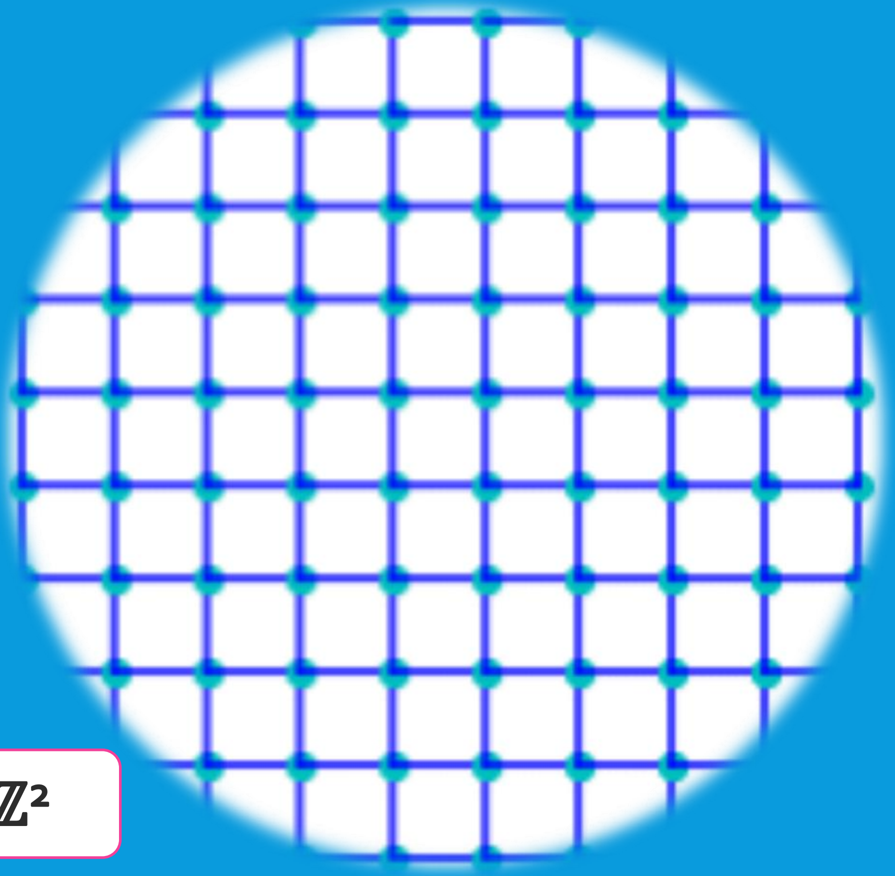
ÉTUDE DE LA THÉORIE DE LA PERCOLATION

Monteil Adrien, MP

I- INTRODUCTION ET DÉFINITIONS

Notations

- Graphe : $G=(E,V)$
- E ensemble des arêtes e
- V ensemble des sommets
- $\omega(e)=\begin{cases} 1 \text{ si } e \text{ ouverte} \\ 0 \text{ si } e \text{ fermée} \end{cases}$



Réseau $\mathbb{Z}^2$

I- Introduction et définitions

- **Percolation de Bernoulli :** $\begin{cases} \mu(\omega(e)=1) = p \\ \mu(\omega(e)=0) = 1-p \end{cases}$

- $\mathbb{P}_P = \prod \mu$

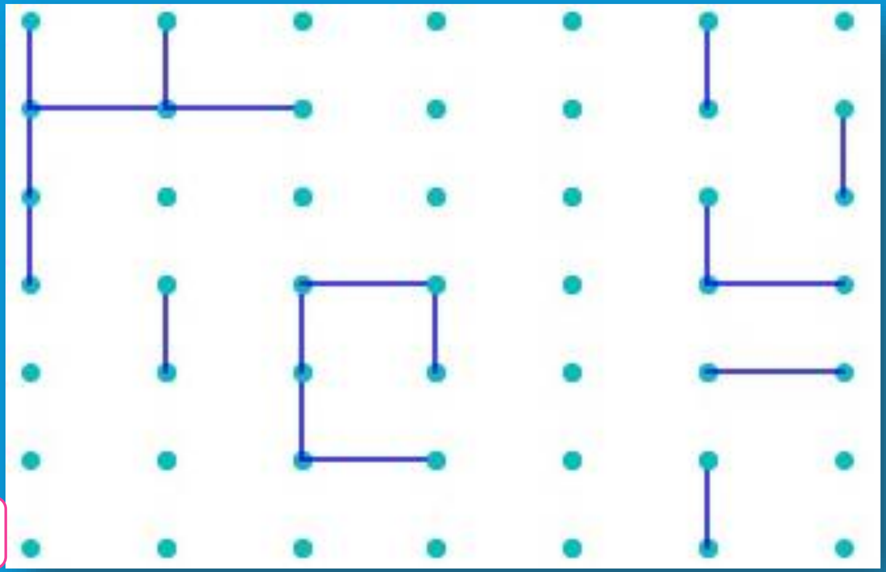
- Cluster ouvert : $C(x) = \{\, y \in V,\ x \leftrightarrow y \,\}$

