Le théorème de Galois et son problème inverse

Motivation du choix du sujet:

J'ai choisi de travailler sur Galois car c'est un sujet sur les études que je compte réaliser plus tard (Magister). Tout ce que j'acquiers pendant mes recherches me seront bénéfique par la suite et me permettront d'avoir de l'avance l'année prochaine

Ancrage du sujet au thème de l'année:

Le sujet sur Galois peut être comparée au thème Interaction et Homogénéité. Le mot interaction désigne l'action qui est réalisé entre 2 ensembles. L'homogénéité représente les ensembles munis d'un groupe transitif (espace homogène).

Positionnement thématique (phase 2)

MATHEMATIQUES (Algèbre).

Mots-clés (phase 2)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Structure algébrique	*Algebraic structure*
Automorphisme	*Automorphism*
Extension de corps	*Expansion field*
Résolution d'équation polynomiale	*Polynomial equation solving*
Groupe finis	*Finish set*

Bibliographie commentée

Les travaux du géomètre Français Evariste Galois ont permis une avancée spécifique dans la recherche des éléments de résolution d'équations par radicaux. Sa théorie se base principalement sur la permutation des racines. Le principe donne qu'une équation polynomiale est résoluble par radicaux (toutes ces racines appartiennent à une extension par radicaux de son corps de base) si et seulement si son groupe de Galois (son plus grand groupe de substitution respectant les relations des racines) est résoluble. Autrement dit, il existe une suite décroissante de sous-groupe Gi tel que les groupes quotients Gi+1/Gi soit commutatifs. On appelle ce théorème le théorème de Galois. ([2] et [5])

Les différentes approches de ce théorème consistent à s'intéresser à l'utilisation d'éléments primitifs (des valeurs a appartenant à une extension F' d'un ensemble F tel que F[a] soit égal à cette extension). Elles s'intéressent ensuite au Lemme d'Artin. Celui-ci montre qu'un groupe G est un groupe fini d'automorphisme d'un corps F' ou F=(F')^G, alors l'extension F' associée à F est finie et de degré égal au cardinal du groupe G. Elles se basent enfin sur le lemme de Dedekind qui montre qu'une extension finie F' de F est galoisienne si et seulement si son produit tensoriel est isomorphe à un algèbre (F')^n ou n est le degré d'extension de F ([1] et [2]).

La réciproque du théorème de Galois pose la question suivante: peut-on dire que tout groupe G est groupe de Galois sur K si il existe un polynôme P irréductible et séparable sur k tel que Gal(P(X)/k)=G. Cette démonstration existe pour les groupes abéliens finis sur Q. Elle est démontrée grâce à un isomorphisme entre tout groupe abélien fini et un produit direct de groupe cyclique. On s'intéresse ensuite au théorème de Dirichlet montrant que pour tout entier naturel n supérieur à 2, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n.

Cependant, le problème inverse de Galois n'est pas démontré pour les groupes non abéliens à ce jour. ([3] et [4])

Problématique retenue

Par définition, le théorème de Galois nous dit qu'une équation polynomiale est résoluble si et seulement si son Groupe de Galois est résoluble. Cependant, peut-on dire qu'un groupe de Galois est résoluble si son équation polynomiale est résoluble par radicaux?

Objectifs du TIPE

Mon TIPE se basera dans un premier temps sur la définition des différents objets permettant de comprendre le théorème de Galois avant d'aller s'intéresser au problème inverse de Galois pour des cas concrets.

Abstract

I decided to work on Galois theory. It says that a polynomial equation is solvable by radicals only if his Galois group is tractable. After a long time working on Michel Boze's document, I decided to work on Galois extensions of rationals set, on cyclotomic bodies. This work is a demonstration of the inverse problem of Galois for the abelian group.

Références bibliographiques (phase 2)

[1] Antoine Chambert-Loir : La "théorie de Galois" et son enseignement : *http://www.galois.ihp.fr/wp-content/uploads/2011/12/A.-Chambert-Loir.pdf*
[2] Michel Goze, Elisabeth Remm : Théorie des Corps : *http://livres-mathematiques.fr/onewebmedia/Theorie%20des%20Corps7.pdf*
[3] François Legrand : Une introduction au problème inverse de Galois : *https://lmb.univ-fcomte.fr/IMG/pdf/slides_legrand_francois_25janvier2013.pdf*
[4] Pierre Dèbes : Autour du problème inverse de Galois : *http://www.galois.ihp.fr/wp-content/uploads/2012/03/P.-Debes.pdf*
[5] J. LIOUVILLE : Oeuvre Mathématique d'Evariste Galois : *http://rcin.org.pl/Content/5980/WA35_17025_6234_Oeuvres.pdf*

DOT

[1] *Etude en détail du document de Michel Goze*

[2] *Rencontre avec un étudiant préparant l'agrégation*

[3] *Travaux sur la réciproque du théorème de Galois*

[4] *Travaux sur la théorie de Galois*