les valeurs des gradeurs en chaque point du maillage .

Ceci peut être fait à l'aide de la fonction *mesgrid de numpy* qui crée une grille rectangulaire à partir de deux tableaux unidimensionnels :

---

```
#caractéristiques de la grille
h=200#hauteur de la grille en pm
Nx=200
Ny=200
dx=h/Nx#pas discrétisation espace
dy=h/Ny

#construction de la grille
xx=np.linspace(-h/2,h/2,num=Nx)
yy=np.linspace(-h/2,h/2,num=Ny)
x,y=np.meshgrid(xx,yy)
```

---

Remarque :

Un point de coordonnées [i,j] correspond à la ligne i et à la colonne j .

Pour représenter les équipotentielles et les lignes de champ créées par deux charges $q_1$ et $q_2$ de coordonnées respectives ( $x_1$ , $y_1$ ) et ( $x_2$ , $y_2$ ) , une fois définies les valeurs des charges et les positions de celles-ci, on calcule le potentiel et le champ en chacun des points de la grille à l'aide de deux boucles imbriquées . Le potentiel n'étant pas défini au niveau de la charge, on prend arbitrairement une valeur nulle en ce point .

Le tracé des équipotentielles se fait avec la fonction *contour de matplotlib* et celui des lignes de champ avec la fonction *streamplot de matplotlib* .

