

Automatique - systèmes linéaires

Objectif : Être capable de construire la réponse temporelle d'un système du premier ou second ordre, d'identifier sa fonction de transfert à partir de son comportement, de déterminer ses performances (stabilité, précision, rapidité) et de choisir un correcteur.

1 - Influence du bouclage

ou de l'intérêt de créer un système asservi.

Prenons pour exemple un système de fonction de transfert $H(p) = \frac{1}{(1+p) \cdot (1+0,5p)}$
pulsations de coupure : $\omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 2$

on prévoit de boucler le système pour le rendre asservi. $H(p)$ forme donc la F.T.B.O. si le retour est unitaire.

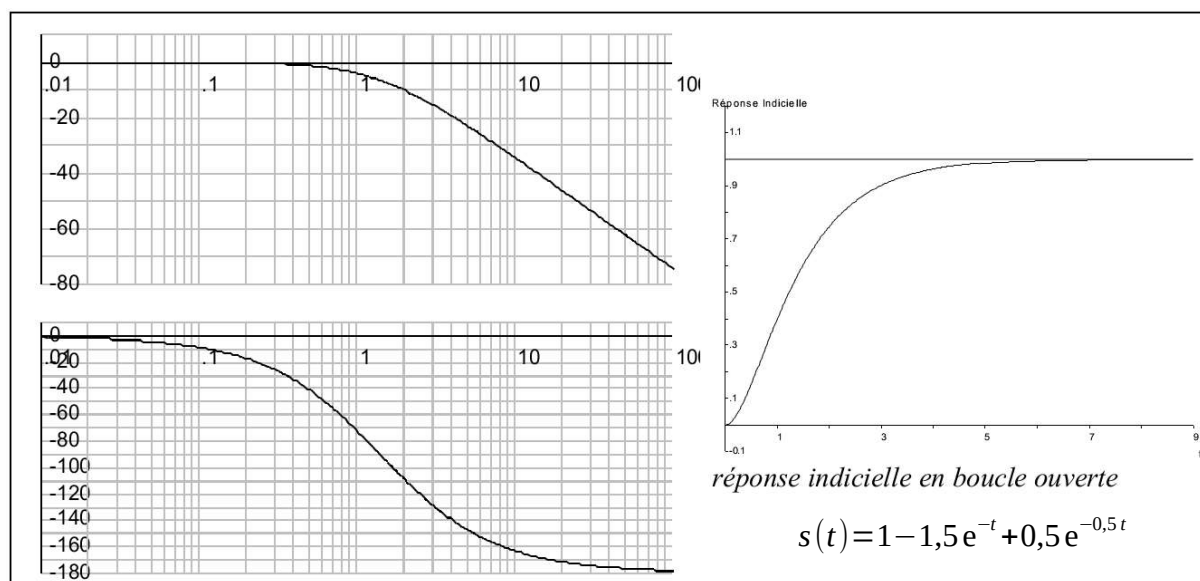
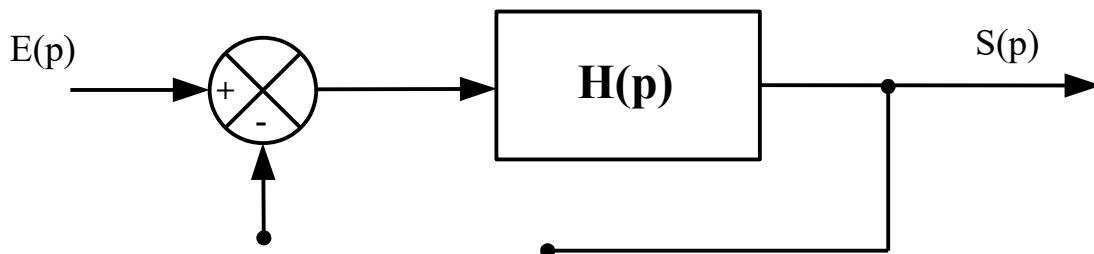
$$\text{en développant : } H(p) = H_{BO} = \frac{1}{1+1,5p+0,5p^2}$$

paramètres caractéristiques de la fonction de transfert :

Pulsation propre $\omega_0 = 1,414$; Coeff. d'amortissement ξ ou $m = 1,06$; Gain statique $G_0 = 1$

