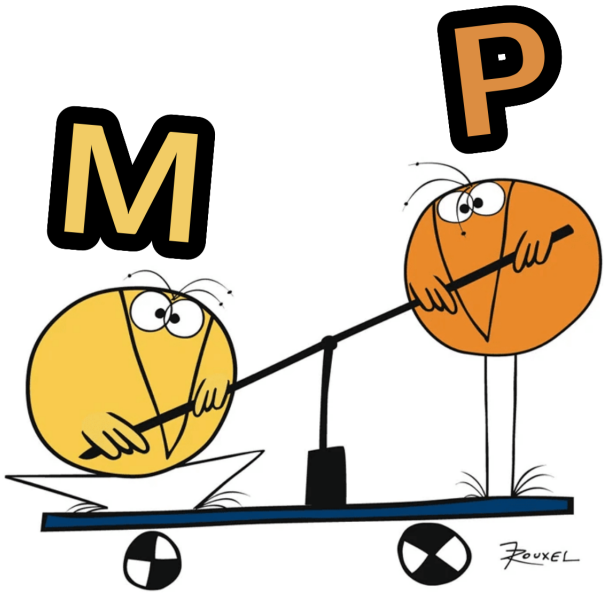


Mathématiques
DS 03 – Sujet A

Samedi 7 novembre 2026 – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un seul problème, d'après l'épreuve Centrale-Supélec MP 2018 (Mathématiques 1), légèrement modifiée pour ne pas utiliser de topologie.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♫ Bon courage ! ♫

Aplatissement aléatoire d'un ensemble de points en grande dimension, Centrale MP 2018 Maths 1

Notations

- Dans tout le problème N, k et d désignent des entiers supérieurs ou égaux à deux.
- Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.
- On note $A^\top$ la transposée d'une matrice A.
- Pour tous entiers naturels p et q, avec $p \leqslant q$, la notation $[\![p, q]\!]$ désigne l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} \mid p \leqslant i \leqslant q\}$.
- Dans tout le problème on note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur Ω.
- Pour tout événement A de probabilité non nulle, et pour tout événement B, on note $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B \mid A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant A.
- Étant donnée une variable aléatoire Z à valeurs réelles, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance.
- On dit qu'une variable aléatoire Z est une variable de Rademacher lorsque $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$ et
$$\mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}.$$
- De façon générale, si E est un espace euclidien, son produit scalaire et sa norme seront respectivement notés $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$. Ces notations seront utilisées notamment pour $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$, munis de leurs structures euclidiennes canoniques.

Problématique

On s'intéresse à la question suivante : étant donnés N points dans un espace euclidien de grande dimension, est-il possible de les envoyer linéairement dans un espace de petite dimension sans trop modifier les distances entre ces points ?
Pour préciser cette question, considérons N vecteurs distincts $v_1, \dots, v_N$ dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$, on dit qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ est une *ε-isométrie pour $v_1, \dots, v_N$* lorsque :

$$\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2, \qquad (1 - \varepsilon)\|v_i - v_j\| \leqslant \|f(v_i) - f(v_j)\| \leqslant (1 + \varepsilon)\|v_i - v_j\|$$

La question peut se reformuler ainsi :

Objectif
Pour quelles valeurs de k existe-t-il $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ qui soit une ε-isométrie pour $v_1, \dots, v_N$?

On se propose d'établir le théorème suivant, démontré par William B. Johnson et Joram Lindenstrauss en 1984 :

> Il existe une constante absolue c strictement positive telle que :
> quels que soient N et d, entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 et quels que soient $v_1, \dots, v_N$ distincts dans $\mathbb{R}^d$,
> il suffit que $k \geqslant c\,\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ pour qu'il existe une ε-isométrie $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ pour $v_1, \dots, v_N$.

Les seules méthodes connues à ce jour pour démontrer ce théorème sont de nature probabiliste.
Dans la partie I, on établit des résultats préliminaires portant sur la convexité et les probabilités. La partie II est consacrée à la démonstration d'une inégalité de concentration, qui est utilisée dans la partie III où le théorème de Johnson-Lindenstrauss est démontré.

