

Automatique – Performances des systèmes asservis

1 – Introduction

En première année nous nous sommes intéressés aux SLCI : Systèmes Linéaires Continus Invariants. Cette année il nous faut aborder les points suivants :

- Pour des systèmes non linéaires il est possible d'effectuer une linéarisation d'un modèle autour d'un point de fonctionnement.
- Sur une modélisation linéaire d'asservissement il est intéressant d'évaluer les performances : **rapidité, précision, stabilité** pour les comparer à celles attendues par le cahier des charges.
- Ensuite en fonction de l'évaluation des performances on peut proposer un correcteur dans la chaine directe pour améliorer ces performances.



2 – Rappels

2-1 Rappels transformée de Laplace

- dérivation : $L \left[\frac{d f(t)}{dt} \right] = p \cdot F(p) - f(0+)$ et $L \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0+) - f'(0+)$

avec les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles) on a :

$$L \left[\frac{d f(t)}{dt} \right] = p \cdot F(p) \quad \text{et} \quad L \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = p^2 \cdot F(p), \quad p \text{ est un dérivateur}$$

- intégration : $L \left[\int_0^{t_1} f(t) dt \right] = \frac{F(p)}{p}$

$\frac{1}{p}$ est un intégrateur

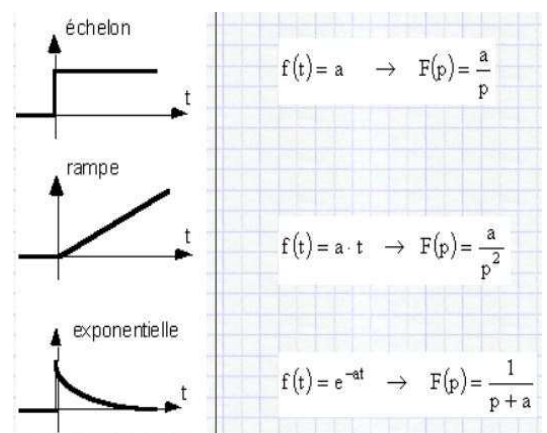
- théorème du retard : $L [f(t - \tau)] = e^{-p \cdot \tau} \cdot F(p)$

- théorème de la valeur initiale :

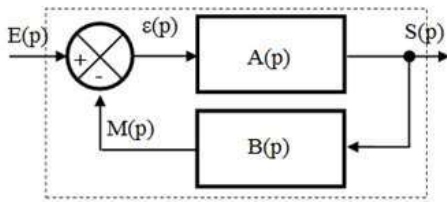
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

- théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$



2-2 Rappels schémas blocs asservissement « classique »



$A(p)$: Chaîne directe, le système avec ou sans correcteurs

$B(p)$: Chaîne retour, l'info capteur

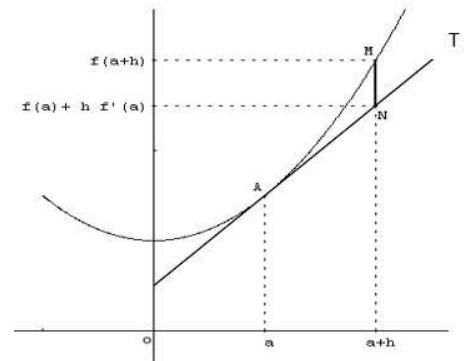
$FTBO(p) = A(p) \cdot B(p)$

$$FTBF(p) = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + FTBO(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

3 – Linéarisation

Approximation linéaire autour d'un point de fonctionnement

Nous obtenons parfois en régime établi des réponses non linéaires. Un modèle linéaire autour du point de fonctionnement peut être la tangente à la courbe en ce point. Cette approximation n'est valable que dans une zone autour du point concerné. Ainsi pour la suite du cours nous nous intéresserons aux fonctions linéaires.



