Étude comportementale à travers la théorie des jeux

Cianchi Baptiste - MP

O. Objectifs

Principal objectif.

Anticipation du comportement de joueurs.

Cadre de l'étude.

Jeux sous forme normale.

Méthodes mises en place.

Détermination de stratégies déterministes ou probabilistes.

I . Étude des stratégies pures

Définitions et notations

Jeu sous forme normale

Un jeu sous forme normale $\Gamma(N, S, g)$ est donné par :

. Un nombre fini de joueurs N.

. $S=\prod_{j=1}^{N} S_j$. $g=(g_j)_{j\in[\![1,N]\!]}$ avec $g_i : \prod_{j=1}^{N} S_j \to \mathbb{R}$

Stratégie pure du joueur i

Plan d'action qui prescrit une action de ce joueur pour chaque fois qu'il est susceptible de jouer. On note s_i une stratégie pure de ce joueur.

Domination

Stratégie strictement dominée

$s_i \in S_i$ strictement dominée si :

$$\exists t_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, g_i(t_i, s_{-i}) > g_i(s_i, s_{-i})$$

Stratégie strictement dominante

$s_i \in S_i$ strictement dominante si :

$$\forall t_i \in S_i, s_i \neq t_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, g_i(s_i, s_{-i}) > g_i(t_i, s_{-i})$$

Profil de stratégie et équilibre

$s = (s_1, \ldots, s_N) \in S$ est un équilibre en stratégie strictement dominante si :

$\forall i \in [\![1, N]\!]$, s_i est strictement dominante.

Équilibre de Nash

Profil et Équilibre de Nash

Un profil de stratégies $s=(s_1, \ldots, s_N) \in S$ est un équilibre de Nash si :

$\forall i \in [\![1, N]\!], \forall t_i \in S_i, g_i(s_i, s_{-i}) \geq g_i(t_i, s_{-i})$

Notations

. $\mathrm{NE}(\Gamma)$: ensemble des équilibres de Nash du jeu Γ.

. $\mathrm{E}(\Gamma)$: ensemble des paiements des équilibres de Nash de Γ.

Processus d'élimination itérée des stratégies strictement dominées

Mathématiquement

On pose $\Gamma_1 = \Gamma$ puis à chaque étape $k \geq 1$:

Si Γ^k n'a pas de stratégie strictement dominée, le processus s'arrête.

Sinon, soit $i \in [\![1, N]\!]$ et $s_i \in S_i^k$ une stratégie strictement dominée de Γ^k .

On pose $\Gamma^{k+1} = (N, S^{k+1}, g)$ avec $S_{-i}^{k+1} = S_{-i}^k$ et $S_i^{k+1} = S_i^{k+1} \setminus \{s_i\}$.

Schématisation du principe

J1 / J2	C	T
C	2,2	-1,3
T	3,-1	0,0

J1 / J2	C	T
~~C~~	~~2,2~~	~~-1,3~~
T	3,-1	0,0

J1 / J2	~~C~~	T
~~C~~	~~2,2~~	~~-1,3~~
T	~~3,-1~~	0,0

On suppose dans cet exemple que le J2 joue en premier, sachant que dans le processus d'élimination des stratégies strictement dominées, le résultat ne dépend pas de l'ordre de jeu.

Comportement dominant sur un jeu concret

Types de joueurs

Rationnel	: Processus élimination.
Rationnel risque	: Risque de non-coopération.
Aléatoire	: Stratégie aléatoire.
Prudent	: Maximise ses gains minimaux.
Non-coopératif	: Contraire de rationnel.
Punitif	: Coup adverse précédent.
Rancunier	: Non-coopératif si trahison.
Donne-chance	: Non-coopératif si 2 trahisons.