I – Préliminaires

I.A – Distance à une partie

Soit E un espace euclidien. Pour toute partie non vide C de E et tout vecteur u de E, on note $d(u,C) = \inf_{w\in C} \|u-w\|$ la distance de u à C. Pour $v \in E$, on note simplement $d(u,v) = \|u-v\|$.

Q 1. Montrer que $d(u,C) \leqslant d(u,w)$ pour tout $w \in C$, et que si $u \in C$, $d(u,C) = 0$.

> **Correction.** Soit $w \in C$. Par définition de la borne inférieure, $d(u,C)$ est un minorant de $\{\|u-w'\|,\ w' \in C\}$, ce qui assure $d(u,C) \leqslant \|u-w\|$.
> Ensuite, si $u \in C$, en prenant $w = u$, $\|u-w\| = 0$, donc $0 \leqslant d(u,C) \leqslant 0$, i.e. $d(u,C) = 0$.

Q 2. On suppose C convexe. Soient $(u,u') \in E^2$ et $\lambda \in [0,1]$.
Montrer que, pour tout $(w,w') \in C^2$, $d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) \leqslant (1-\lambda)\|u-w\| + \lambda\|u'-w'\|$.
En déduire que pour tout w' dans C, $(1-\lambda)d(u,C) \geqslant d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - \lambda\|u'-w'\|$, puis que l'application $u \mapsto d(u,C)$ est convexe sur E.

> **Correction.** Les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ ne sont pas intéressants, on suppose $\lambda \in]0,1[$.
> Soit $(w,w') \in C^2$. Alors $(1-\lambda)w + \lambda w' \in C$, ce qui assure que
>
> $$\begin{aligned} d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) &\leqslant \|(1-\lambda)w+\lambda w' - (1-\lambda)u - \lambda u'\| \\ &\leqslant (1-\lambda)\|w-u\| + \lambda\|w'-u'\| \text{ par homogénéité et inégalité triangulaire.} \end{aligned}$$
>
> Ainsi,
>
> $$\frac{1}{1-\lambda}\left(d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - \lambda\|w'-u'\|\right) \leqslant \|w-u\|.$$
>
> Ceci assure qu'à w' fixé, $\frac{1}{1-\lambda}\left(d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - \lambda\|w'-u'\|\right)$ minore $\{\|w-u\|,\ w \in C\}$ donc, la borne inférieure étant le plus grand des minorants,
>
> $$\frac{1}{1-\lambda}\left(d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - \lambda\|w'-u'\|\right) \leqslant d(u,C),$$
>
> ce qui assure que, pour tout $w' \in C$,
>
> $$(1-\lambda)d(u,C) \geqslant d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - \lambda\|u'-w'\|.$$
>
> Donc, pour tout $w' \in C$,
>
> $$\frac{1}{\lambda}\left(d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - (1-\lambda)d(u,C)\right) \leqslant \|u'-w'\|.$$
>
> Le même raisonnement (en w' cette fois) assure que
>
> $$d\left((1-\lambda)u+\lambda u', C\right) - (1-\lambda)d(u,C) \leqslant \lambda d(u',C),$$
>
> d'où l'inégalité de convexité de $u \mapsto d(u,C)$.

I.B – Inégalité de Hölder pour l'espérance

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Q 3. Montrer que, pour tous réels positifs a et b, $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
On pourra utiliser la concavité du logarithme.

> **Correction.** Soient a et b positifs. Si a ou b est nul, le résultat est immédiat. Sinon, par concavité de ln,
>
> $$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab),$$

d'où le résultat par croissance de l'exponentielle.

Q 4. En déduire que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur l'espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ alors

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{1/p} \mathbb{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}$$

On pourra d'abord montrer ce résultat lorsque $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$.