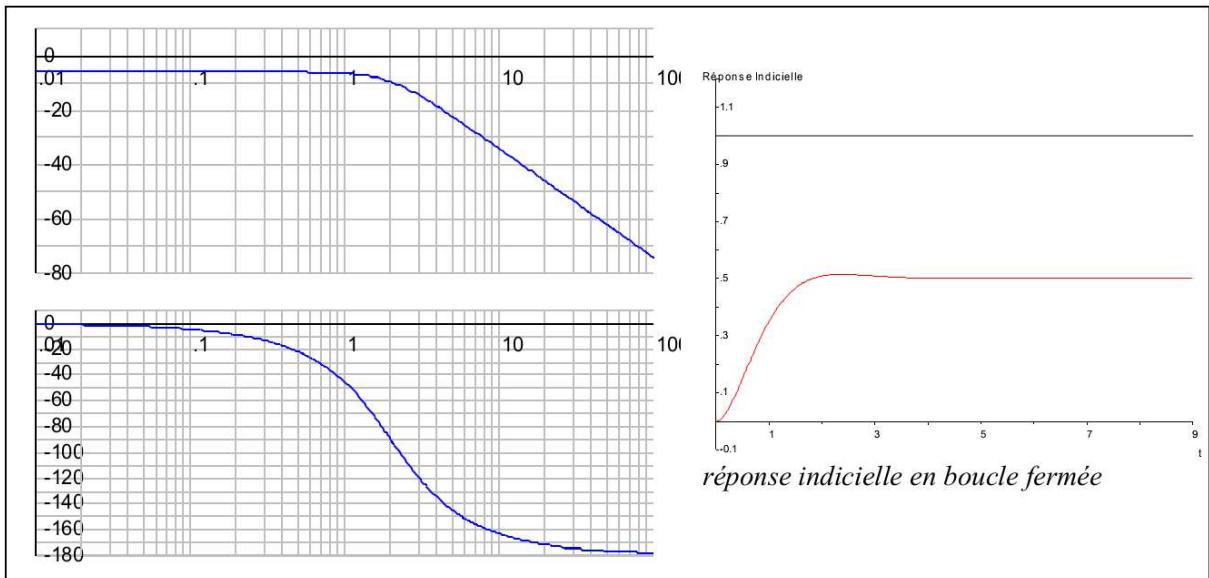
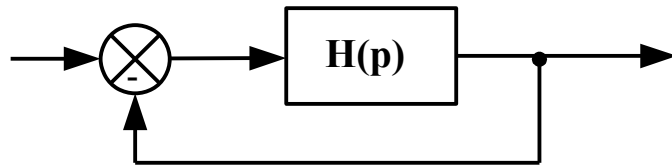
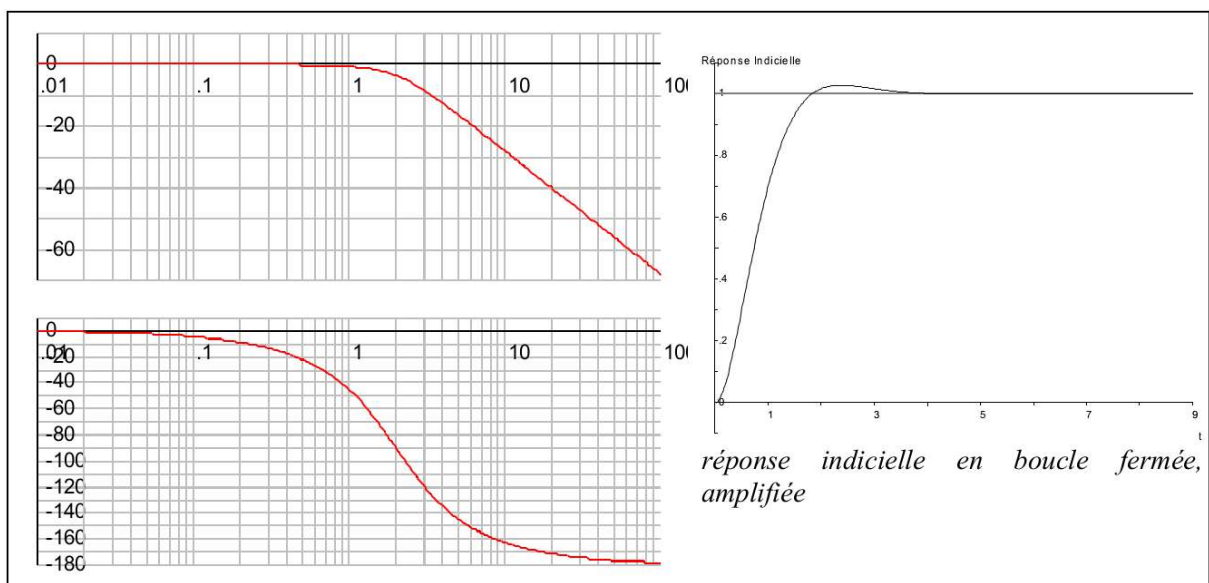
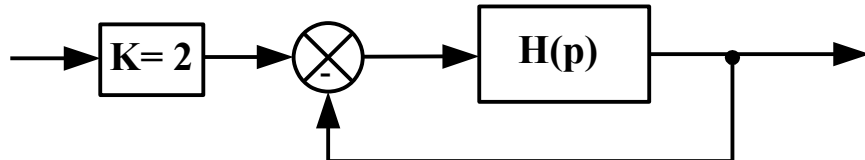
Étude du système en boucle ouverte

Pour l'instant, le sommateur est inutile...