Sur la figure la tangente (T) à la courbe au point $A(a ; f(a))$ possède pour équation : $y(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

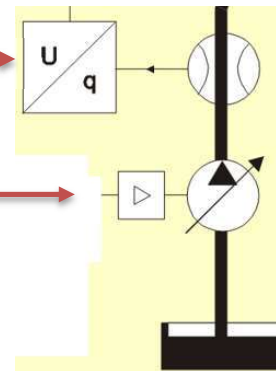
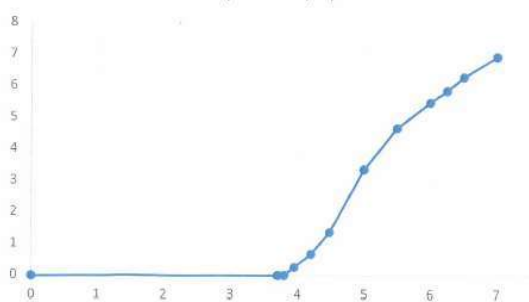
La tangente en A est la meilleure façon d'approcher la courbe au voisinage de A à l'aide d'une droite.

Autre exemple :

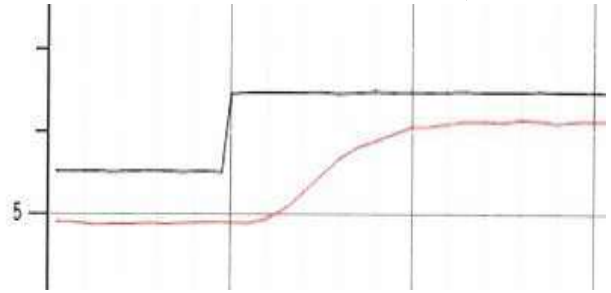
Capteur de débit qui délivre une tension U_c image du débit

Alimentation en tension U_m du moteur de la pompe

Courbe : $U_c = f(U_m)$



Dans une zone que l'on peut considérer comme linéaire (vers $U_m = 5,5 \text{ v}$), on envoie un échelon de 1 v pour identifier la réponse. Ainsi on peut obtenir le modèle de connaissance (fonction transfert) du système moteur-pompe-capteur de débit.



Linéarisation d'équation différentielle : θ petit, $\cos \theta = 1$ et $\sin \theta = \theta$,

4- Rappels et performances des systèmes bouclés

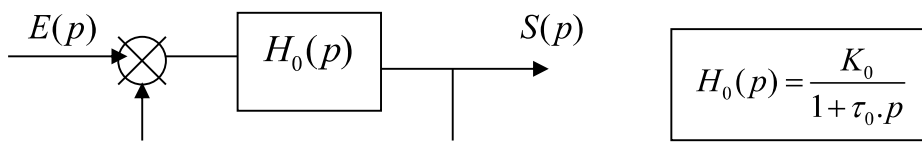
Rapidité : cette performance est évaluée par le temps de réponse à 5% : $t_{r5\%}$ pour le domaine temporel et par la bande passante pour le domaine fréquentiel (bande passante à -3 dB pour la FTBF et à 0 dB pour la FTBO).

Précision : cette performance est évaluée par la valeur de l'erreur.

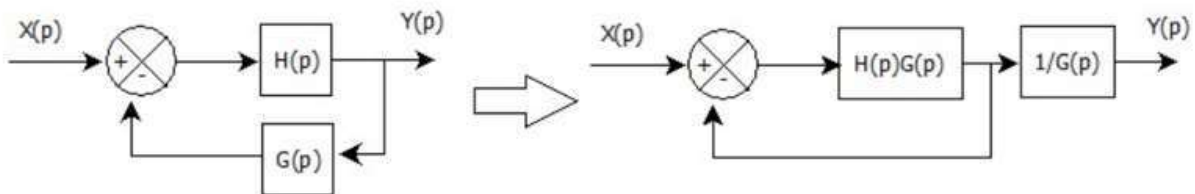
Stabilité : cette performance est évaluée par le positionnement des pôles dans le plan complexe ou par des marges de stabilité (marge de phase et marge de gain) dans le domaine fréquentiel.

4-1 Système du premier ordre

Boucle fermée, retour unitaire



Remarque : pour la suite et particulièrement pour les études de précision, de rapidité et de stabilité, nous allons utiliser un schéma bloc à retour unitaire. Normalement dans un schéma chaque bloc représente une fonction, un composant physique, ... Grace à l'algèbre de bloc on peut revenir à un schéma équivalent à retour unitaire, ceci afin de faciliter les calculs, avec l'inconvénient que l'on perd visuellement le sens réel de la modélisation du système.