Correction. Supposons que $\mathbb{E}(|X|^p) = \mathbb{E}(|Y|^q) = 1$. On sait que pour tout ω dans Ω,

$$|X(\omega)||Y(\omega)| \leqslant \frac{|X(\omega)|^p}{p} + \frac{|Y(\omega)|^q}{q},$$

d'où, par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \frac{1}{p}\mathbb{E}(|X|^p) + \frac{1}{q}\mathbb{E}(|Y|^q) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ensuite, dans le cas général, si X et Y ne sont pas nulles presque sûrement (sinon le résultat est évident), on considère $W = \dfrac{X}{\mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{1/p}}$ et $Z = \dfrac{Y}{\mathbb{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}}$. On a bien $\mathbb{E}(|W|^p) = \mathbb{E}(|Z|^q) = 1$, ce qui assure que

$$\mathbb{E}(|WZ|) \leqslant 1, \text{ d'où } \mathbb{E}(|XY|) \leqslant \mathbb{E}\left(|X|^p\right)^{1/p} \mathbb{E}\left(|Y|^q\right)^{1/q}.$$

I.C – Espérance conditionnelle

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles.
Pour tout événement $A \subset \Omega$ de probabilité non nulle, l'espérance conditionnelle de X sachant A, notée $\mathbb{E}(X \mid A)$, est par définition le réel $\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_A(X = x) \cdot x$. En d'autres termes, $\mathbb{E}(X \mid A)$ est l'espérance de X dans l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$.
Les propriétés usuelles de linéarité et de positivité de l'espérance, qu'on ne demande pas de redémontrer, sont ainsi valables pour l'espérance conditionnelle sachant A.

Q 5. Soit $(A_1, \ldots, A_m)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid A_i)$$

Correction. On calcule la somme de droite :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid A_i) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i) \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}_{A_i}(X = x)x \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(X = x) \text{ car on permute deux sommes finies} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \text{ par la formule des probabilités totales} \\
&= \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

I.D – Variables aléatoires à queue sous-gaussienne

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que, pour tout réel positif t, $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) \leqslant a \exp\left(-bt^2\right)$.

Q 6. Montrer que $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra noter $X^2(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ *avec* $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$.

Correction. Comme Ω est fini, X est à valeurs dans un ensemble fini, et X^2 aussi. Notons alors $X^2(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ avec $0 \leqslant y_1 < y_2 < \cdots < y_n$. On note $x_i = \sqrt{y_i}$.
On calcule

$$2\int_0^{+\infty} t\,\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{x_1} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t + 2\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t + 2\int_{x_n}^{+\infty} t\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t.$$

Or,

- si $t \in [0, x_1]$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) = 1$,
- si $t \in]x_i, x_{i+1}]$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) = \mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1})$,
- si $t \in]x_n, +\infty[$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant t) = 0$,

d'où

$$\begin{aligned}
2\int_0^{+\infty} t\,\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{x_1} 2t\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1})\int_{x_i}^{x_{i+1}} 2t\,\mathrm{d}t + 0\\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1})(x_{i+1}^2 - x_i^2)\\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2\mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1}) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1})\\
&= x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} x_i^2\mathbb{P}(|X| \geqslant x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1})\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\left(\mathbb{P}(|X| \geqslant x_i) - \mathbb{P}(|X| \geqslant x_{i+1})\right) + x_n^2\mathbb{P}(|X| \geqslant x_n) \text{ car } \mathbb{P}(|X| \geqslant x_1) = 1\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\mathbb{P}(|X| = x_i) + x_n^2\mathbb{P}(|X| = x_n)\\
&= \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbb{P}(|X| = x_i) = \mathbb{E}(X^2) \text{ par la formule de transfert.}
\end{aligned}$$

Q 7. Montrer que le moment d'ordre deux de X est inférieur ou égal à $\dfrac{a}{b}$.

Correction. Par l'hypothèse du début de la partie, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= 2\int_0^{+\infty} t\,\mathbb{P}(|X| \geqslant t)\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant 2\int_0^{+\infty} ta\mathrm{e}^{-bt^2}\mathrm{d}t\\
&= a\left[-\frac{\mathrm{e}^{-bt^2}}{b}\right]_0^{+\infty}\\
&= \frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

L'intégrale de la deuxième ligne converge, puisque $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-bt^2}}{b}$ admet une limite finie en $+\infty$.