En boucle fermée (retour unitaire)

$$H_{BF} = \frac{H_{BO}}{1+H_{BO}} = \frac{0,5}{1+0,75p+0,25p^2}$$

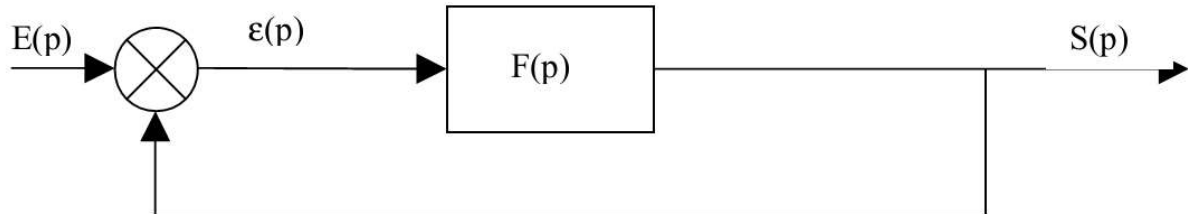
**En boucle fermée, en ajoutant un amplificateur**

2- performances des systèmes asservis

2-1 Précision

2-1-1 définitions

Le rôle d'un système asservi est de faire suivre à la sortie $s(t)$ une loi déterminée par l'entrée $e(t)$. La précision caractérise l'exactitude avec laquelle cette loi est suivie. Les écarts peuvent être dus au système lui-même, ou à des perturbations extérieures.

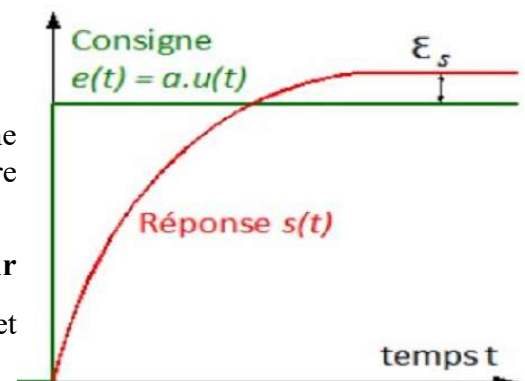


Pour une régulation : $e(t) = \text{constante}$

La précision est caractérisée par l'écart que présente en régime permanent la sortie $s(t)$ par rapport à la consigne $e(t)$. On mesure cet écart, ou **erreur** $\varepsilon(t)$, à la sortie du sommateur.

Avec une entrée en échelon ($E(p) = \frac{1}{p}$), on définit **l'erreur**

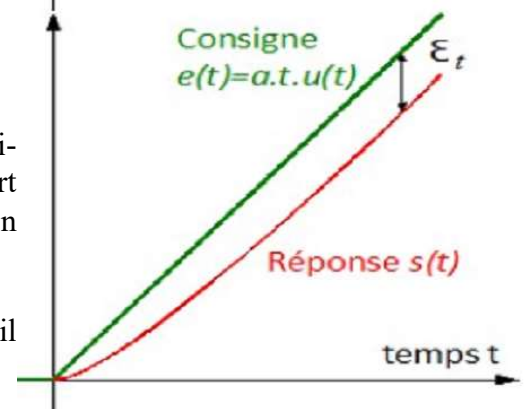
statique : c'est l'écart en régime permanent entre consigne et sortie ($t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow p \rightarrow 0$).



Pour un asservissement : $e(t) = \text{variable}$

La précision est alors caractérisée par **l'erreur statique** (voir ci-avant) et par **l'erreur de traînage** (ou erreur de poursuite), écart en régime permanent ($t \rightarrow +\infty \Leftrightarrow p \rightarrow 0$) avec une entrée en rampe.

Remarque : parler d'erreur n'a de sens qu'en boucle fermée, car il faut nécessairement un retour pour l'évaluer.



L'**ordre** d'un système est défini par le degré du polynôme du dénominateur de sa fonction de transfert.

Ex : $F(p) = \frac{10}{(1+3p+12p^2+2p^3)}$ est la fonction de transfert d'un système du ...

On définit la **classe** d'un système par le nombre d'intégrations pures (termes en $1/p$) que contient sa fonction de transfert en boucle ouverte.

Ex : $F(p) = \frac{10}{p(1+3p)}$ est la fonction de transfert d'un système d'ordre ... et de classe ...