Exprimons $H_{BF}(p)$ sous forme canonique en fonction des paramètres de $H_0(p)$:

$$H_{BF}(p) = \frac{H_0(p)}{1 + H_0(p)} = \frac{K_0}{1 + K_0 + \tau_0 \cdot p} = \frac{\frac{K_0}{1 + K_0}}{1 + \frac{\tau_0}{1 + K_0} \cdot p}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF} \cdot p}$$

Le bouclage ne change pas l'ordre du système.

Donc : $K_{BF} = \frac{K_0}{1 + K_0}$: gain statique en boucle fermée

$\tau_{BF} = \frac{\tau_0}{1 + K_0}$: constante de temps du système bouclé

$$t_{r5\%} = 3 \cdot \frac{\tau_0}{1 + K_0}$$

Influence du bouclage : $e(t)=1$

BO

BF

K_0

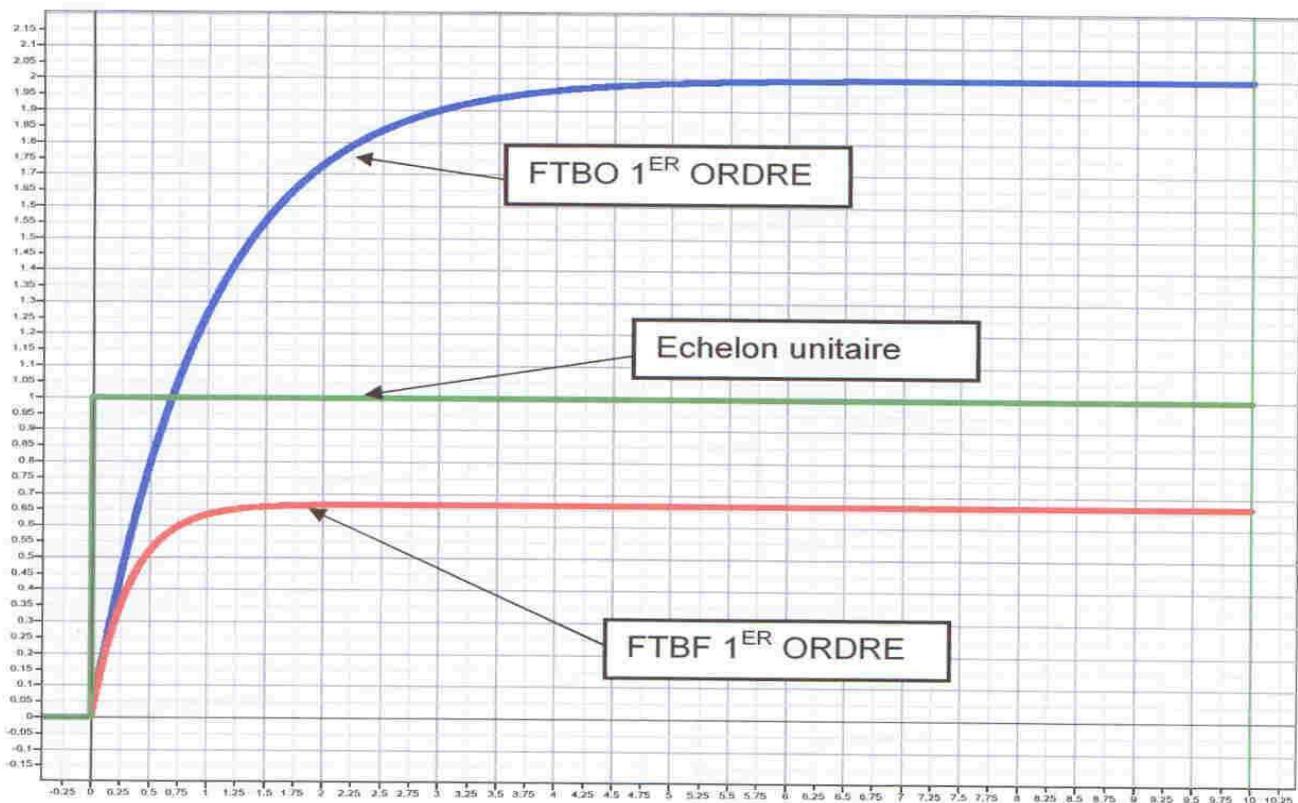
$K_{BF} = \frac{K_0}{1 + K_0}$ diminution du gain