Soit δ un réel tel que $0 \leqslant |\delta| \leqslant \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Q 8. Justifier que, pour tout réel t, $\mathbb{P}(|X + \delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|)$.

Correction. Déjà, si $t \leqslant |\delta|$, $\mathbb{P}(|X| \geqslant t - |\delta|) = 1$, et l'inégalité est immédiate. Supposons alors $t \geqslant |\delta|$.
Soit $\omega \in \Omega$ tel que $|X(\omega) + \delta| \geqslant t$. Alors

- ou bien $X(\omega) + \delta \geqslant t$, donc $X(\omega) \geqslant t - \delta \geqslant t - |\delta| \geqslant 0$, donc $|X(\omega)| \geqslant t - |\delta|$,

- ou bien $X(\omega)+\delta \leqslant -t$, donc $X(\omega) \leqslant -t-\delta \leqslant -t+|\delta| \leqslant 0$, donc $|X(\omega)| \geqslant t-|\delta|$.

Ainsi, on a : $\forall \omega \in \Omega,\ (|X(\omega)+\delta| \geqslant t) \Rightarrow (|X(\omega)| \geqslant t-|\delta|)$, d'où, par inclusion d'événements,

$$\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t-|\delta|).$$

Q 9. Montrer que, pour tout réel t, $-b(t-|\delta|)^2 \leqslant a - \frac{1}{2}bt^2$.

Correction. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{2}bt^2 + b(t-|\delta|)^2 &= a + \frac{1}{2}bt^2 - 2bt|\delta| + b\delta^2 \\ &= \frac{1}{2}b\left(t-2|\delta|\right)^2 + \left(a - b\delta^2\right) \geqslant 0, \end{aligned}$$

car $b>0$ et $\delta^2 \leqslant \frac{a}{b}$. D'où $-b(t-|\delta|)^2 \leqslant a - \frac{1}{2}bt^2$.

Q 10. En déduire que pour tout réel t tel que $t \geqslant |\delta|$ on a $\mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) \leqslant a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right)$.

Correction. Soit t tel que $t \geqslant |\delta|$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t) &\leqslant \mathbb{P}(|X| \geqslant t-|\delta|) \text{ par la question 8} \\ &\leqslant a\exp\left(-b(t-|\delta|)^2\right) \text{ par hypothèse, appliquée en } t-|\delta| \geqslant 0 \\ &\leqslant a\exp\left(a - \frac{1}{2}bt^2\right) \text{ par la question précédente et croissance de exp,} \end{aligned}$$

ce qui est exactement le résultat désiré.

Q 11. Justifier que l'inégalité précédente reste valable si $0 \leqslant t < |\delta|$.

Correction. En appliquant l'hypothèse en $t=0$, on a $1 = \mathbb{P}(|X| \geqslant 0) \leqslant a$.
Soit maintenant $t \in [0, |\delta|[$. Alors $bt^2 < b\delta^2 \leqslant a$, donc $a - \frac{1}{2}bt^2 \geqslant 0$. Ainsi

$$a\exp(a)\exp\left(-\frac{1}{2}bt^2\right) = a\exp\left(a - \frac{1}{2}bt^2\right) \geqslant 1 \geqslant \mathbb{P}(|X+\delta| \geqslant t).$$

II – L'inégalité de concentration de Talagrand

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$.
Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n : \Omega \to \{-1, 1\}$ des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.
On pose $X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i$.
L'objectif de cette partie est de montrer, pour tout convexe non vide C de E,

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, C)^2\right)\right) \leqslant 1 \tag{II.1}$$

II.A – Étude de deux cas particuliers

Q 12. Traiter le cas où C est un convexe non vide de E ne rencontrant pas $X(\Omega)$.

> **Correction.** Si C est un convexe non vide de E ne rencontrant pas $X(\Omega)$ alors $\mathbb{P}(X \in C) = 0$, ce qui donne immédiatement l'inégalité.