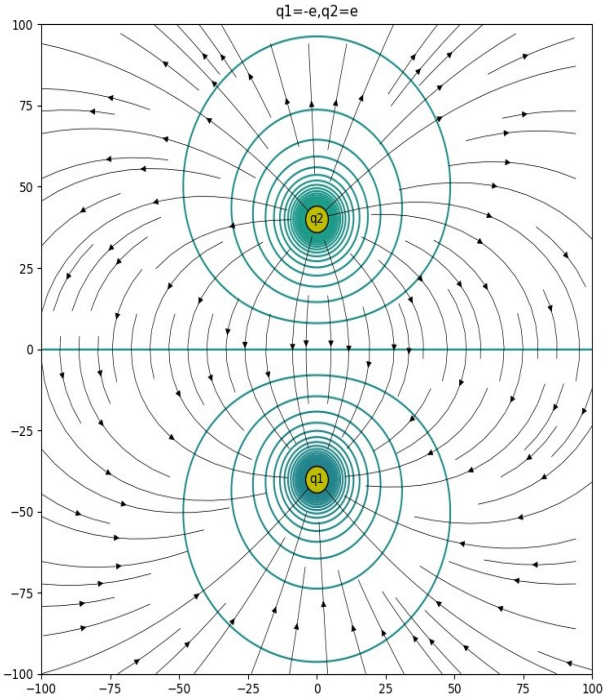
---

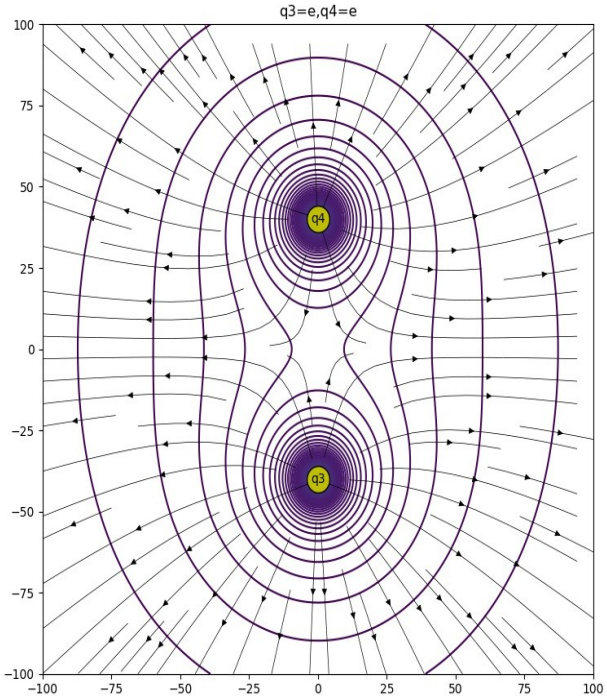
```
#calcul du potentiel
V_a=np.empty((Nx,Ny))
for i in range(len(xx)):
for j in range(len(yy)):
r_1=np.sqrt((x[i,j]-x_1)**2+(y[i,j]-y_1)**2)
r_2=np.sqrt((x[i,j]-x_2)**2+(y[i,j]-y_2)**2)
if r_1==0 or r_2==0:
V_a[i,j]=0
else:
V_a[i,j]=1/(4*np.pi*eps0)*(q_3/r_1+q_4/r_2)

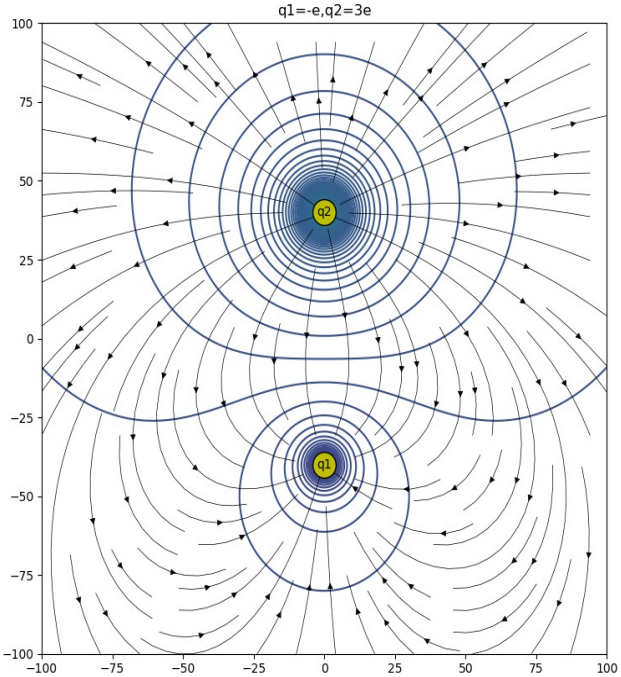
#calcul du champ
Eya,Exa=np.gradient(-V_a)

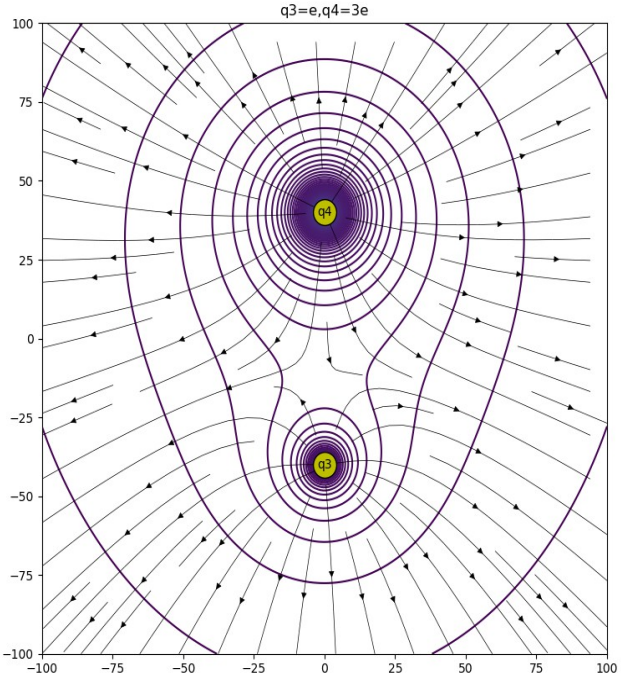
plt.contour(x,y,V,600)
plt.streamplot(x,y,Ex,Ey,color='k',linewidth=0.5)
```