τ_0

$\tau_{BF} = \frac{\tau_0}{1 + K_0}$ amélioration de la rapidité

$\epsilon_s = 1 - K_0$

$\epsilon_s = \frac{1}{1 + K_0}$ amélioration de la précision à partir de $K_0 = \sqrt{2}$



4- 2 Système du second ordre :

Exprimons $H_{BF}(p)$ en fonction des paramètres de $H_0(p)$:

$$H_{BF}(p) = \frac{H_0(p)}{1 + H_0(p)} \text{ soit } H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}}{1 + \frac{K_0}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}} = \frac{K_0}{1 + K_0 + \frac{2\xi}{\omega_n} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

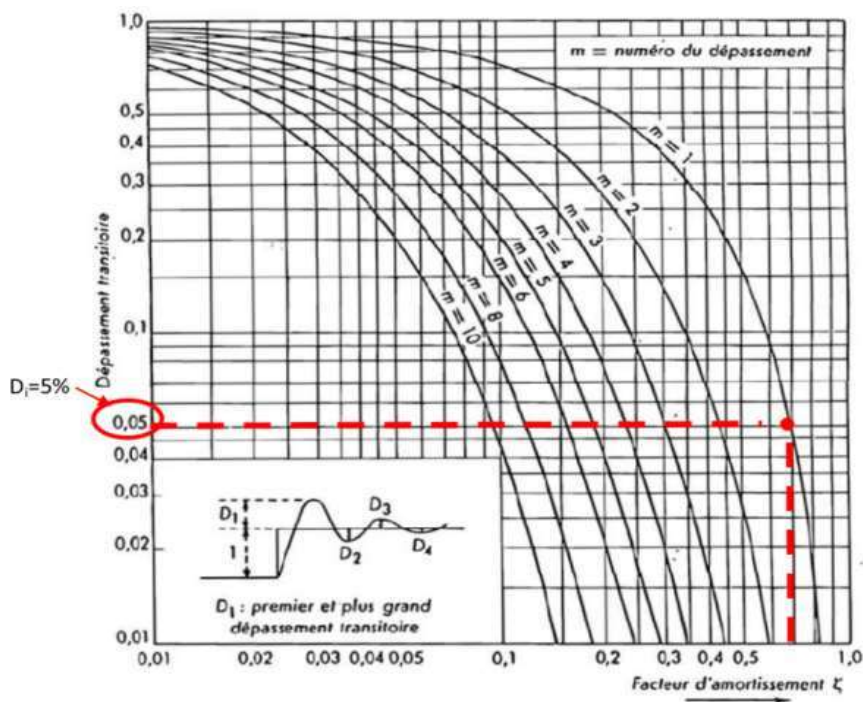
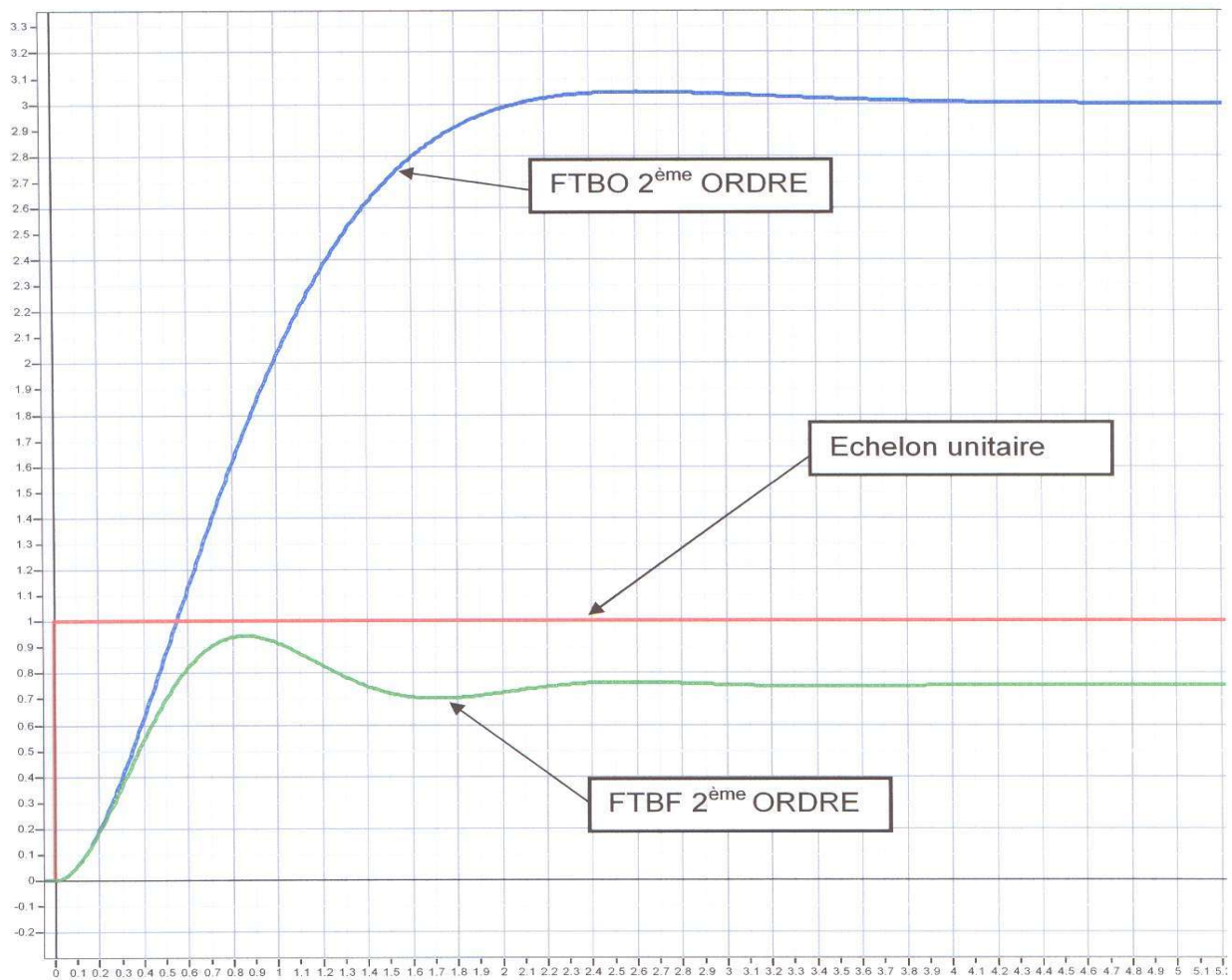
$$H_{BF}(p) = \frac{\frac{K_0}{1 + K_0}}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n(1 + K_0)} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_n^2(1 + K_0)}} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2\xi_{BF}}{\omega_{nBF}} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_{nBF}^2}}$$