On suppose, dans la suite de cette sous-partie II.A uniquement, que C est un convexe de E qui rencontre $X(\Omega)$ en un seul vecteur u.

Q 13. Montrer que $\frac{1}{4} d(X, u)^2$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.

> **Correction.** Notons $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. Alors
>
> $$\begin{aligned}\frac{1}{4} d(X, u)^2 &= \frac{1}{4} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i - \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\| \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - u_i) e_i \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon_i - u_i)^2 \text{ par le théorème de Pythagore} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4} (\varepsilon_i - u_i)^2.\end{aligned}$$
>
> Or, comme $u_i \in \{-1, 1\}$, $(\varepsilon_i - u_i)^2 \in \{0, 4\}$, et
>
> $$\mathbb{P}((\varepsilon_i - u_i)^2 = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = u_i) = \frac{1}{2},\ \mathbb{P}((\varepsilon_i - u_i)^2 = 4) = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -u_i) = \frac{1}{2}.$$
>
> D'où $\frac{1}{4}(\varepsilon_i - u_i)^2 \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Ainsi, les $\left((\varepsilon_i - u_i)^2\right)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant iid (par le lemme des coalitions), on en déduit que $\frac{1}{4} d(X, u)^2 \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.

Q 14. En déduire l'espérance de $\exp\left(\frac{1}{8} d(X, u)^2\right)$ et montrer qu'elle est inférieure ou égale à 2^n.

> **Correction.** On en déduit, par la formule de transfert, que
>
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8} d(X, u)^2\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(\frac{1}{4} d(X, u)^2 = k\right) \mathrm{e}^{\frac{k}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{k/2} \\ &= \frac{1}{2^n} (1 + \mathrm{e}^{1/2})^n.\end{aligned}$$

Or, $e^{1/2} \leqslant e \leqslant 3$, donc l'espérance est inférieure ou égale à $\frac{1}{2^n}(1+3)^n = 2^n$.

Q 15. Justifier que $d(X, C) \leqslant d(X, u)$ et en déduire l'inégalité (II.1) dans ce cas.

Correction. Par définition de la borne inférieure, $d(X, C) \leqslant d(X, u)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) &\leqslant \mathbb{P}(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right) \text{ par croissance de exp et de l'espérance}\\ &= \mathbb{P}(X = u)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,u)^2\right)\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}(\varepsilon_1 = u_1, \dots, \varepsilon_n = u_n)2^n\\ &\leqslant \frac{1}{2^n}2^n \leqslant 1,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité.

II.B – Initialisation

On suppose désormais que C est un convexe de E tel que $C \cap X(\Omega)$ contient au moins deux éléments. Quitte à permuter les vecteurs de la base, on peut supposer que ces deux vecteurs diffèrent par leur dernière coordonnée.
On se propose de démontrer l'inégalité (II.1) par récurrence sur la dimension n de E.

Q 16. Traiter le cas $n = 1$.

Correction. Si $n = 1$, alors X est une variable de Rademacher, et C contient donc $\{-e_1, e_1\}$, ce qui assure que $\mathbb{P}(X \in C) = 1$ et que $d(X, C) = 0$, donc $\mathbb{P}(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) = 1$.

II.C – Propriétés de C_{+1} et C_{-1}

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On suppose à présent que (II.1) est vérifiée au rang $n-1$.
On note $E' = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et π la projection orthogonale sur E'

$$\pi : \left|\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E' \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i \end{array}\right.$$

On pose $X' = \pi \circ X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i e_i$. C'est une variable aléatoire à valeurs dans E'.

Pour t dans $\{-1, 1\}$ on note

- H_t l'hyperplan affine $E' + te_n$;
- $C_t = \pi(C \cap H_t)$.

Q 17. Montrer, pour $x' \in E'$ et $t \in \{-1, 1\}$, que $x' \in C_t \iff x' + te_n \in C$.

