Chemins auto-évitants

N° d'inscription : 17536

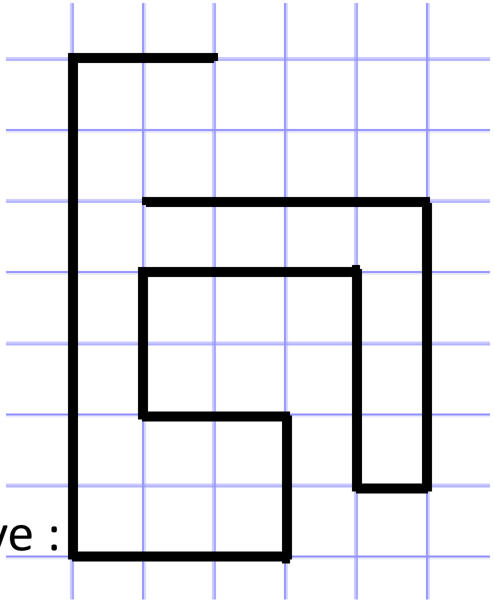
Définitions

- Graphe
- Chemin

- <u>Chemins auto-évitants</u>:

→ Chemin ne visitant un somme au plus une fois

→ Suite finie de plus proches voisins dans le graphe injective :



Exemple de C.A.E dans
Le réseau carré $\mathbb{Z}^2$

Soit

$$n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![0, n]\!], \omega = (\omega(0), \dots, \omega(i), \dots, \omega(n))$$

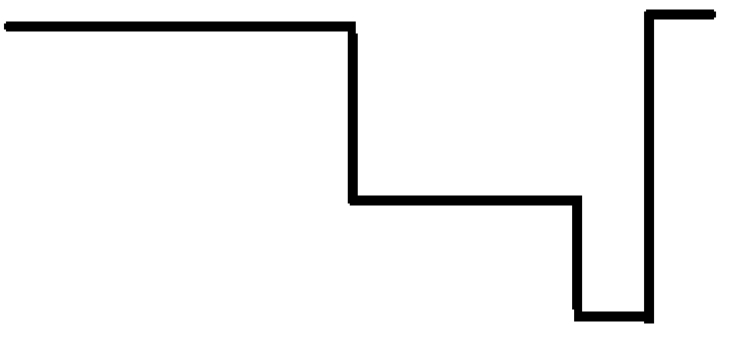
$i < n \quad |\omega(i+1) - \omega(i)| = 1$ où |.| est une norme du réseau

c_n représente le nombre de chemins auto-évitants de longueur n.

- Ponts : C.A.E. qui vérifie :
- ω est un pont de longueur n :