$$K_{BF} = \frac{K_0}{1 + K_0} : \text{gain statique en BF} \quad \xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_0}} : \text{coefficient d'amortissement en BF}$$

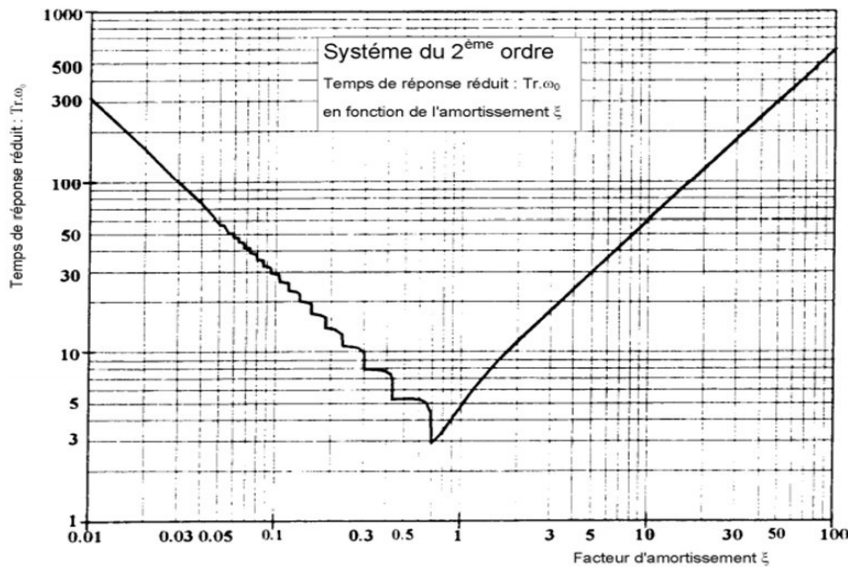
$$\omega_{nBF} = \omega_n \sqrt{1 + K_0} : \text{pulsation propre non amortie du système bouclé}$$