Correction. Soit $x' \in E'$, soit $t \in \{-1, 1\}$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} x' \in C_t &\iff x' \in \pi(C \cap H_t)\\ &\iff \exists w \in C \cap H_t,\ x' = \pi(w)\\ &\iff \exists x_n \in \mathbb{R},\ x' = \pi(x' + x_n e_n) \text{ et } x' + x_n e_n \in C \cap H_t.\end{aligned}$$

Mais, dans cette dernière proposition, $x' + x_n e_n \in H_t$ si, et seulement si $x_n = t$, ce qui assure que

$$x' \in C_t \iff x' + te_n \in C.$$

Q 18. Montrer que C_{+1} et C_{-1} sont des convexes non vides de E'.

Correction. Soit $t \in \{-1, 1\}$.

- Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée. Comme les coordonnées des éléments de $X(\Omega)$ valent ± 1, l'un d'eux s'écrit $x' + te_n$ avec $x' \in E'$. Il appartient à C, donc $x' \in C_t$ par la question précédente.
- Soient $x', y' \in C_t$ et $\lambda \in [0, 1]$. Par la question précédente, $x' + te_n$ et $y' + te_n$ sont dans C, donc, par convexité de C,

$$(1-\lambda)(x' + te_n) + \lambda(y' + te_n) = \big((1-\lambda)x' + \lambda y'\big) + te_n \in C.$$

Comme $(1-\lambda)x' + \lambda y' \in E'$, la question précédente assure que $(1-\lambda)x' + \lambda y' \in C_t$.

Q 19. Montrer que $\mathbb{P}(X \in C) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1})$.

Correction. On décompose l'événement $\{X \in C\}$ sur le système complet d'événements $\{\varepsilon_n = -1\}, \{\varepsilon_n = 1\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in C) &= \mathbb{P}(X \in C, \varepsilon_n = -1) + \mathbb{P}(X \in C, \varepsilon_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(X' - e_n \in C, \varepsilon_n = -1) + \mathbb{P}(X' + e_n \in C, \varepsilon_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(X' \in C_{-1}, \varepsilon_n = -1) + \mathbb{P}(X' \in C_1, \varepsilon_n = 1) \\
&= \mathbb{P}(X' \in C_{-1})\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) + \mathbb{P}(X' \in C_1)\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) \text{ car, par le lemme des coalitions, } X' \text{ et } \varepsilon_n \text{ sont indépendante} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X' \in C_{-1}).
\end{aligned}$$

II.D – Une inégalité cruciale

Soit λ un réel tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.
Soit $\omega \in \Omega$. On note $s = \varepsilon_n(\omega)$ et $x' = X'(\omega)$, de sorte que $X(\omega) = x' + se_n$, et l'on se donne $y \in C_s$ et $y' \in C_{-s}$.

Q 20. Montrer que $d(X(\omega), C) \leqslant \big\|(1-\lambda)(y + se_n) + \lambda(y' - se_n) - X(\omega)\big\|$.

Correction. Par la question 17 (car $y \in C_s$ et $y' \in C_{-s}$), $y + se_n \in C$ et $y' - se_n \in C$. Par convexité de C, $(1-\lambda)(y + se_n) + \lambda(y' - se_n) \in C$, ce qui assure, par définition de la borne inférieure, que

$$d(X(\omega), C) \leqslant \big\|(1-\lambda)(y + se_n) + \lambda(y' - se_n) - X(\omega)\big\|.$$

Q 21. En déduire que

$$d(X(\omega), C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + \big\|(1-\lambda)(y - x') + \lambda(y' - x')\big\|^2$$

puis que

$$d(X(\omega), C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)\|y - x'\|^2 + \lambda\|y' - x'\|^2$$

et enfin que

$$d(X, C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2$$

Correction. On en déduit que

$$\begin{aligned}
d(X(\omega), C)^2 &\leqslant \big\|(1-\lambda)(y + se_n) + \lambda(y' - se_n) - X(\omega)\big\|^2 \\
&\leqslant \|(1-\lambda)y + \lambda y' - x' - 2\lambda se_n\|^2 \\
&\leqslant \|(1-\lambda)y + \lambda y' - x'\|^2 + \|-2\lambda se_n\|^2 \text{ par le théorème de Pythagore} \\
&\leqslant \|(1-\lambda)(y - x') + \lambda(y' - x')\|^2 + 4\lambda^2 \text{ car } \|e_n\| = 1 \text{ et } |s| = 1.
\end{aligned}$$