$$\forall i \le j, \omega_1(i) \le \omega_1(j)$$

Où $\omega_1(i)$ désigne l'abscisse du ie point



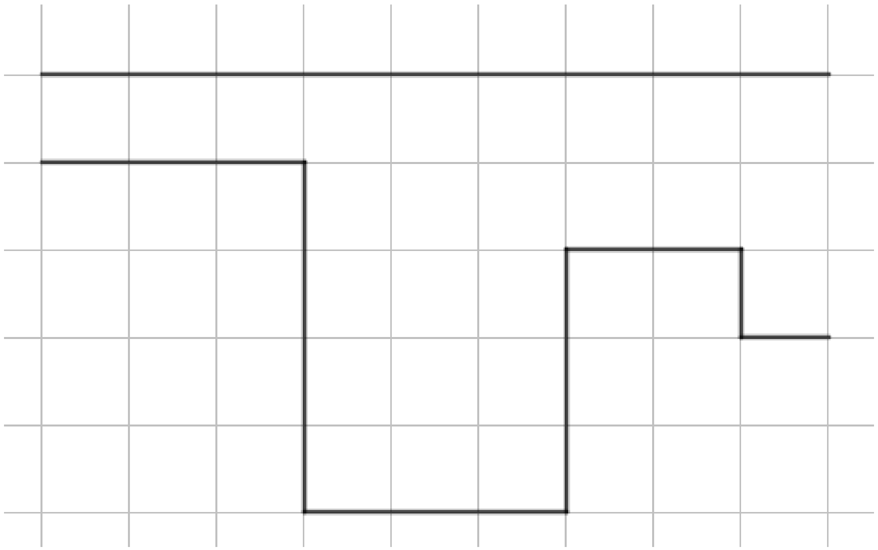
Exemple de pont

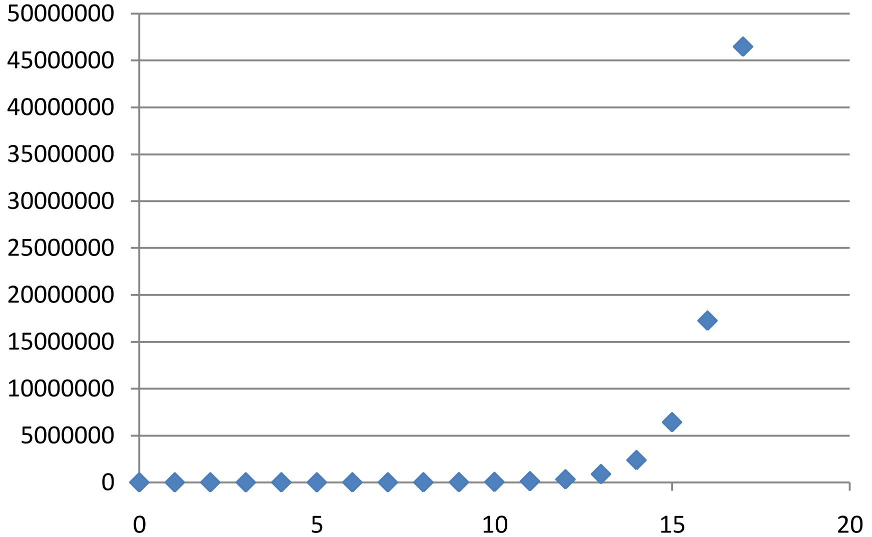
Problème

- Evaluer le nombre de C.A.E de longueur n.

- Difficile de compter les longs chemins.

Dans un réseau de dimension d : $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_n \geq d^n$





c_n en fonction de n

Substitution

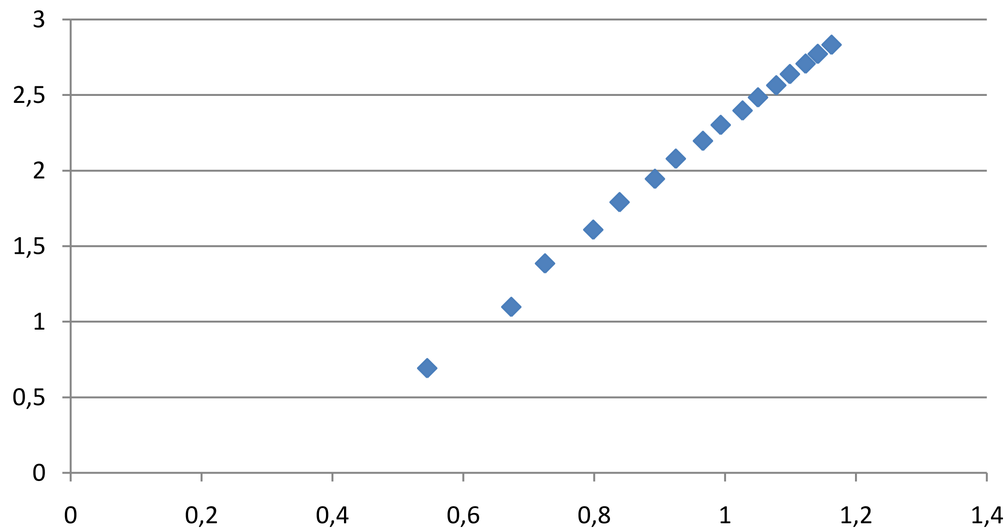
- Constante de connectivité μ :

$$\lim_{n\to\infty} {c_n}^{1/n} = \mu$$

- Comparaisons asymptotiques :

$$c_n = \mu^{n+o(n)}, \mu^n \leq c_n \leq \mu^n e^{O(\sqrt{n})}, \ \exists A \in]0,+\infty[, c_n \sim A\mu^n n^\alpha$$