Influence du bouclage :

BO	BF			
K_0	$K_{BF} = \frac{K_0}{1+K_0}$ diminution du gain			
$\epsilon_s = 1 - K_0$	$\epsilon_s = \frac{1}{1+K_0}$ amélioration de la précision à partir de $K_0 = \sqrt{2}$			
ξ	$\xi_{BF} = \frac{\xi}{\sqrt{1+K_0}}$ diminution de l'amortissement			
ω_n	$\omega_{nBF} = \omega_n \cdot \sqrt{1+K_0}$ augmentation de la fréquence			
BO : $tr_{5\%} = 1,7s$	$K_0 = 3$	$\xi_{BO} = 0,8$	$\omega_{nBO} = 2 \text{ rad/s}$	$\epsilon_{sBO} = -2$
BF : $tr_{5\%} = 2s$	$K_{BF} = 0,75$	$\xi_{BF} = 0,4$	$\omega_{nBF} = 4 \text{ rad/s}$	$\epsilon_{sBF} = 0,25$



$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



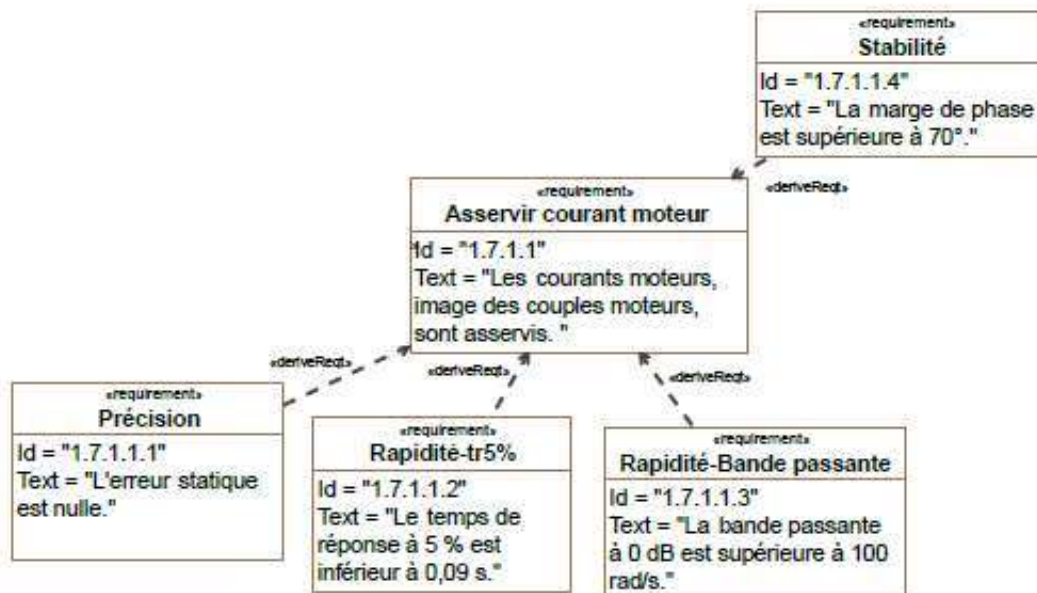
$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{T_p}{2}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$$