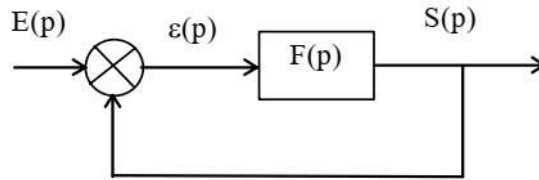
$F(p) = \frac{(p+10)}{p^2(2+5p)}$ est la fonction de transfert d'un système d'ordre ... et de classe ...

$F(p) = \frac{1}{1+3p+9p^2}$ est la fonction de transfert d'un système d'ordre ... et de classe ...

2-1-2 Calcul de l'erreur statique

L'erreur statique se calcule avec **une entrée en échelon**. Pour obtenir la valeur de l'écart en régime permanent, on utilise le théorème aux limites, pour $t \rightarrow +\infty$.

Le retour doit être unitaire (ou alors la consigne doit être adaptée par un gain en amont de la boucle qui soit égal au gain statique du retour), pour que les deux grandeurs comparées par le sommateur soient à la même échelle.



La fonction de transfert en boucle ouverte du système est, avec un retour unitaire : FTBO = F(p)

$$F(p) = \frac{G_0}{p^n (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)}$$

Démonstration : calculons l'erreur statique $\mathcal{E}_s$; on exprime l'écart, puis on en cherche la limite.

L'écart (ou erreur) entre la consigne et la sortie s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) &= E(p) - S(p) \\ \Leftrightarrow \varepsilon(p) &= E(p) - F(p) \cdot \varepsilon(p) \\ \Leftrightarrow \varepsilon(p)(1 + F(p)) &= E(p) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)}$$

L'erreur statique $\mathcal{E}_s$ est la valeur finale de $\mathcal{E}(p)$. On utilise donc les théorèmes aux limites, quand t tend vers l'infini (donc quand p tend vers 0, dans le domaine de Laplace) :

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p) \quad \text{et l'entrée } E(p) \text{ est un échelon unitaire.}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + F(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_0}{p^n (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)}}$$

$$\text{FTBO de classe 0 (n=0) :} \quad \Leftrightarrow \varepsilon_s = \frac{1}{1 + G_0}$$

$$\text{FTBO de classe 1 (n=1), ou plus :} \quad \Leftrightarrow \varepsilon_s = 0$$

2-1-3 Calcul de l'erreur de traînage

L'erreur de traînage se calcule avec une **entrée en rampe**. Pour obtenir la valeur de l'écart en régime permanent, on utilise de même les théorèmes aux limites, pour $t \rightarrow +\infty$.

La FTBO du système est toujours $F(p)$, mais l'entrée est une rampe $E(p) = \frac{1}{p^2}$.

$$F(p) = \frac{G_0}{p^n (1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \dots)}$$

calculons l'erreur de traînage ε_t :

l'écart s'exprime toujours de la même manière ; $\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + F(p)}$

L'erreur statique ε_t est la valeur finale de $\varepsilon(p)$. On utilise encore les théorèmes aux limites, quand t tend vers l'infini (donc quand p tend vers 0, dans le domaine de Laplace) :

$\varepsilon_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$ et l'entrée $E(p)$ est une rampe unitaire.

$$\varepsilon_t = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + F(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{G_0}{p^n (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots)}}$$

FTBO de classe 0 ($n=0$) : $\Leftrightarrow \varepsilon_t = +\infty$

FTBO de classe 1 ($n=1$) : $\Leftrightarrow \varepsilon_t = \frac{1}{G_0}$

FTBO de classe 2 ($n=2$), ou plus : $\Leftrightarrow \varepsilon_t = 0$

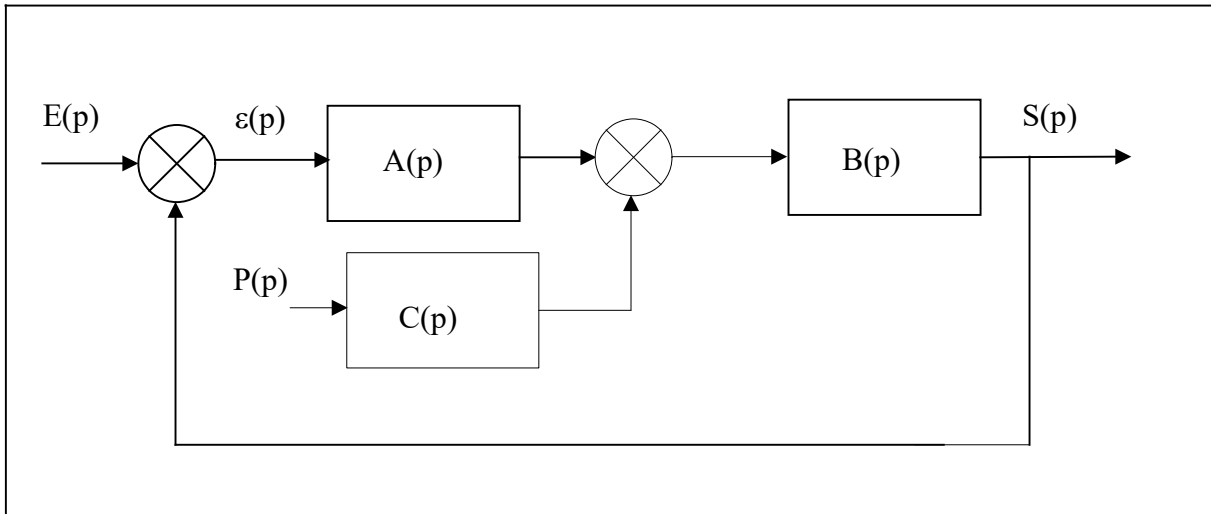
Si l'entrée n'est pas unitaire, mais d'amplitude E_0 : l'écart est aussi multiplié par E_0 . On le ramène alors souvent à un écart relatif, en pourcentage.