- Probabilité de percolation : $\theta(p,x) = \mathbb{P}_P(|C(x)|=\infty)$

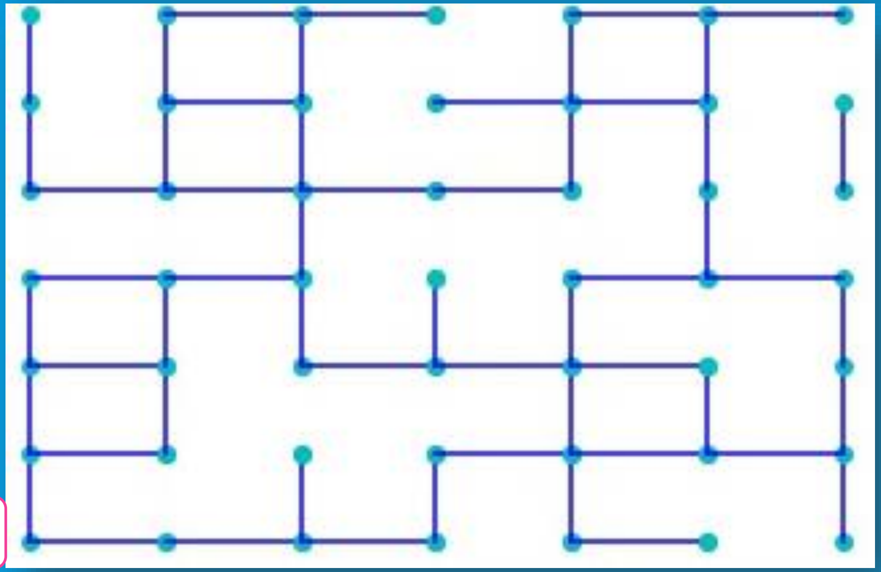
- Probabilité critique : $p_c = \sup\{p,\ \theta(p)=0\}$

- A évènement croissant si

$$\mathbb{P}_{p1}(A) \leq \mathbb{P}_{p2}(A) \quad ; \quad \text{pour } p_1 \leq p_2$$



p=0,2



p=0,7

$0 < p_c < 1$

Preuve :

- $0 < p_c(d)\ ;\ d \geq 2$

$\mathbb{P}_p(B(n)) = \mathbb{P}_p(N(n) \geq 1) = \mathbb{P}_p(\cup_{k=1}^{\infty} N(n) = k)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_p\,(N(n) = k)$

$\leq E(N(n))$

$= p^n \times \sigma(n)$

$\leq 2d(2d-1)^n p^n$

$0<p<\frac{1}{2d-1}$, $\theta(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}_p(B(n)) = 0$

- $p_c(d) < 1\ ;\ d \geq 2$: $p_c(d) \leq p_c(d-1) \leq \ldots \leq p_c(2) = \frac{1}{2} < 1$

II- THÉORÈMES PRINCIPAUX

L'inégalité BK (Van der Berg, Kesten)

- Pour A et B évènements croissants, on a

$$\mathbb{P}_P(A \circ B) \leq \mathbb{P}_P(A) \times \mathbb{P}_P(B)$$

avec (A o B) : "A et B se réalisent sur des arêtes disjointes"

L'inégalité FKG (Fortuin, Kasteleyn, Ginibre)

- Pour A et B évènements croissants, on a

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A) \times \mathbb{P}_p(B)$$

- Pour deux variables aléatoires croissantes X et Y,

$$\mathbb{E}[XY] \geq \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{P}_P(A \cap B) \geq \mathbb{P}_P(A) \times \mathbb{P}_P(B)$$

Preuve :

- Pour A croissant et B décroissant, on a $A \circ B = A \cap B$
- Pour A et B croissants :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_P(A \cap B) &= \mathbb{P}_P(A) - \mathbb{P}_P(A \cap B^C) \\
&= \mathbb{P}_P(A) - \mathbb{P}_P(A \circ B^C) \\
&\geq \mathbb{P}_P(A) - \mathbb{P}_P(A) \times \mathbb{P}_P(B^C) \\
&\geq \mathbb{P}_P(A)\,[\,1 - \mathbb{P}_P(B^C)\,] \\
&\geq \mathbb{P}_P(A) \times \mathbb{P}_P(B)
\end{aligned}$$

<u>Application :</u> la probabilité de percolation ne dépend pas du sommet choisi ➔ $\mathbb{P}_p(|C(x)|=\infty) = \mathbb{P}_p(|C(y)|=\infty)$

$$\theta(p,x) = \mathbb{P}_p\big((x\leftrightarrow y) \cap (y\leftrightarrow\infty) \big) \geq \mathbb{P}_p(x\leftrightarrow y) \times \mathbb{P}_p(y\leftrightarrow\infty)$$
$$= \mathbb{P}_p(x\leftrightarrow y) \times \theta(p,y)$$