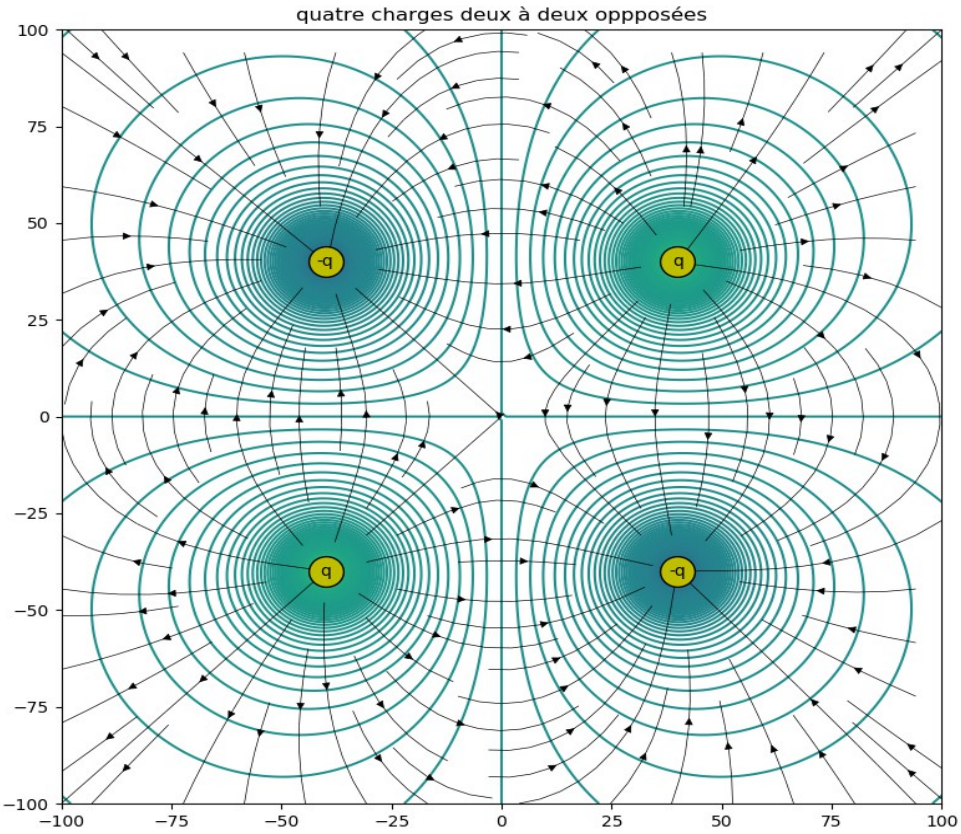
On obtient pour différents systèmes de charges :





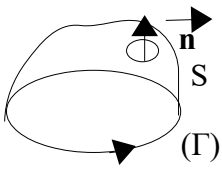

→ Les lignes de champ divergent depuis une charge positive et convergent vers une charge négative. Elles peuvent aussi aller ou venir de l'infini.
— Les lignes de champ relient toujours une charge à une charge opposée ou à l'infini. Elles ne sont jamais bouclées sur elles-même.
→ Là ou se trouvent des charges ponctuelles, les lignes de champ concourent, le champ électrostatique n'est pas défini sur celles-ci.
→ Si des lignes de champ différentes se coupent en un point où ne se trouvent pas de charges alors le champ électrique y est nécessairement nul (on parle de point singulier).

## VI Flux du champ électrostatique – Th. De Gauss :

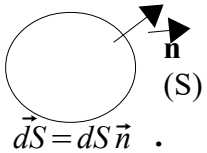
### VI-1 Flux du champ électrostatique :

a- Elément de surface :

Soit une surface ouverte S s'appuyant sur un contour fermé Γ , le sens de la normale en un point M est lié au sens de circulation sur le contour




Si on considère une surface S fermée : le sens de la normale positive est celui de la normale sortante .




On définit un élément de surface par $\vec{dS} = dS\,\vec{n}$ .

b- Définition du flux :

Le flux élémentaire de $\vec{E}(M)$ à travers l'élément de surface $\vec{dS}$ est $d\Phi = \vec{E}(M).\vec{dS} = \vec{E}(M).\vec{n}\,dS$ .

Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface S ouverte est $\Phi = \int\int_{(S)} \vec{E}(M,t).\vec{dS}$

Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface S fermée est $\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS}$

Calcul du flux, à travers une sphère de rayon r de centre O, du champ électrostatique créé par une charge q placée en O :

**VI-2- Th de Gauss :**

**Le flux du champ électrostatique sortant de toute surface fermée S est égal au rapport de la charge totale $Q_{int}$ contenue à l'intérieur de S par epsilon 0 .**

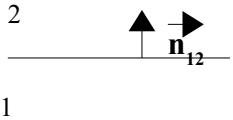
**Pour toute surface S fermée** $\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{Qint}{\epsilon o}$

Conséquences :