Ensuite, on veut démontrer, en notant $a = y - x'$ et $b = y' - x'$,

$$\|(1-\lambda)a + \lambda b\|^2 \leqslant (1-\lambda)\|a\|^2 + \lambda\|b\|^2.$$

On étudie la différence :

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)\|a\|^2 + \lambda\|b\|^2 - \|(1-\lambda)a + \lambda b\|^2 &= (1-\lambda)\|a\|^2 + \lambda\|b\|^2 - (1-\lambda)^2\|a\|^2 - \lambda^2\|b\|^2 - 2\lambda(1-\lambda)\langle a, b\rangle \\
&= \lambda(1-\lambda)\Big(\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle\Big) \\
&= \lambda(1-\lambda)\|a - b\|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où la deuxième inégalité.
Enfin, on conclut en « passant à l'inf » comme en première partie. Plus précisément, on fixe $y' \in C_{-s}$ et on pose $A = d(X(\omega), C)^2 - 4\lambda^2 - \lambda\|y' - x'\|^2$, de sorte que, pour tout y dans C_s,

$$A \leqslant (1-\lambda)\|y - x'\|^2.$$

Si $A \leqslant 0$ (c'est le cas si $\lambda = 1$), on a directement $A \leqslant (1-\lambda)d(x', C_s)^2$. Sinon, $\sqrt{\dfrac{A}{1-\lambda}} \leqslant \|y - x'\|$ pour tout $y \in C_s$, donc, la borne inférieure étant le plus grand des minorants, $\sqrt{\dfrac{A}{1-\lambda}} \leqslant d(x', C_s)$, d'où $A \leqslant (1-\lambda)d(x', C_s)^2$. Ainsi, pour tout $y' \in C_{-s}$,

$$d(X(\omega), C)^2 - 4\lambda^2 - (1-\lambda)d(x', C_s)^2 \leqslant \lambda\|y' - x'\|^2,$$

et le même raisonnement, en y' cette fois, donne

$$d(X(\omega), C)^2 \leqslant 4\lambda^2 + (1-\lambda)d(x', C_s)^2 + \lambda d(x', C_{-s})^2.$$

Comme ω est quelconque, avec $s = \varepsilon_n(\omega)$ et $x' = X'(\omega)$, on obtient l'inégalité finale.

II.E – Espérances conditionnelles

On note $p_+ = \mathbb{P}(X' \in C_{+1})$ et $p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1})$. On va supposer, sans perte de généralité, que $p_+ \geqslant p_-$.

Q 22. Montrer que $p_- > 0$.

Correction. Par hypothèse, $C \cap X(\Omega)$ contient deux vecteurs qui diffèrent par leur dernière coordonnée ; l'un d'eux s'écrit $x' - e_n$ avec $x' \in X'(\Omega)$. Comme $x' - e_n \in C$, la question 17 assure que $x' \in C_{-1}$. Ainsi

$$p_- = \mathbb{P}(X' \in C_{-1}) \geqslant \mathbb{P}(X' = x') = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = x'_1, \dots, \varepsilon_{n-1} = x'_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Attention : $p_- = 0$ n'entraîne pas $p_+ = 0$, et $\mathbb{P}(X \in C) > 0$ donne seulement $p_+ + p_- > 0$.