D'où $p_c(x) \leq p_c(y)$

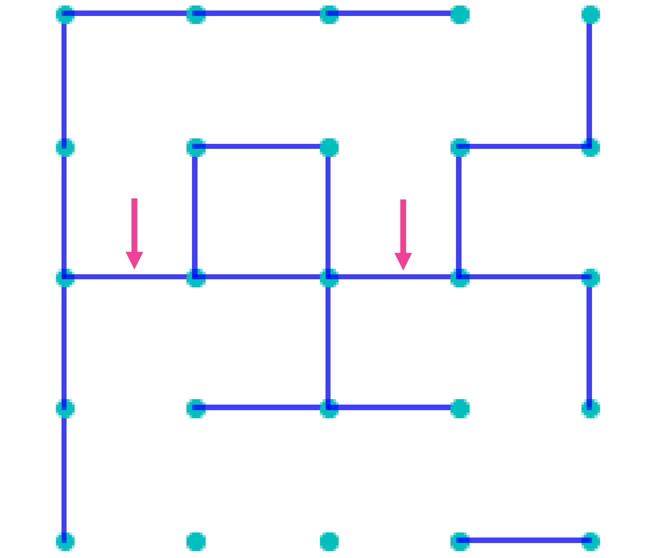
➔ On choisit de se placer à l'origine

Formule de Russo

- Soit A un évènement croissant ne dépendant que d'un nombre fini d'arêtes. On a alors

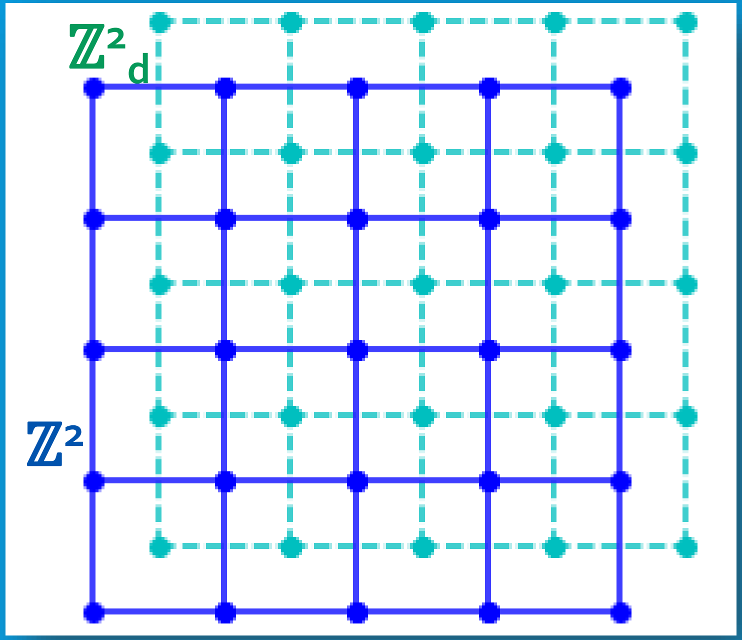
$$\frac{d}{dp}\mathbb{P}_P(A) = \mathbb{E}_P(N(A))$$

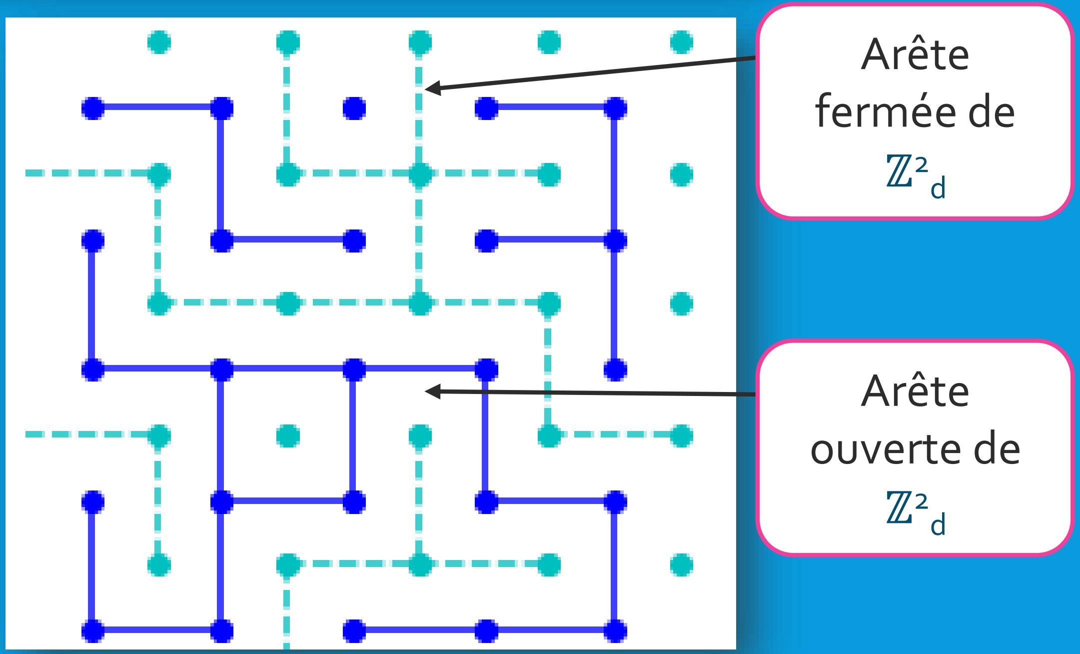
Où N(A) est le nombre d'arêtes « cruciales » pour A