5 – Critères de performances des systèmes asservis

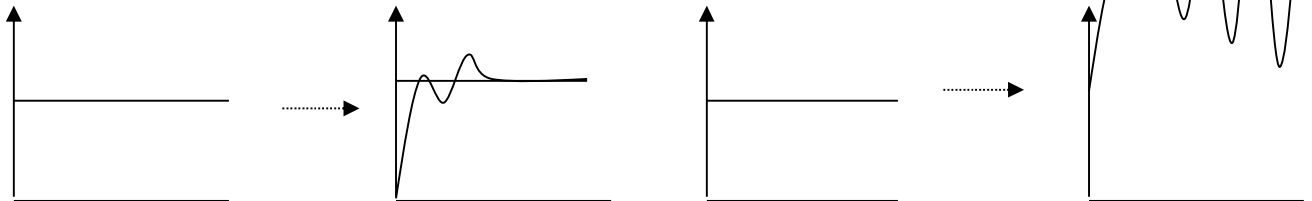
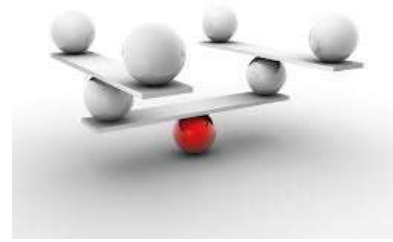
Nous allons commencer par le critère de stabilité.
Car si un système n'est pas stable il devient incongru
d'en étudier la précision ou la rapidité.



5-1 – Stabilité

5-1-1 - Définition

Un système est stable si à une entrée bornée (non infinie) correspond une sortie bornée (non infinie). Un système est stable quand sa sortie converge lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Le système ne diverge pas.



Système stable, la réponse converge

Réponse Instable, la réponse diverge

Un système réel instable oscille jusqu'à destruction, ces oscillations peuvent être limitées par des phénomènes de saturation de composants (électrique, électronique, mécanique, ...) et laisser croire que la sortie du système est bornée.

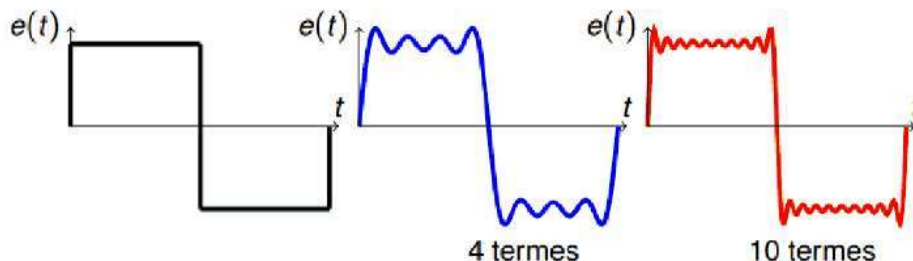
Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la **stabilité** d'un système :

1. **Diagramme de Bode** (étude fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte) : **FTBO**

2. **Calcul des pôles** de la fonction de transfert en boucle fermée : **FTBF**

5-1-2 Etude fréquentielle: critère du revers

C'est un critère graphique de stabilité permettant d'étudier la stabilité d'un système bouclé (FTBF) à partir de l'étude fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte **FTBO**. La méthode est fréquentielle mais conclut sur la stabilité du système quelque soit son entrée (échelon, ...). En effet, tout signal d'entrée peut être décomposé en série de Fourier et donc être considéré comme une somme de signaux sinusoïdaux



Pour un asservissement “classique” nous avons : $FTBF(p) = \frac{\text{chaîne directe}}{1+FTBO(p)}$

Il ne faut pas avoir : $1 + FTBO(p) = 0$, car on aurait une $FTBF(p)$ et donc une réponse qui diverge. Le système serait donc instable. Le point critique est «-1» : $FTBO(p) \neq -1$