Conclusions à retenir :

Entrée	Classe du système		
	Classe 0 pas d'intégration dans la boucle ouverte	Classe 1 Une intégration	Classe 2 (ou plus) Deux intégrations (ou plus)
Entrée en échelon $\frac{E_0}{p}$	$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1 + G_0}$	$\varepsilon_s = 0$	$\varepsilon_s = 0$
Entrée en rampe $\frac{a}{p^2}$	$\varepsilon_t = +\infty$	$\varepsilon_t = \frac{a}{G_0}$	$\varepsilon_t = 0$

2-1-4 prise en compte d'une perturbation

Supposons qu'une perturbation extérieure soit identifiée (ex : pesanteur sur un bras de robot) et modélisée par une seconde entrée $P(p)$:



Le système possède maintenant deux entrées. On utilise alors le **principe de superposition**.

La fonction de transfert $S(p) / E(p)$ n'est pas modifiée si on prend $P(p) = 0$.

Déterminons donc l'écart $\varepsilon(p)$ avec $E(p) = 0$, qui représente l'influence de la **perturbation seule** ; le comportement du système complet, avec entrée et perturbation, sera la superposition des deux régimes, et donc l'addition des deux réponses temporelles.

$$S(p) = \frac{B(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} \cdot P(p) \quad \text{et} \quad \varepsilon(p) = -S(p) \quad \text{car} \quad E(p) = 0$$

$$\text{on a donc} \quad \varepsilon(p) = \frac{-B(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)} \cdot P(p)$$

Influence de la perturbation $P(p)$ sur l'écart statique : (perturbation permanente, en échelon : $P(p) = \frac{1}{p}$)

$$\varepsilon(p) = \frac{-1}{p} \cdot \frac{B(p) \cdot C(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

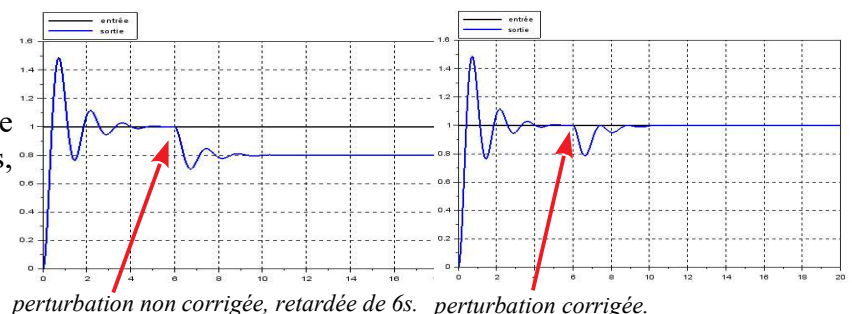
si $A.B$ et $B.C$ sont de même classe, l'écart statique ε_s sera non nul : la perturbation modifie la sortie.

Si $A.B$ est de classe supérieure à $B.C$, l'écart statique ε_s sera nul : la perturbation est corrigée.

Nota :

en calcul, on les étudie séparément ;

En simulation on pourra choisir de décaler leur introduction dans le temps, de façon à en différencier les effets.



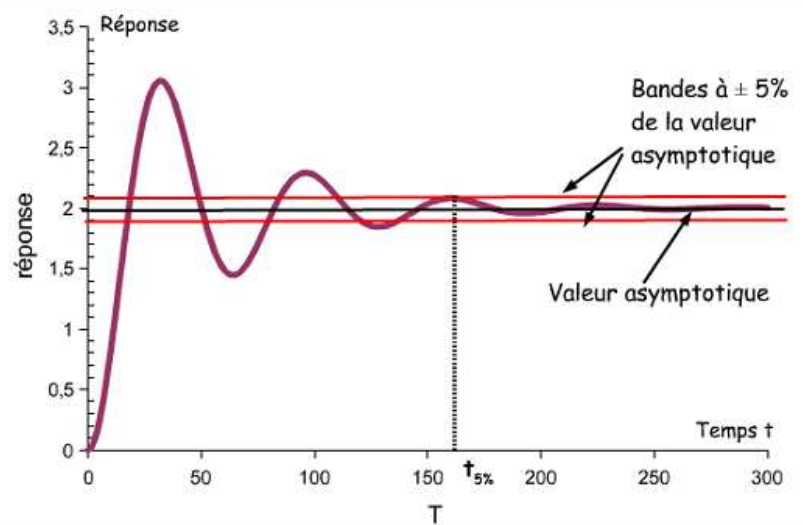
Conclusion :