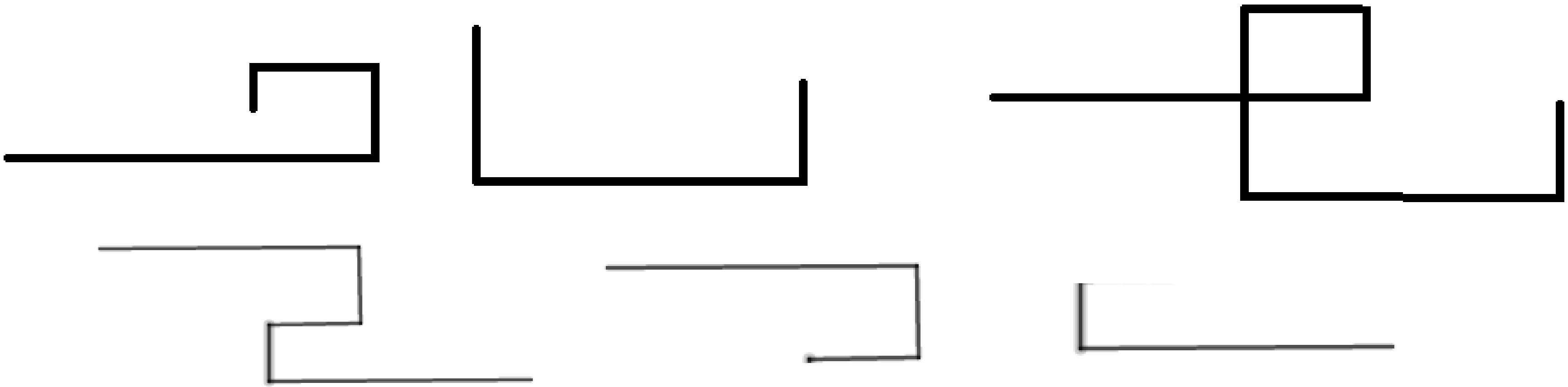
Sur le réseau carré : $\mu \approx 2{,}6381585$; $\alpha = 11/32$



$\ln\left(\frac{c_n}{\mu^n}\right)$ en fonction de $\ln n$

Existence de μ

- Première inégalité : $c_{m+n} \leq c_m c_n$

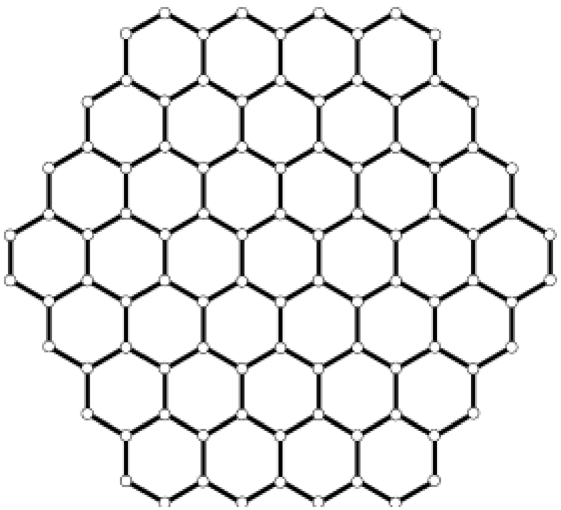


- Donc la suite $(\ln c_n)$ est sous additive.

$$\lim \frac{\ln c_n}{n} = \lim \ln c_n^{\frac{1}{n}} = \inf \frac{\ln c_n}{n} = \nu$$

- On obtient donc : $\mu = e^{\nu}$

Réseau hexagonal



<u>Valeur exacte</u>

$$\lim_{n\to\infty} {c_n}^{1/n} = \mu = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Notations :

- $\mathbb{H}$ le réseau hexagonal
- H ensembles des milieux des arêtes de $\mathbb{H}$
- $\ell(\gamma)$ la longueur du chemin γ