Théorème

- La probabilité critique pour la percolation par lien sur le réseau $\mathbb{Z}^2$ vaut $\frac{1}{2}$

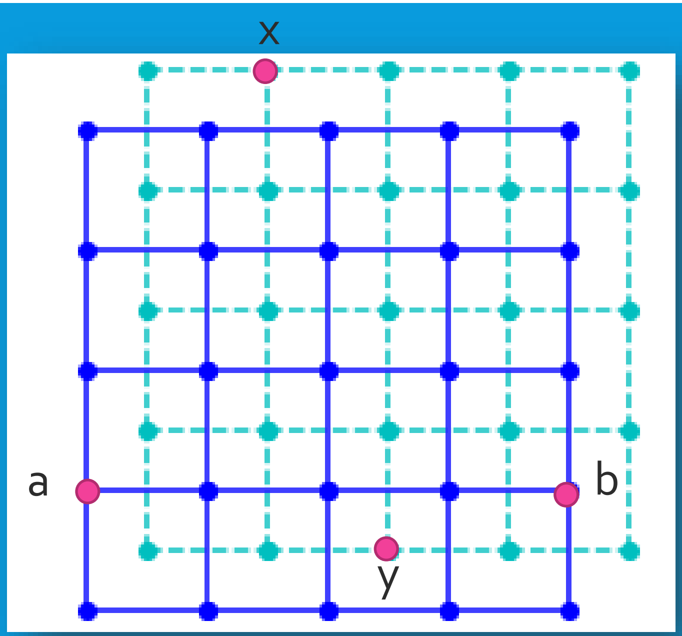


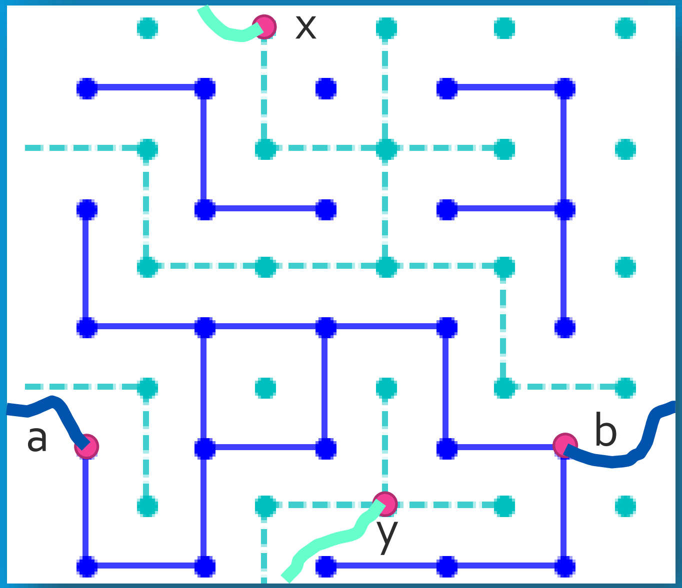


Preuve :

$$\theta(\tfrac{1}{2}) = 0\text{ , d'où } p_c \geq \frac{1}{2}$$

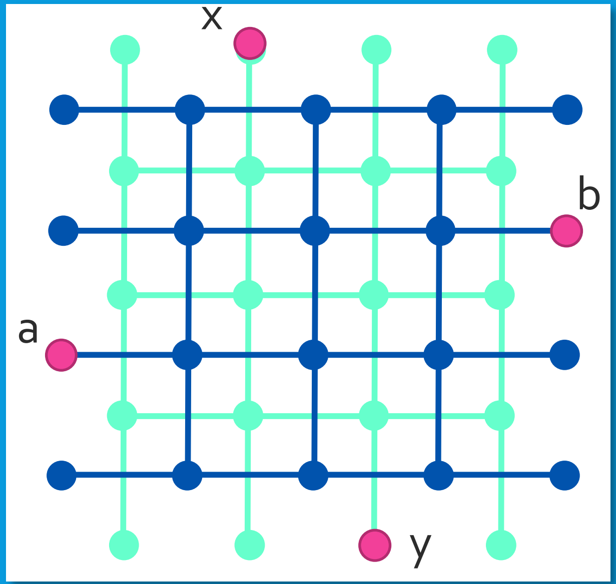
- A(n) : « le côté gauche et droit de la boite b(n) (respectivement le côté haut et bas de la boite dual $b(n)_d$) appartiennent à un cluster ouvert (respectivement fermé) infini »
- On suppose $\theta(\frac{1}{2}) > 0 \rightarrow \mathbb{P}_{1/2}(A(n)) \geq \frac{1}{2}$





$$p_c \leq \frac{1}{2}$$

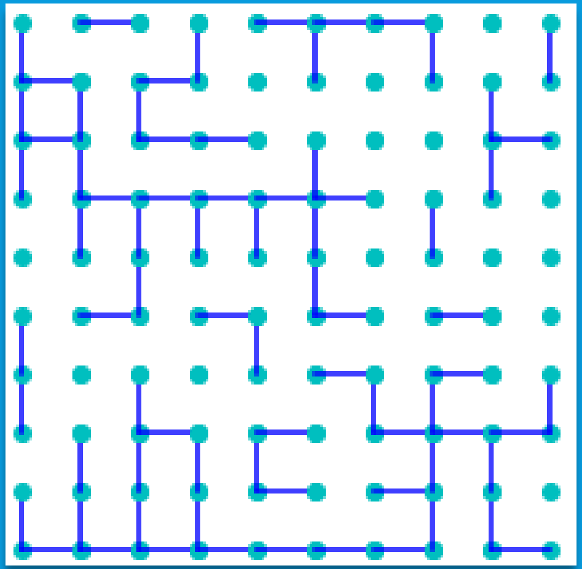
- A_n : « il existe un chemin ouvert de gauche à droite dans S(n) »
- B_n : « il existe un chemin fermé de haut en bas dans $S(n)_d$ »