Pour **annuler l'erreur statique** due à une perturbation permanente, il faut insérer **une intégration pure en amont** du point d'introduction de la perturbation, dans la chaîne directe.

2-2 rapidité

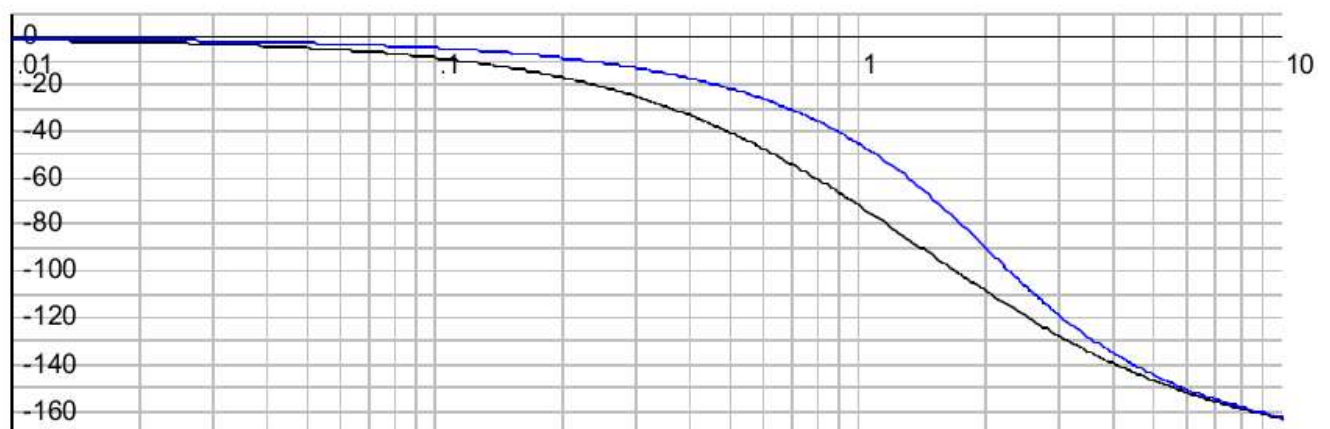
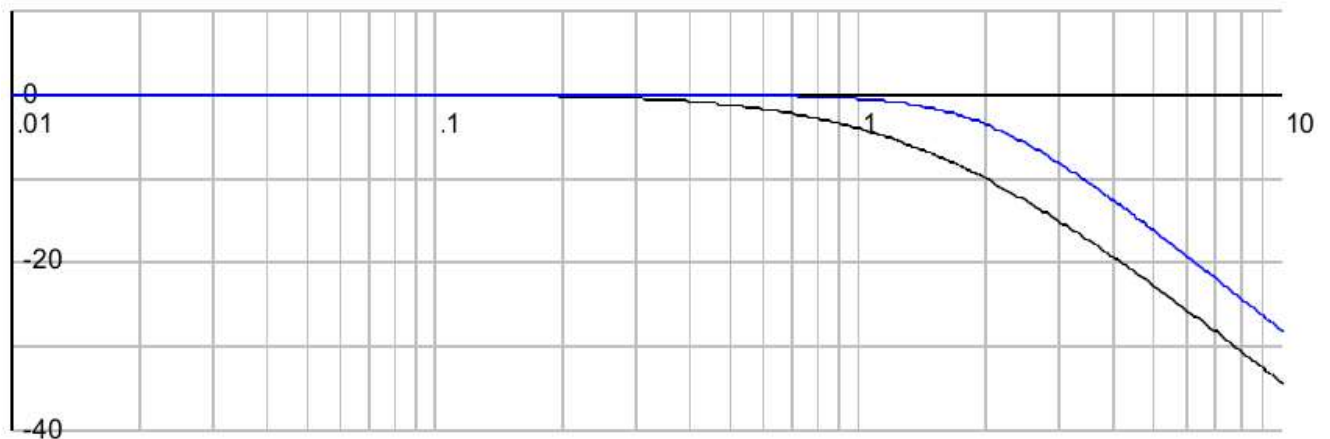
La rapidité d'un système dépend des constantes de temps qui gouvernent son évolution temporelle. (constantes de temps des exponentielles de la réponse indicielle).