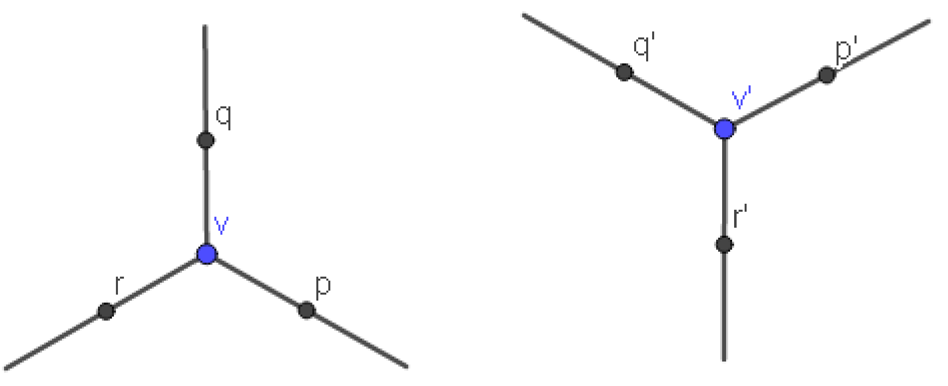
Soit $\Omega \subset H$. On note $V(\Omega)$ l'ensemble des sommets de Ω.

Lemme 1

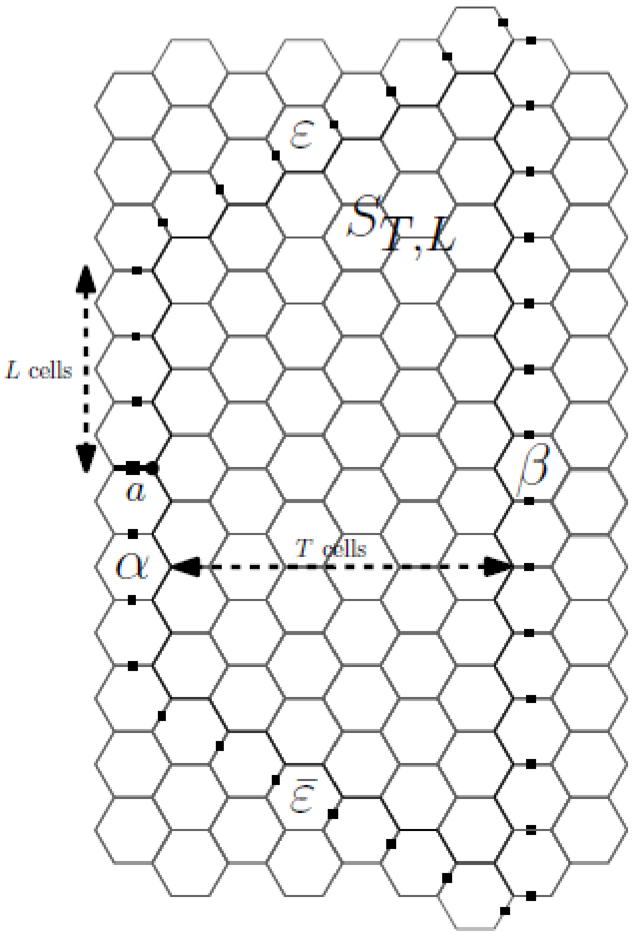
$$\forall(a,z) \in \partial\Omega \times \Omega, F(z) = F_\Omega(a,z,\sigma,x) = \sum_{\gamma:a\to\Omega} e^{-i\sigma W_\gamma(a,z)} x^{l(\gamma)}$$

Lemme 1 : si $x = 1/\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sigma = 5/8$. Soit $v \in V(\Omega)$ et $(p,r,q) \in H^3$, où p, r et q sont les plus proches voisins de v qui se suivent le sens horaire.