→ **Dans une zone vide de charge , le champ électrique est à flux conservatif** ( le flux du champ électrique est le même à travers toute section d'un tube de champ ) . **Sur un graphe représentant les lignes de champ , un resserrement des lignes de champ correspond à une augmentation du module du champ .**

→ Lors de la traversée d'une nappe de charge surfacique σ

$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1).\vec{n}_{12} = \frac{\sigma}{\epsilon o}$

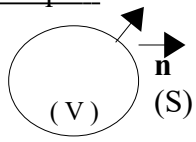



→ En un point Mmax où le potentiel présente un maximum relatif , se trouve une charge positive . En un point Mmin où le potentiel présente un minimum relatif , se trouve une charge négative .
Si le potentiel est maximal en un point, les lignes de champ divergent de ce point .
Si le potentiel est minimal en un point, les lignes de champ convergent vers ce point .

→ Le potentiel électrostatique ne peut pas présenter d'extremum en l'absence de charge.

Remarque :
Ce théorème reste valable en régime quelconque .

Equation locale vérifiée par le champ électrostatique :



$$\oiint_S \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Qint}{\epsilon o} \Leftarrow \text{div } (\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

Equation locale vérifiée par le potentiel électrostatique : équation de Poisson, équation de Laplace .
Le but de l'électrostatique est de déterminer le champ électrostatique créé par une distribution de charges . Si on connaît le potentiel électrostatique V(M), on peut déterminer le champ électrostatique .
Etablissons une relation liant, localement, le potentiel électrostatique et la densité volumique de charge au point M $\rho(M)$ .

→ Equation de Poisson :

Le potentiel électrostatique vérifie donc l'équation locale $\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0$ appelée équation de Poisson .

**Attention , cette équation n'est pas applicable en un point d'une distribution surfacique ou linéique de charges .**

→ Equation de Laplace :
dans une zone vide de charge , le potentiel électrostatique vérifie l'équation : $\Delta V(M) = 0$ appelée équation de Laplace de l'électrostatique .
Analogie avec l'équation de Laplace en thermique .

**VI- 4- Application aux calculs de champs :**
Le théorème de Gauss est un outil puissant pour calculer rapidement le champ électrostatique créé par des distributions de haut degré de symétrie . De même pour des distributions de ce type, l'équation locale vérifiée par $\vec{E}$ permet d'obtenir une expression analytique du champ électrostatique .

Principe du calcul :
1ère étape : choix du repérage et du système de coordonnées le mieux adapté .
2ème étape : analyse des symétries et des invariances et leurs conséquences sur $\vec{E}(M)$
3ème étape :
→ Si on applique le th de Gauss, on doit choisir une surface fermée dite de gauss : elle doit passer par le point M où on cherche à calculer le champ et adaptée à la géométrie du champ .
On va chercher une surface ( Sg ) telle que le champ électrique soit normal à cette surface en tout point et de module constant ( tq $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ colinéaires en tout point , norme identique en tout point de la surface .. ) : surface équipotentielle passant par M .
Si la surface équipotentielle passant par M est fermée , alors c'est cette surface que l'on choisit comme surface de Gauss .
Si elle n'est pas fermée , on construit la surface fermée de Gauss à partit d'un élément de la surface équipotentielle que l'on ferme par des éléments de surface tels que le champ soit tangent à ces éléments et que le flux à travers ceux-ci soit nul .( ex tq $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ colinéaires en tout point , norme identique en tout

point de la surface .. ) .
→ ou on utilise l'équation locale vérifiée par $\vec{E}$ .
4ème étape ( th de Gauss) :
On calcule le flux du champ électrostatique et la charge intérieure en différenciant les différents cas .

---

***Exercice cours 5 :***

***On considère une boule de rayon R et de centre O, uniformément chargée en volume . On note $\rho_0$ le densité volumique de charge .***

***1- Etablir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution .***

***2- Montrer, qu'à l'extérieur de la boule, le champ électrostatique créé est le même que celui d'une charge ponctuelle placée en O et concentrant la charge totale de la distribution .***

***3- Déterminer l'expression du potentiel en prenant un potentiel nul à l'infini .***

***4- Retrouver l'expression du champ électrostatique à partir de l'équation locale .***

***En coordonnées sphériques :*** $$\vec{grad}\, U(r,\theta,\phi,t) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

$$\text{div}\ \vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{(r\sin\theta)}\frac{\partial (\sin\theta\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