Règles du jeu

1 Victoire => +5

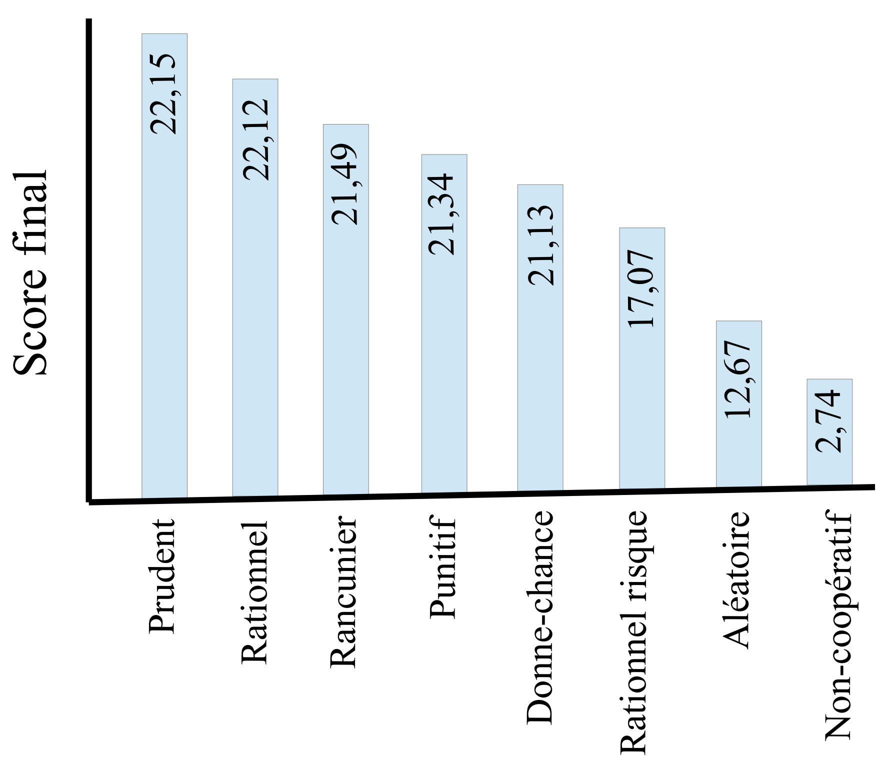
1 Nul => +2

1 Défaite => +0

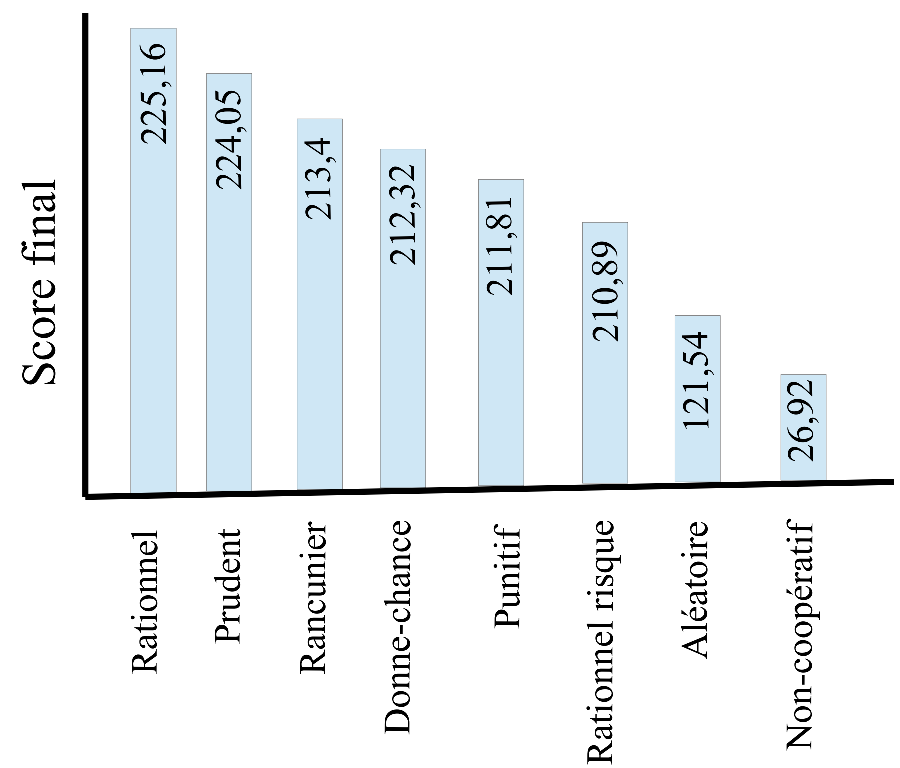
Jeux considéré :