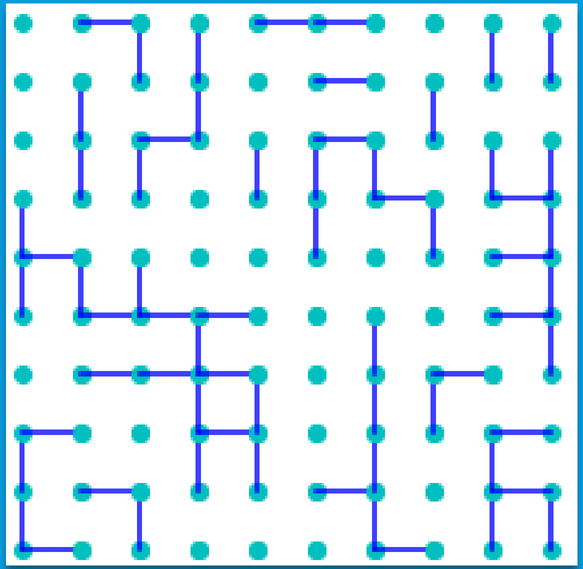


S(3) et $S(3)_d$

- $A_n \cap B_n = \emptyset$
- $\mathbb{P}_P(A_n) + \mathbb{P}_P(B_n) = 1$
- $\mathbb{P}_P(B_n) = \mathbb{P}_{1-P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}_{1/2}(A_n) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}_{p<p_c}(o \leftrightarrow L_n) \leq e^{-\beta n} \quad \rightarrow \mathbb{P}_{1/2}(A_n) \leq (n+1)e^{-\beta n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