---

***Exercice cours 6 :***

***On considère un cylindre de rayon R, d'axe Oz et de hauteur H >> R , uniformément chargée en volume . On note $\rho_0$ le densité volumique de charge .***

***1- Etablir l'expression du champ électrostatique créé en tout point de l'espace par cette distribution .***

***2- Déterminer l'expression du potentiel en prenant un potentiel nul sur la surface latérale du cylindre .***

***3- Retrouver l'expression du champ à partir de l'équation locale .***

***En coordonnées cylindriques :*** $$\boxed{\vec{grad}\, U(r,\theta,z,t) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z}$$

$$\text{div}\ \vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

---

***Exercice cours 7 :***

***On considère le plan infini ( O , x , y ) uniformément chargé en surface avec la densité $\sigma_0$ .***

***1- Déterminer champ électrostatique créé en tout point de l'espace .***

***2- Déterminer le potentiel électrostatique en prenant celui-ci nul sur le plan .***

---

## VI – 5- Application au condensateur plan :

### Effet capacitif – Condensateur :

On appelle **effet capacitif** le phénomène d'accumulation de charges sur les surfaces de conducteurs en influence électrostatique et portés à des potentiels différents .

Un condensateur correspond, dans sa réalisation idéale, à la mise en influence totale de deux conducteurs $C_1$ et $C_2$, c'est-à-dire tels que toutes les lignes de champ d'un conducteur aboutissent à l'autre conducteur.

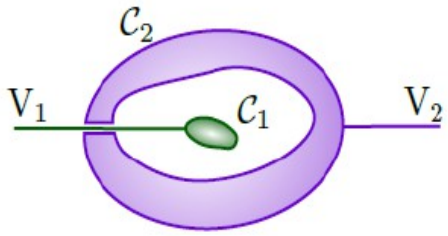
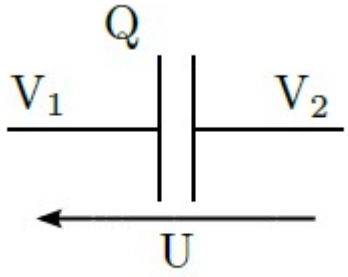



*Schéma de principe*




*Symbole*

Les faces en regard sont appelées armatures du condensateur. L'espace entre les armatures peut être vide ou rempli d'un isolant électrique (diélectrique).

A l'équilibre électrostatique, on peut montrer que les armatures portent des charges opposées $Q = Q_1 = -Q_2$.

La capacité C du condensateur (en farad) est définie par : $Q_1 = C(V_1 - V_2)$

La capacité du condensateur est une grandeur positive, fonction de la géométrie des armatures et de l'isolant placé entre les armatures.

Remarques :

Plus la charge Q accumulée par les armatures est importante, et plus le champ électrostatique entre les armatures sera élevée, et donc la tension élevée.

Le condensateur idéal implique que le conducteur 2 entoure complètement le conducteur 1, ce qui n'est que très rarement réalisable.

En général, l'influence totale est mise en défaut au niveau des bords du système (si les dimensions sont bien choisies, ces effets de bords pourront être négligés).

**Modèle du condensateur plan :**

Un condensateur plan est constitue de deux armatures planes, parallèles, de même forme de surface S et espacées d'une distance e. Ces deux armatures portent des charges opposées. On suppose que e est très faible devant les dimensions des plaques, ce qui nous permet de les considérées comme ≪infinies ≫. Ce modèle est convenable loin du bord des plaques ; on néglige les effets de bord .

La capacité d'un condensateur plan à vide vaut : $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ .

Pour augmenter la capacité d'un condensateur, on peut augmenter la surface des armatures avec des structures enroulées, diminuer la distance entre les armatures mais il faut veiller à ce que le champ électrique n'atteigne pas le champ disruptif de l'air ( valeur du champ électrique provocant une ionisation de l'air ) .