$$(p-v)F(p) + (q-v)F(q) + (r-v)F(r) = 0$$



Un domaine observable

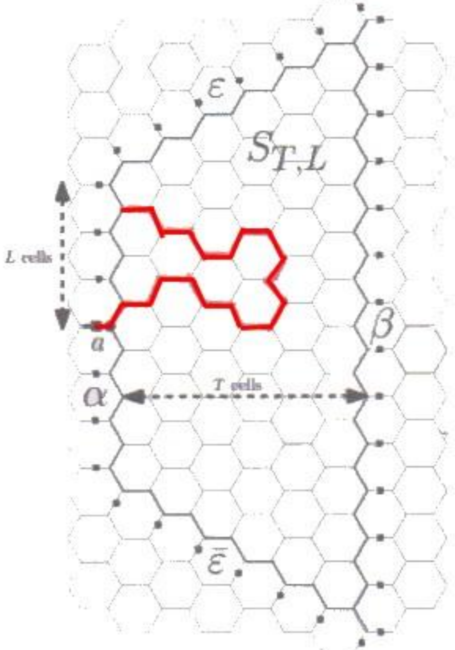


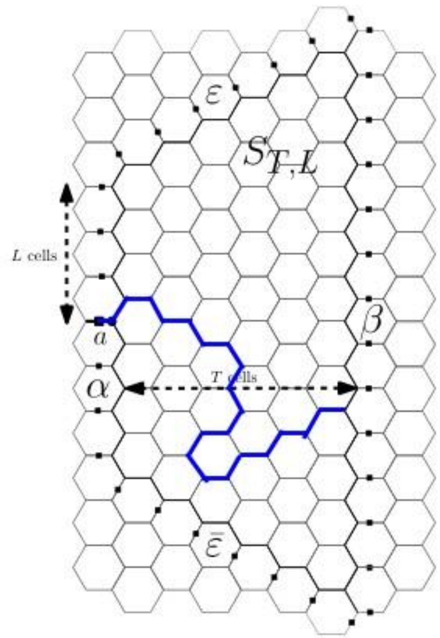
$$V(S_T) = \left\{ z \in V(\mathbb{H}), 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{3T+1}{2} \right\}$$

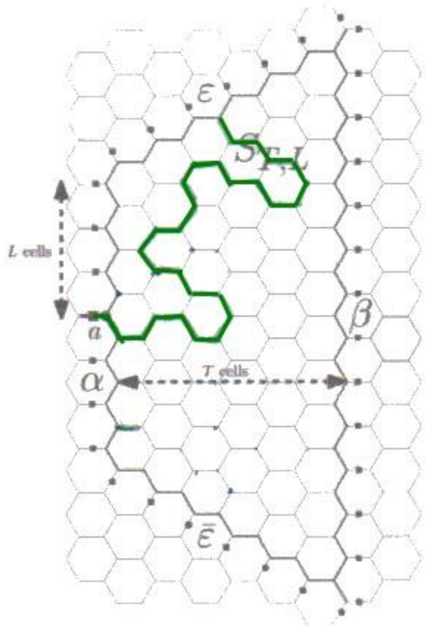
$$V(S_{T,L}) = \left\{ z \in V(S_T), \left| \sqrt{3}\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z) \right| \leq \frac{3T+1}{2} \right\}$$

Lemme 2

$$A_{T,L}^{x} = \sum_{\gamma:a\to\alpha-\{a\}} x^{\ell(\gamma)} \qquad B_{T,L}^{x} = \sum_{\gamma:a\to\beta} x^{\ell(\gamma)} \qquad E_{T,L}^{x} = \sum_{\gamma:a\to\varepsilon\cup\bar{\varepsilon}} x^{\ell(\gamma)}$$







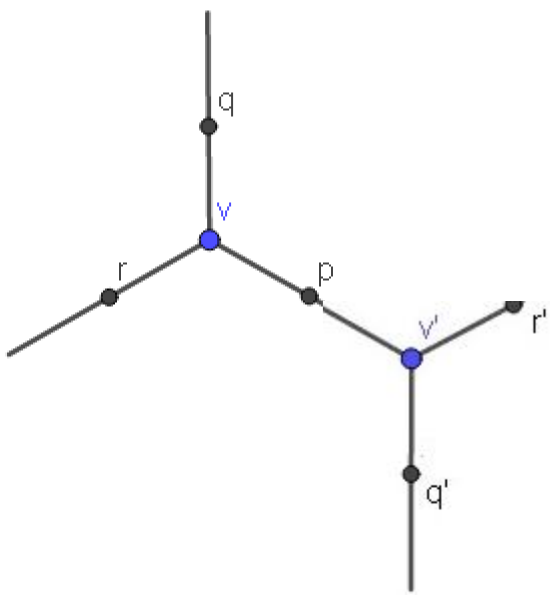
Si $x = x_c = 1/\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\boxed{1 = c_\alpha A_{T,L}^{x_c} + B_{T,L}^{x_c} + c_\varepsilon E_{T,L}^{x_c}}$$