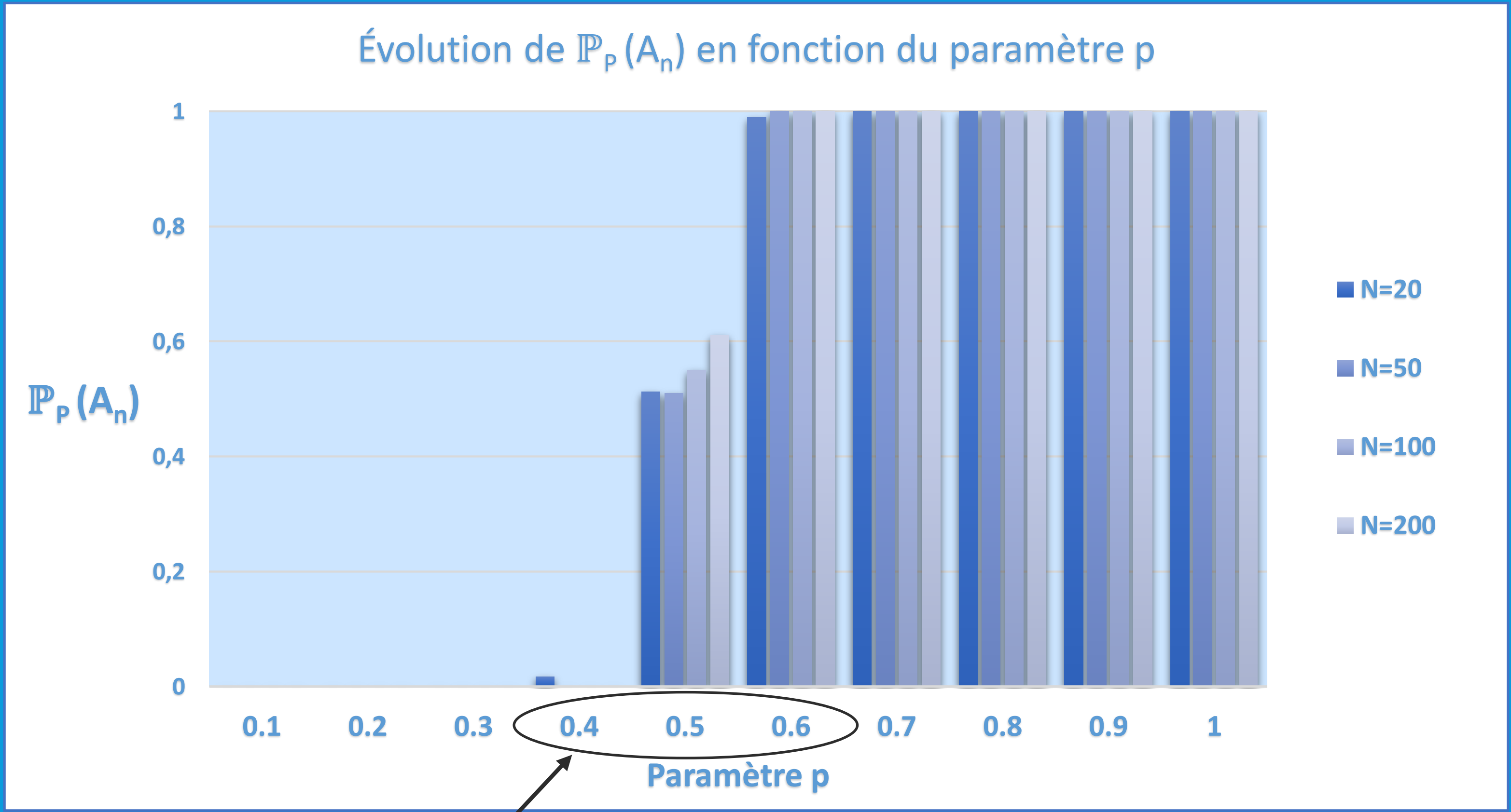
III- MODÉLISATION





A_n : « il existe un chemin ouvert reliant un sommet du côté gauche à un sommet du côté droit »