Elle est mesurée couramment par le **temps de réponse à 5%** (dans le cas d'une étude temporelle).



Elle peut aussi se caractériser par la **bande passante à -3dB**, dans le cas d'une étude fréquentielle.

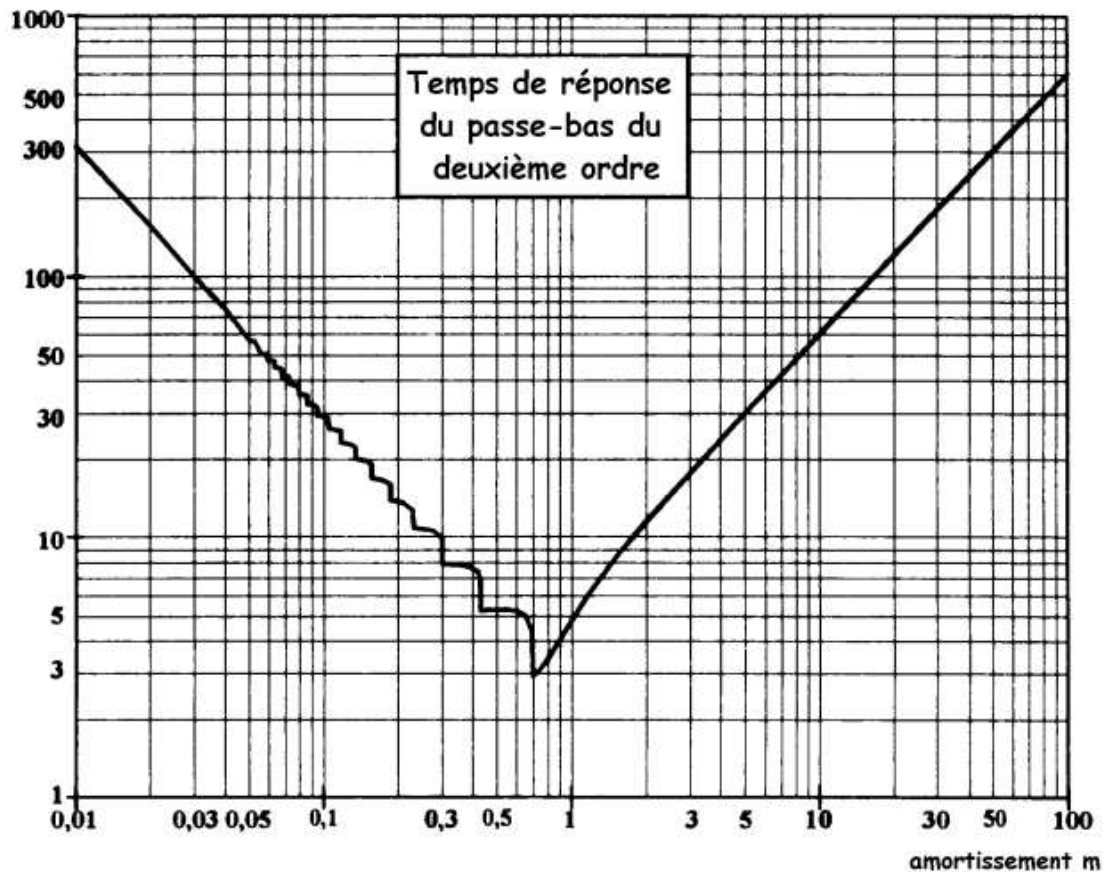
La rapidité d'un système augmente avec sa bande passante.



Déterminer le temps de réponse d'un deuxième ordre d'après la F.T. : utilisation de l'abaque du temps de réponse ;

Pour une valeur d'amortissement m (abscisses) , lire le temps de réponse réduit $\tau_r \cdot \omega_0$ (en ordonnées) et diviser cette valeur par la pulsation propre ω_0 pour obtenir τ_r le temps de réponse à 5% du système.

temps de réponse réduit $\tau_r \omega_0$



Exemple d'application : identifier les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert, puis déterminer son temps de réponse à 5 %.

$$H(p) = \frac{1024000}{102400 + 1440p + 21,64p^2}$$

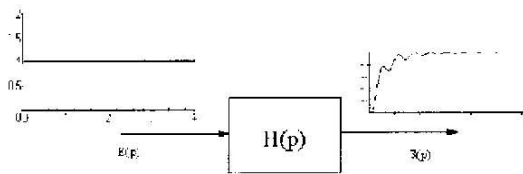
2-3 stabilité

2-3-1 conditions générales de stabilité

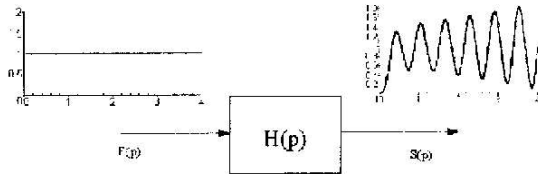
Définition(s) de la stabilité d'un système asservi :

Un système est dit stable si sa réponse à une impulsion (réponse libre) tend vers zéro.