	C	T
C	2,2	-1,3
T	3,-1	0,0

Résultats expérimentaux



1 confrontation – 100 tests

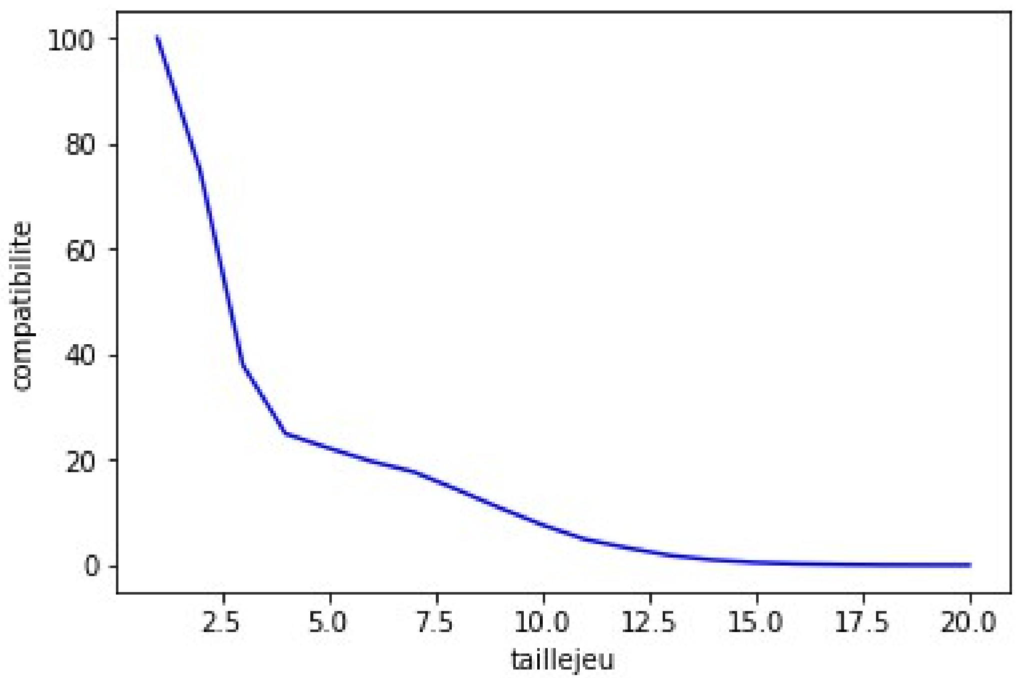


10 confrontations – 100 tests

Résultats expérimentaux

1 confrontation	Victoire	Nul	Défaite
1 - Prudent	25,5	74,5	0
2 - Rationnel	25,625	74,375	0
3 - Rancunier	22,875	77,125	0
4 - Punitif	22,25	77,75	0
5 - Donne-chance	21,375	78,625	0
6 - Rationnel risque	22,125	51,375	26,5
7 - Aléatoire	16,875	36,875	46,25
8 - Non-coopératif	0	17,125	82,875

Existence d'un équilibre de Nash en stratégie pure



Test réalisé sur 10.000 jeux de tailles variant de 1 à 20

Théorème
Jeu résolvable par élimination itérée des stratégies strictement dominées
=> unique équilibre de Nash.