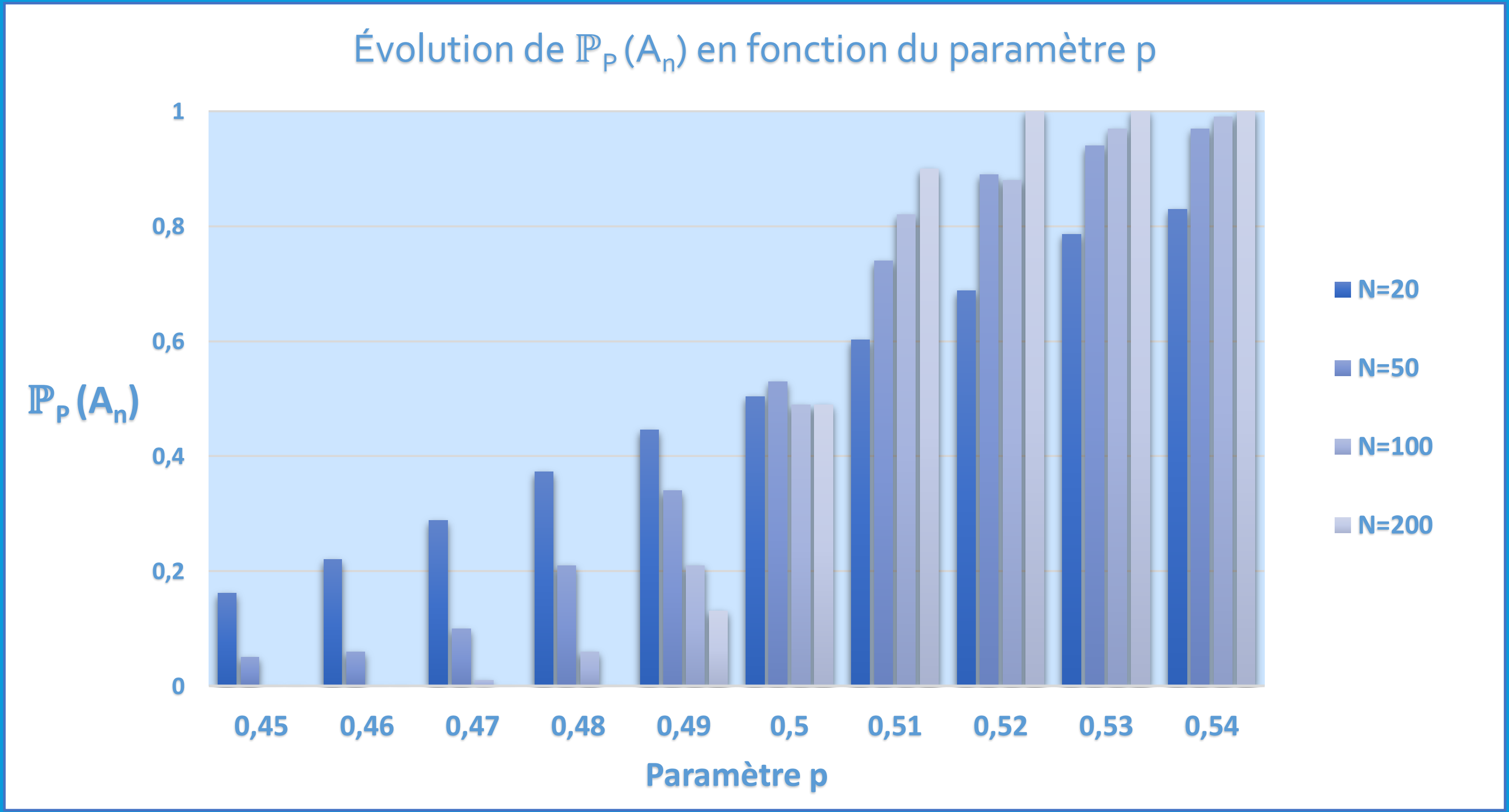
III- Modélisation



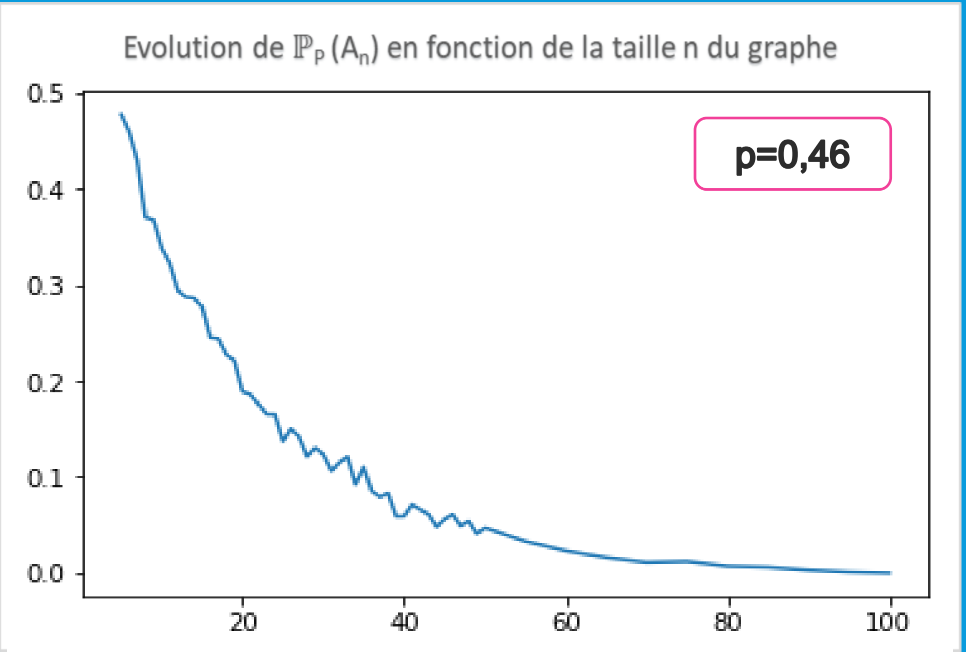
Zone critique

→ Étude plus localisée

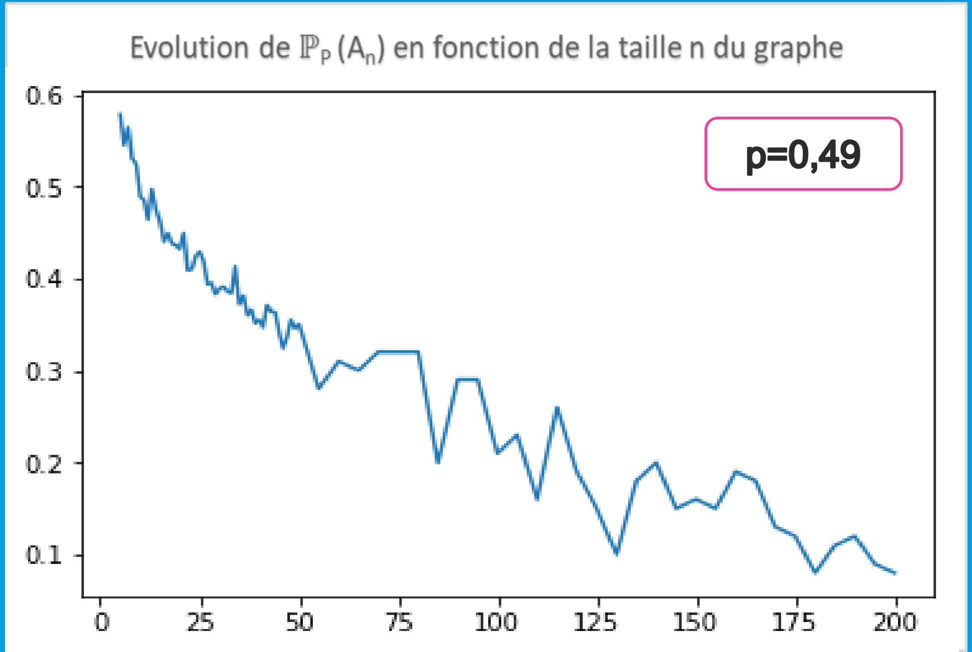
III- Modélisation



$$\mathbb{P}_{p<p_c}(o \leftrightarrow L_n) \leq e^{-\beta n}$$

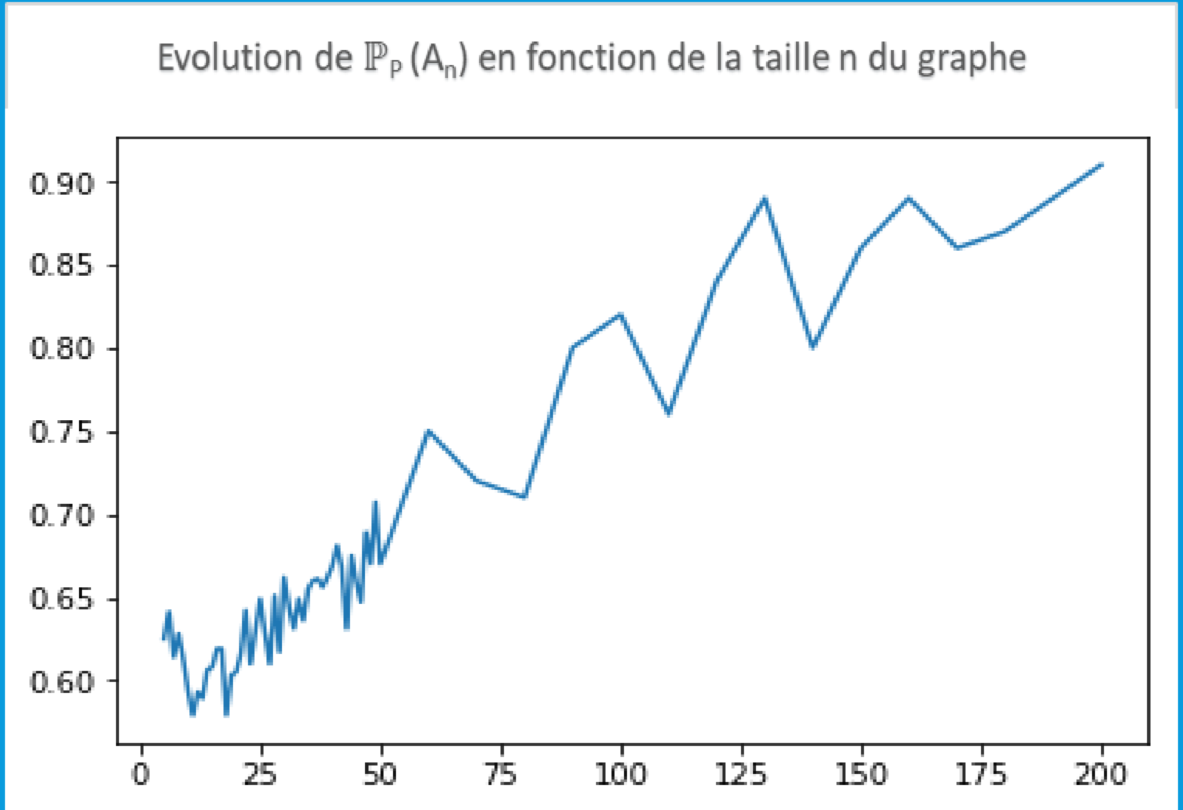


β = -0,05782215



β = -0,00820749

III- Modélisation



p=0,51

CONCLUSION

ANNEXES

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A) \times \mathbb{P}_p(B)$$

Preuve :

- $(\Gamma, F, \mathbb{P}_{12}) = (\Gamma_1 x \Gamma_2, F_1 x F_2, \mathbb{P}_1 x \mathbb{P}_2)$
- $x \times y \in \Gamma_1 x \Gamma_2$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$; $y=(y_1, y_2, \dots, y_m)$
- $A' = \{ x \times y \in \Gamma_1 x \Gamma_2 , x \in A \}$

  $B'_k = \{ x \times y , (y_1, y_2, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in B \}$
- $\mathbb{P}(A \circ B) = \mathbb{P}_{12}(A' \circ B'_o)$
- $A' \circ B'_m = A' \cap B'_m \rightarrow \mathbb{P}_{12}(A' \circ B'_m) = \mathbb{P}_{12}(A' \cap B'_m)$

  $= \mathbb{P}_{12}(A') \times \mathbb{P}_{12}(B'_m)$

  $= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