Où $c_\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $c_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Démonstration (Lemme 2)

$$-\sum_{z\in\alpha} F(z) + \sum_{z\in\beta} F(z) + j\sum_{z\in\varepsilon} F(z) + \bar{j}\sum_{z\in\bar{\varepsilon}} F(z) = 0$$ Où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$



$$\begin{cases} jF(p) + 1.F(q) + \bar{j}F(r) = 0 \\ -jF(p) + (q' - v')F(q') + (r' - v')F(r') = 0 \end{cases}$$

Somme sur α

$$\sum_{z\in\alpha} F(z) = F(a) + \sum_{z\in\alpha-\{a\}} F(z)$$

$$= F(a) + \frac{1}{2}\sum_{z\in\alpha-\{a\}} F(z) + F(\bar{z})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{-i\sigma\pi} + e^{i\sigma\pi}\right)A_{T,L}^{x} = 1 - \cos\frac{3\pi}{8}A_{T,L}^{x}$$

Somme sur les bords haut et bas

$$j\sum_{z\in\varepsilon} F(z) + \bar{j}\sum_{z\in\bar{\varepsilon}} F(z) = \cos\frac{\pi}{4}E_{T,L}^{x}$$

Somme sur β

$$\sum_{z\in\beta} F(z) = B_{T,L}^{x}$$

Conséquence du lemme 2

$$A_T^x = \lim_{L\to+\infty} A_{T,L}^x = \sum_{\gamma\subset S_T:a\to\alpha-\{a\}} x^{\ell(\gamma)} \qquad B_T^x = \lim_{L\to+\infty} B_{T,L}^x = \sum_{\gamma\subset S_T:a\to\beta} x^{\ell(\gamma)}$$

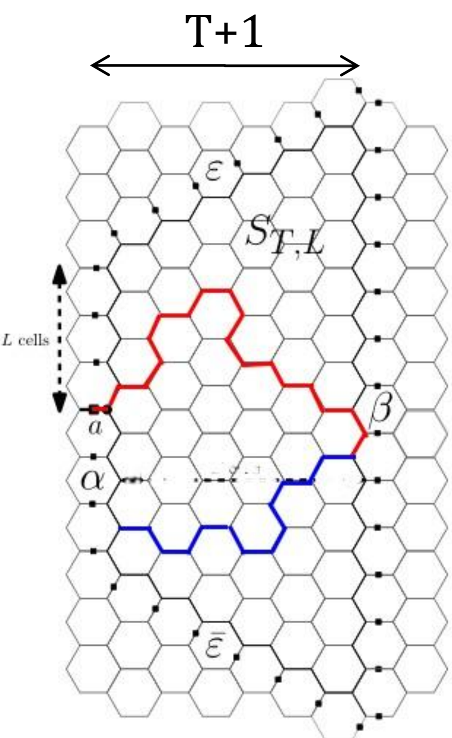
$$E_T^x = \lim_{L\to+\infty} E_{T,L}^x = \sum_{\gamma\subset S_T:a\to\varepsilon\cup\bar{\varepsilon}} x^{\ell(\gamma)}$$

Preuve

$$\forall x \geq 0, Z(x) = \sum_{\gamma: a \to H} x^{\ell(\gamma)} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$$

Si $E_T^{x_c} > 0$: $\quad Z(x_c) \geq \sum_{L>0} E_{T,L}^{x_c} \geq \sum_{L>0} E_T^{x_c} = +\infty$