Solution proposée – Théorème de Nash
Tout jeu fini (i.e. avec ensembles de stratégies finis) admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

II . Étude des stratégies mixtes

Définitions et notations

Notations

. Ensemble des stratégies mixtes : $\Delta(S_i)=\left\{ p\in\mathbb{R}^{|S_i|} : \forall\, p_k\,,\, 0\leq p_k\leq 1\,,\, \sum_{k=1}^{|S_i|} p_k=1 \right\}$

. $\Sigma_i=\Delta(S_i)$. $\Sigma=\prod_i \Sigma_i$. $\Sigma_{-i}=\prod_{j\neq i} \Sigma_j$

Extension jeu mixte sous forme normale

L'extension mixte du jeu sous forme normale est $\Gamma(N\,,\Sigma\,,g)$.

Stratégie mixte du joueur i

Distribution de probabilités p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i. On note σ_i une stratégie mixte de ce joueur.

Établir un équilibre de Nash en stratégie mixte

Méthodologie

. Processus d'élimination des stratégies strictement dominées.

. Affecter $(p_1, \dots, p_n)$ et $(p'_1, \dots, p'_m)$ aux stratégies des joueurs.

. Les probabilités s'obtiennent en résolvant les systèmes suivant :

$$\left|\begin{array}{l} E(U(s'_1)) = \dots = E(U(s'_m)) \\ p_1 + \dots + p_n = 1 \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} E(U(s_1)) = \dots = E(U(s_n)) \\ p'_1 + \dots + p'_m = 1 \end{array}\right.$$

E(U(x)) : Espérance de l'utilité en jouant la stratégie x.

Justification

Soit (Γ^k) la suite de jeux obtenue par une procédure d'élimination itérée des stratégies strictement dominées, alors $\forall\, k \geq 1, \mathrm{NE}(\Gamma^k) = \mathrm{NE}(\Gamma)$.

Exemples de résolution

	P	F	C
P	0 , 0	-1 , 1	1 , -1
F	1 , -1	0 , 0	-1 , 1
C	-1 , 1	1 , -1	0 , 0

$\Rightarrow$

$$V_{J1}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}, V_{J2}=\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix}$$

	A	B	C
1	1 , 1	0 , 2	0 , 4
2	0 , 2	5 , 0	1 , 6
3	0 , 2	1 , 1	2 , 1

$\Rightarrow$

	A	C
1	1 , 1	0 , 4
3	0 , 2	2 , 1

$\Rightarrow$

$$V_{J1}=\begin{pmatrix}1/4\\0\\3/4\end{pmatrix}, V_{J2}=\begin{pmatrix}2/3\\0\\1/3\end{pmatrix}$$

Conclusion

Annexes

Preuve du théorème de Nash

Théorème du point fixe de Kakutani
Soit X un compact convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$, et F une correspondance de X vers X telle que :
. $\forall x \in X , F(x)$ est convexe et non-vide.
. Le graphe de F est fermé.
Alors F admet un point fixe, c'est à dire $\exists x \in X , x \in F(x)$.

Introduction des notions nécessaires
$\sigma_i \in \Sigma_i$ est meilleure réponse à $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$ si :
$\forall \tau_i \in \Sigma_i , g_i(\sigma_i , \sigma_{-i}) \geq g_i(\tau_i , \sigma_{-i})$
L'ensemble des meilleures réponses à σ_{-i} est noté $BR_i(\sigma_{-i})$.

Preuve du théorème de Nash

Correspondance considérée

Correspondance de Σ vers Σ donnée par $BR(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq N} BR_i(\sigma_{-i})$

Définition d'un équilibre de Nash en stratégie mixte

σ équilibre de Nash <=> $\forall i \in [\![1, N]\!], \sigma_i \in BR_i(\sigma_{-i})$ $(i.e\ \sigma \in BR(\sigma))$

Vérification des hypothèses

$\forall \sigma, BR(\sigma)$ est non-vide.

$\forall \sigma, BR(\sigma)$ est convexe.

Le graphe de BR est fermé.

$\Sigma = \prod_i \Sigma_i$ est un convexe compact non-vide de $\mathbb{R}^N$.