$$\frac{d}{dp}\mathbb{P}_P(A) = \mathbb{E}_P(N(A))$$

Preuve :

- $p = \{\, p(e)\,;\, e \in E \,\}$
- $(\, X(e)\,;\, e \in E\,)$ famille de variables aléatoire $\rightarrow U([0,1])$
- ηp tel que $\eta p(e) = 1$ si $X(e) < p$ et $\eta p(e) = 0$ sinon
- $\mathbb{P}_P(A) = \mathbb{P}(\eta p \in A)$
- $f \in E$, $p'(e) = p(e)$ si $e \neq f$, $p'(e) = p'(f)$ si $e=f$
- $\mathbb{P}_{P'}(A) - \mathbb{P}_P(A) = \mathbb{P}(\eta p' \in A) - \mathbb{P}(\eta p \in A) = \mathbb{P}(\eta p' \in A\,,\, \eta p \notin A)$

$$= \mathbb{P}(\, \{p(f) \leq X(e) \leq p'(f)\} \cap \{\, f \text{ essentiel pour } A\}\,)$$

$$= \mathbb{P}(\, \{p(f) \leq X(e) \leq p'(f)\}\,) \times \mathbb{P}(\, \{f \text{ essentiel pour } A\}\,)$$

II- Théorèmes principaux – Formule de Russo

On a $\frac{d}{dp(f)}\mathbb{P}_{P}(A) = \mathbb{P}(\{f \text{ essentiel pour } A\})$

- $\mathbb{P}_P(A)$ dépend de $(p(f_i))_{1\leq i\leq m}$

- $\frac{d}{dp}\mathbb{P}_P(A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{d}{dp(fi)}\mathbb{P}_{P}(A)$

$= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\{fi \text{ essentiel pour } A\})$

$= \mathbb{E}(N(A))$