Sinon : $c_\alpha A_{T,L}^{x_c} + B_{T,L}^{x_c} + c_\varepsilon E_{T,L}^{x_c} = 1 \Longrightarrow 0 = c_\alpha \left(A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c}\right) + \left(B_{T+1}^{x_c} - B_T^{x_c}\right)$



$$\Longrightarrow \quad c_\alpha x_c \left(B_{T+1}^{x_c}\right)^2 + B_{T+1}^{x_c} \geq B_T^{x_c}$$ car $A_{T+1}^{x_c} - A_T^{x_c} \leq x_c \left(B_{T+1}^{x_c}\right)^2$

$$\Longrightarrow B_T^{x_c} \geq \min\left(B_1^{x_c}, \frac{1}{c_\alpha x_c}\right)/T$$

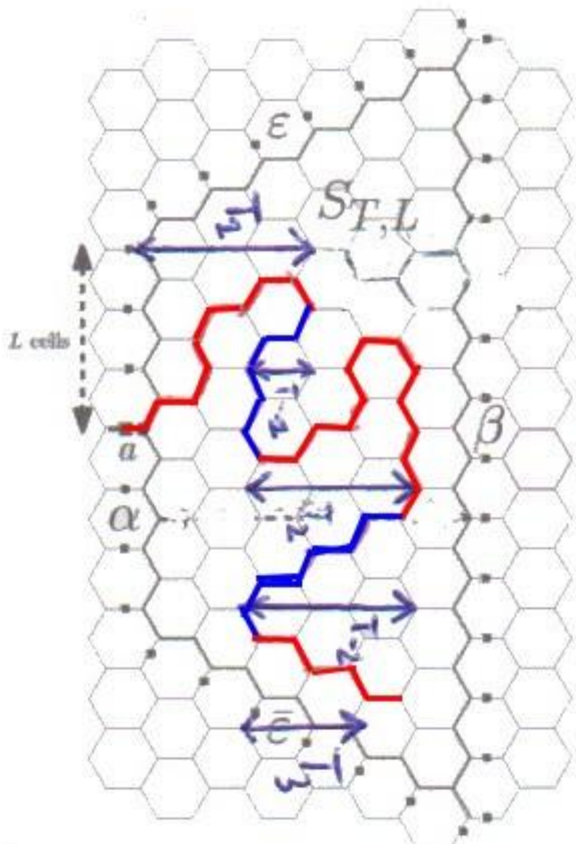
$$\Longrightarrow \quad Z(x_c) \geq \sum_{T>0} B_T^{x_c}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mu \geq {x_c}^{-1} = \sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\forall x < x_c, B_T^x \leq \left(\frac{x}{x_c}\right)^T B_T^{x_c} \leq \left(\frac{x}{x_c}\right)^T$$

Tout C.A.E se décompose en pont de manière unique.

$$Z(x) \leq 2 \sum_{\substack{T_{-i}<\cdots<T_{-1} \\ T_j < \cdots < T_0}} \left(\prod_{k=-i}^{j} B_{T_k}^x \right) = 2 \prod_{T>0} (1 + B_T^x)^2$$



$$\boxed{\mu \leq {x_c}^{-1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

FIN

Annexe : constante de connectivité

- $c_n = \mu^{n+o(n)} \iff \ln c_n = n \ln \mu + o(n)$
- $\mu^n \leq c_n \leq \mu^n e^{O(\sqrt{n})}$

$b_n \leq c_n$ et $b_{n+m} \geq b_n b_m$

Nouvelle constante de connectivité µ’ : $\mu' \leq \mu$

$$c_n \leq b_n e^{O(\sqrt{n})}$$

Annexe : Lemme de Feteke

- On pose : $\alpha = \inf \frac{c_n}{n}$. Soit $\varepsilon > 0, \exists q \in \mathbb{N}^*, \alpha \leq u_q \leq \alpha + \varepsilon$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq q, \exists! (k,r) \in [\![0, q-1]\!]^2, n = kq + r$

$$0 \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{qk}{qk+r}\frac{u_q}{q} + \frac{u_r}{n} \leq \alpha + \varepsilon + \frac{M}{n}$$

Où $M = \max\{|u_1|, |u_2| \dots, |u_q|\}$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{M}{n} \leq \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq n_0, \left|\frac{u_n}{n} - \alpha\right| \leq \varepsilon$$