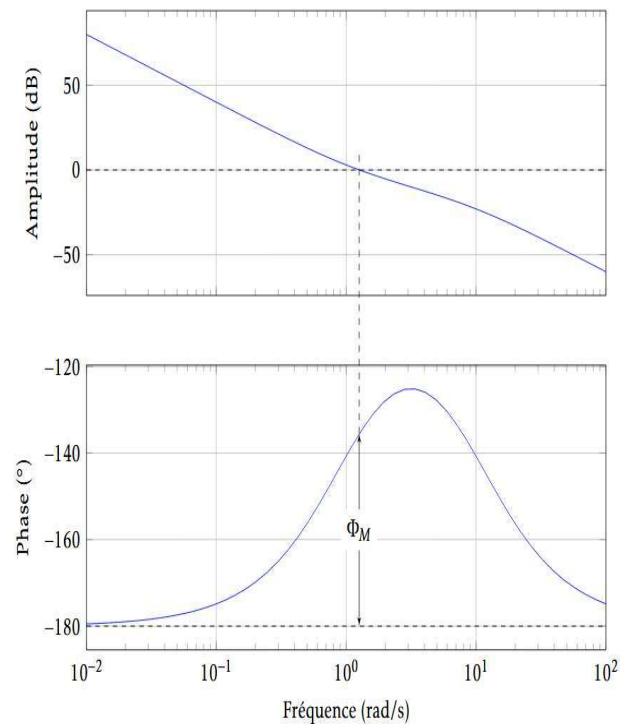
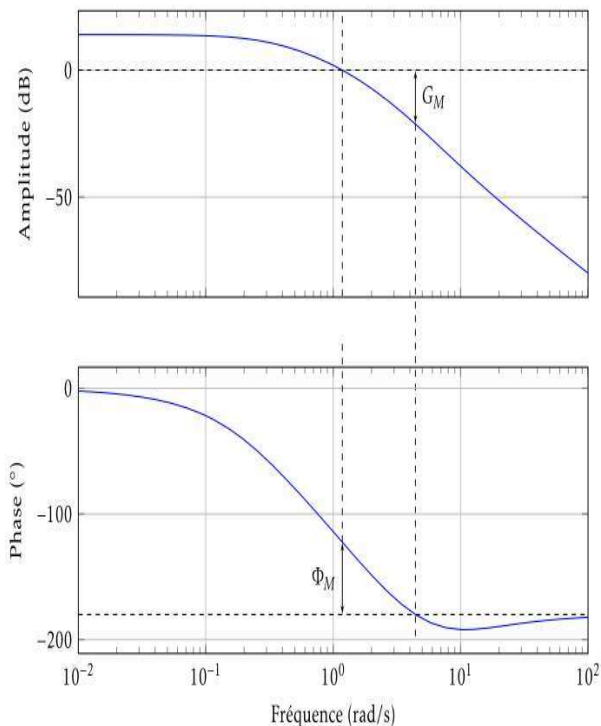
Le point critique est à : $FTBO(j\omega) = -1$, $|FTBO(j\omega)| = 1$ donc quand **le gain est nul** car on a $20 \log_{10} |FTBO(j\omega)| = 0$ et $\varphi = \text{Arg}(-1) = \text{Arctan}\left(\frac{0}{-1}\right) = -180^\circ$

Il ne faut pas trop approcher ce point critique (**-180°, 0dB**) quand ω augmente. Le respect de cette double condition permet d'énoncer le critère du revers dans le plan de Bode :

- Pour le **gain nul** il ne faut pas trop approcher les -180° de déphasage et garder une marge de sécurité en restant « au-dessus », c'est la **marge de phase ($M\varphi$)**
- Pour un déphasage de **-180°** il ne faut pas trop approcher le gain nul et garder une marge de sécurité avec un gain négatif en restant « en dessous », c'est la **marge de gain (MG)**

Remarques : - les valeurs usuelles de marges de phase et de gain sont : $MG=10$ à 12 dB, $M\varphi=45^\circ$ à 60° , ceci pour avoir un bon compromis entre rapidité et stabilité.

- pour un premier et deuxième ordre la MG est non définie car la phase ne descend pas en dessous de -180° , on dit parfois que la marge de gain est infinie.



Approche analytique :

- 1- Il faut trouver la fréquence w_{0db} pour laquelle le gain est nul, c'est-à-dire pour :
 $|FTBO(jw)| = 1$
- 2- Puis calculer le déphasage à cette fréquence $\varphi(w_{0db})$ pour en déduire la marge de phase.

Exemple : $H(p) = \frac{7}{1+3.p+0,1.p^2}$