Un système est dit stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



Réponse d'un système stable



Réponse d'un système instable

Considérons une fonction de transfert en boucle ouverte de la forme la plus générale possible :

$$H_{BO}(p) = K \cdot \frac{N(p)}{p^n \cdot D(p)}$$

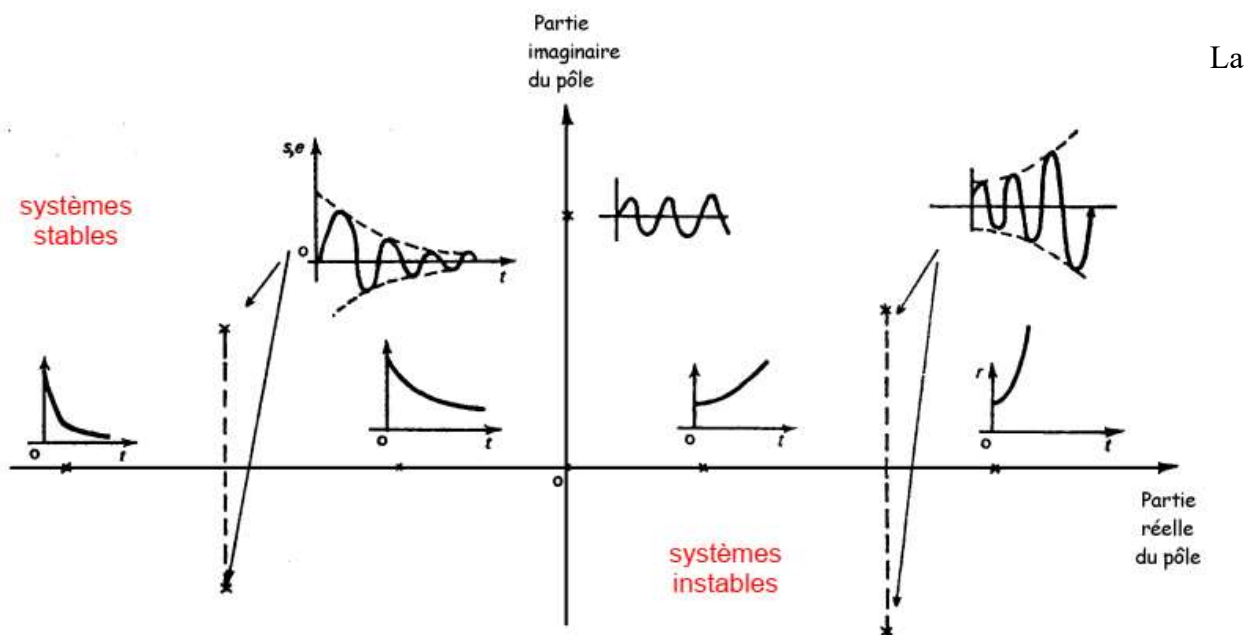
Dans laquelle $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes.

La décomposition en éléments simples de la fonction de transfert en boucle fermée (supposons le retour unitaire) sera de la forme :

$$FTBF(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \sum \frac{C}{p+c} + \sum \frac{Ap+B}{(p+a)^2+b^2}$$

La décomposition faisant apparaître, dans le cas général, des pôles réels (c) et des pôles complexes conjugués ($a+jb$).

Pour chaque terme, la réponse est stable (l'exponentielle e^{-ct} ou e^{-at} tend vers zéro) si la partie réelle du pôle est négative (donc si $-c$ ou $-a$ est négatif).



condition "mathématique" de stabilité d'un système est donc que **tous les pôles** de la FTBF soient à **partie réelle négative**.

2-3-2 Critère graphique de stabilité dans les diagrammes de Bode :

Dans les diagrammes de Bode de la FTBO, on définit une marge de gain et une marge de phase.

Marge de gain :

à la pulsation telle que $\varphi = -180^\circ$, c'est l'écart entre 0dB et la courbe réelle de gain.

La marge de gain n'est définie que pour des systèmes d'ordre supérieur à 2, puisque la phase doit dépasser la valeur -180° .

Marge de phase :

à la pulsation telle que $G = 0\text{dB}$, c'est l'écart entre -180° et la courbe réelle de phase.

Exemple : FTBO d'ordre 3, classe 0 :



Un réglage optimal, souvent recherché, est obtenu pour $M\varphi = 45^\circ$. Cela correspond à un système en boucle fermée qui sera réglé à l'amortissement critique (coef. d'amortissement m ou $\xi = 0,7$), avec le meilleur compromis stabilité / rapidité.