On peut aussi introduire, entre les armatures du condensateur, un isolant électrique ( diélectrique ), dans le cas où celui-ci est linéaire et homogène, l'expression de la capacité reste valable à condition des remplacer $\epsilon_0$ par $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ où $\epsilon_r$ est la **permittivité relative diélectrique du milieu** $C = \frac{\epsilon S}{e} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{e}$

Exemples de matériaux :

| Matériau | $\varepsilon_r$ | Matériau | $\varepsilon_r$ |
|---|---|---|---|
| carton | 4 | PVC | 5 |
| mica | 6 | Polycarbonate | 2,9 |
| paier | 2 | Verre | 5 |

***Exercice cours 8 :***

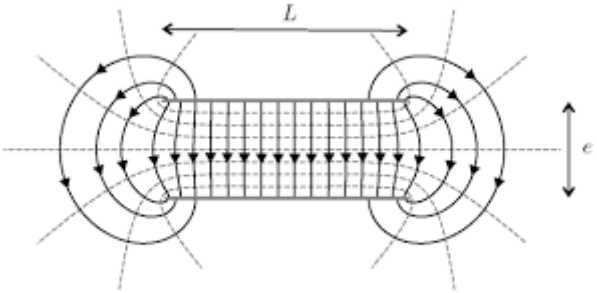
***On modélise le condensateur plan par deux armatures planes infinies parallèles à Oxy aux cotes z = −e/2 et z = e/2 portant respectivement les densités surfaciques de charge −σ et +σ, avec σ > 0.***

***1- Méthode 1 : en utilisant le principe de superposition sur les champs crées par chaque armature, déterminer la capacité du condensateur plan.***

***2- Méthode 2 : en utilisant l'équation de Laplace, déterminer le potentiel électrostatique entre les armatures. En déduire la capacité du condensateur.***

***3. Evaluer numériquement la capacité, la charge et la norme du champ électrique entre les armatures d'un condensateur de surface S = 1 cm², d'épaisseur e = 10µm, de permittivité relative εr = 10 et soumis a une tension U = 10V.***

Les lignes de champ entre les armatures sont parallèles lorsqu'on se trouve loin des bords mais s'incurvent sur les extrémités des armatures .




Remarque : pouvoir des pointes

On peut montrer que les charges de surfaces portées par les matériaux conducteurs sont plus nombreuses là ou la courbure de la surface est plus importante : c'est l'effet des pointes .

Cet effet est mis à profit dans les paratonnerres .

En ce qui concerne le condensateur plan réel, la charge accumulée sera plus importante sur les bords .

## VII- Analogies avec la gravitation :

### VII-1 Loi de Coulomb et loi de Newton :

Loi de Coulomb et loi de Newton analogues :

loi de Coulomb $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2 \vec{M_1 M_2}}{4\pi\epsilon_o M_1 M_2^3}$

loi de newton $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2 \vec{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}$

Analogie entre les lois de l'électrostatique et celles relatives à l'intéraction gravitationnelle :

q ↔ m  1 / 4πεo ↔ - G

**VII-2 Analogie :**

| | Electrostatique | Gravitation |
|---|---|---|
| Source des champs | charges | masse |
| Préfacteur | $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ | - G |
| Relation champ-force | $\vec{F}=q\vec{E}$ | $\vec{F}=m\vec{g}$ |
| Source ponctuelle | Champ créé en M par une charge qo placée en P $\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$ | Champ créé en M par une masse mo placée en P $\vec{g}=\frac{-Gm\vec{PM}}{PM^3}$ |
| Circulation conservative | $\oint \vec{E}.\vec{dl}=0 \leftrightarrow \vec{rot}(\vec{E})=\vec{0}$ | $\oint \vec{g}.\vec{dl}=0 \leftrightarrow \vec{rot}(\vec{g})=\vec{0}$ |
| Th de Gauss | $\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS}=\frac{Qint}{\epsilon o}$ | $\oiint_S \vec{g}\,\vec{dS}=-4\pi G M_{inté}$ |

***Exercice cours 9 :***

***On considère une boule de rayon R et de centre O, dont la masse est uniformément répartie . On note $\mu_0$ la masse volumique .***

***1- Etablir l'expression du champ gravitationnel créé en tout point de l'espace par cette distribution .***

***2- Montrer, qu'à l'extérieur de la boule, le champ gravitationnel créé est le même que celui d'une masse ponctuelle placée en O et concentrant la masse totale m de la distribution .***

***Exercice cours 10 :***

***1- Déterminer l'équation locale liant le champ gravitationnel et la masse volumique en un point***

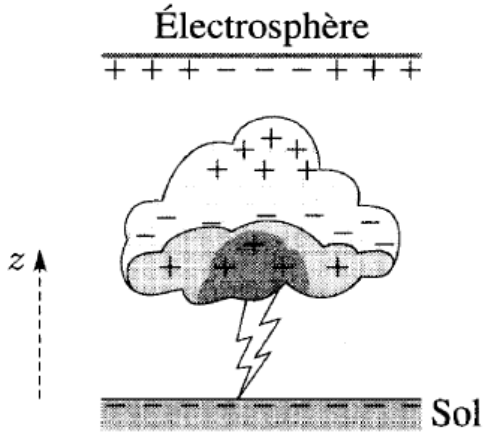
***2- Montrer que l'on peut définir un potentiel gravitationnel .***

**Quelques applications des phénomènes électrostatiques :**

→ Activité électrique de l'atmosphère et foudre :

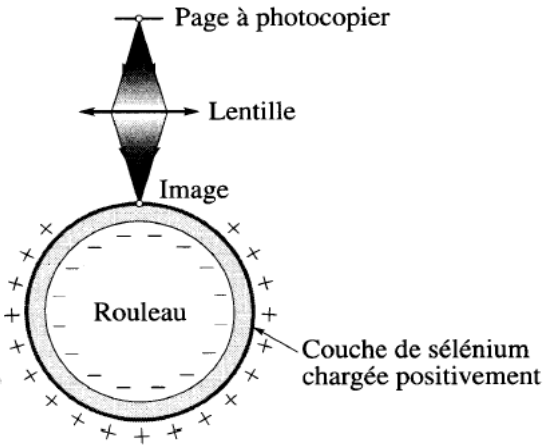
La Terre subit une activité électrique due a la couche supérieure de l'atmosphère, l'électrosphère, située à une altitude d'environ 50 km. Par beau temps, cette couche est électriquement chargée par le rayonnement cosmique provenant du Soleil qui ionise en permanence les molécules. Avec une densité surfacique de charge de l'ordre de $1{,}1.10^{-9}$ C.m$^{-2}$, elle crée entre elle et la surface du globe un champ électrique d'environ130V.m$^{-1}$. Il en résulte une différence de potentiel de l'ordre de 220 V entre les niveaux de la tête et des pieds d'un homme debout ; ce champ ne présente cependant pas de danger car l'homme, suffisamment conducteur, modifie la répartition des lignes de potentiel, ce qui lui permet d'être équipotentiel.

Une des manifestations des phénomènes électriques dans l'environnement terrestre est la foudre qui est due la décharge brutale de l'électricité accumulée dans un nuage, lors d'un orage.




L'étude des conditions atmosphériques et électriques qui précèdent la foudre a montré qu'une zone située à la base d'un nuage d'orage se charge positivement de quelques coulombs, alors que la région centrale du nuage, entre 2 et 6 km, se charge, elle, négativement. Simultanément, la partie haute des nuages a une altitude d'une dizaine de kilomètres se charge positivement. Il en résulte des différences de potentiel de plusieurs MV entre les nuages et le sol ou entre diverses parties d'un nuage, ce qui explique les décharges électriques violentes constatées sur la Terre (au dépassement du champ disruptif de l'air).
Par temps d'orage, le champ électrique dans le voisinage de la Terre est dangereux puisqu'il peut atteindre 500 $kV.m^{-1}$. On s'en protège en s'accroupissant et en évitant les objets pointus, les aspérités et les arbres qui, devenus conducteurs sous la pluie, attirent la foudre en raison du pouvoir des pointes.

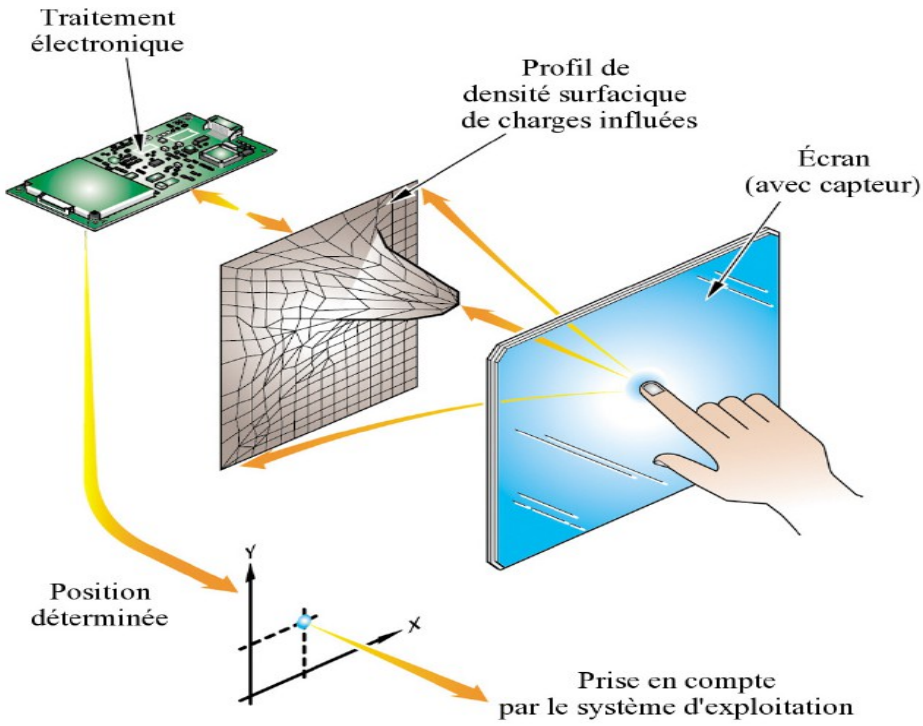
→ Xérographie
La xérographie, appelée aussi copie sèche par opposition à la photographie habituelle (xeros signifie sec en grec), a été inventée en 1935 par l'américain Carlson. Actuellement les photocopieuses xérographiques comportent un rouleau central conducteur, recouvert d'une couche photoconductrice isolante (sélénium) et porté à un potentiel négatif.
La couche photoconductrice est préalablement chargée en électricité positive par effet de pointe. On forme sur sa surface latérale l'image géométrique de la page à photocopier, ce qui rend conductrices les parties les plus éclairées et donc neutralise les charges positives qu'elles portaient. Le rouleau porte donc des zones chargées positivement reproduisant fidèlement l'image des parties encrées de la page.
Dans une deuxième étape, on fait passer le rouleau au voisinage d'une cartouche contenant de l'encre pulvérulente dont les fines particules de carbone chargées négativement sont attirées par les zones chargées du rouleau. Dans une troisième étape, ces particules d'encre sont déposées sur la feuille à imprimer qui passe entre le rouleau et une électrode positive. Dans la phase finale, on fixe ces particules par pression et chauffage, ce qui donne une reproduction du document initial.



→ Ecran tactile : ( source reshine.display.com )

Dans un écran tactile capacitif, l'écran est divisé en une grille d'électrodes qui créent un champ électrostatique. Lorsqu'un doigt s'approche de l'écran, il perturbe ce champ, provoquant un changement de capacité à cet endroit spécifique.

Le contrôleur à écran tactile détecte ce changement et calcule les coordonnées du point tactile. Ce processus se produit presque instantanément, permettant une expérience utilisateur transparente. Le contrôleur envoie ensuite ces informations au système d'exploitation de l'appareil, qui interprète le toucher comme une commande, comme ouvrir une application ou faire défiler une page Web.




→ Capteurs capacitifs :

L'effet capacitif est également mis à profit dans certains capteurs : ex capteurs de pression . Dans ces capteurs, suivant la pression, la géométrie du système capacitif chage ce qui entraine une modification de la capacité du système .

Un accéléromètre capacitif va fonctionner grâce à des capacités. On retrouve donc 2 condensateurs ainsi qu'un élément mobile. La mise en mouvement de cet élément va faire varier la valeur de capacité des deux condensateurs, ce qui nous permettra de connaître l'accélération.

Les accéléromètres capacitifs concurrencent la technologie piézorésistive. Ils sont destinés à la mesure d'accélération statique et de phénomènes vibratoires basse fréquence (jusqu'à quelques centaines de Hz). Nous retrouverons donc ce type de capteur dans l'analyse de confort vibratoire au sein de véhicules, dans le génie civil avec l'étude de stabilité des ponts, bâtiments et autres infrastructures, ou encore pour surveillance de machines tournantes lentes et d'équipements lourds .