Q 23. Montrer que pour tout λ dans $[0, 1]$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \,\middle|\, \varepsilon_n = -1\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{-1})^2\right)\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X', C_{+1})^2\right)\right)^{\lambda}\right)$$

Correction. *Question difficile ! Beaucoup de points si vous allez au bout !*
Soit λ dans $[0, 1]$. Alors, comme on a admis la positivité et la linéarité de l'espérance conditionnelle, on a aussi la croissance de cette dernière, ce qui assure que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X, C)^2\right) \,\middle|\, \varepsilon_n = -1\right) &\leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}4\lambda^2 + \frac{1}{8}(1-\lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2 + \frac{1}{8}\lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2\right) \,\middle|\, \varepsilon_n = -1\right) \\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{8}(1-\lambda)d(X', C_{\varepsilon_n})^2\right)\exp\left(\frac{1}{8}\lambda d(X', C_{-\varepsilon_n})^2\right) \,\middle|\, \varepsilon_n = -1\right).\end{aligned}$$

On a envie de « remplacer ε_n par -1 » : démontrons-le, sans utiliser toutes les notations précédentes. On s'intéresse en fait à $\mathbb{E}(f(X', \varepsilon_n)|\varepsilon_n = -1)$ où f est une fonction de X' et ε_n. Par la formule de transfert (aussi

valable),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X',\varepsilon_n)|\varepsilon_n=-1) &= \sum_{(x',i_n)\in X'(\Omega)\times\{-1,1\}} f(x',i_n)\mathbb{P}_{\varepsilon_n=-1}(X'=x',\varepsilon_n=i_n)\\
&= \sum_{(x',i_n)\in X'(\Omega)\times\{-1,1\}} f(x',i_n)\frac{\mathbb{P}(X'=x',\varepsilon_n=i_n,\varepsilon_n=-1)}{\mathbb{P}(\varepsilon_n=-1)}\\
&= \sum_{x'\in X'(\Omega)} f(x',-1)\frac{\mathbb{P}(X'=x',\varepsilon_n=-1)}{\mathbb{P}(\varepsilon_n=-1)} \text{ car si } i_n\neq -1, \text{ la probabilité est nulle.}\\
&= \sum_{x'\in X'(\Omega)} f(x',-1)\frac{\mathbb{P}(X'=x')\mathbb{P}(\varepsilon_n=-1)}{\mathbb{P}(\varepsilon_n=-1)} \text{ par indépendance.}\\
&= \sum_{x'\in X'(\Omega)} f(x',-1)\mathbb{P}(X'=x') = \mathbb{E}(f(X',-1)).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=-1\right) &\leqslant \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{8}(1-\lambda)d(X',C_{-1})^2\right)\exp\left(\frac{1}{8}\lambda d(X',C_1)^2\right)\right)\\
&\leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda}\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_1)^2\right)^{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Q 24. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=-1\right)\leqslant\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)\right)^{\lambda}$$

Correction. Si $\lambda=0$ ou $\lambda=1$, le résultat est évident, c'est le même que précédemment. Sinon, par l'inégalité de Hölder pour l'espérance, avec $p=\dfrac{1}{1-\lambda}$, $q=\dfrac{1}{\lambda}$, $U=\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)^{1-\lambda}$ et $V=\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)^{\lambda}$ (de sorte que $U^p=\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)$ et $V^q=\exp\left(\dfrac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)$), appliquée à la majoration de la question précédente, on obtient le résultat immédiatement.

Q 25. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, justifier que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right)\leqslant\frac{1}{p_+}$$

Correction. On utilise la question précédente en $\lambda=0$, en échangeant $+1$ et -1, qui jouent des rôles symétriques puisqu'on ne s'est pas servi de $p_-\leqslant p_+$, puis on multiplie par $p_+\geqslant 0$ pour obtenir :

$$p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X,C)^2}{8}\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right)\leqslant p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{+1})^2}{8}\right)\right).$$

Or $p_+=\mathbb{P}(X'\in C_{+1})$, $X'=\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i e_i$ est à valeurs dans l'espace euclidien E' de dimension $n-1$ de base orthonormée $(e_1,\dots,e_{n-1})$, C_{+1} est un convexe non vide de E' par la question 18, et les ε_i sont indépendantes et suivent la loi de Rademacher. Par hypothèse de récurrence, on peut donc appliquer (II.1) :

$$p_+\cdot\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{d(X',C_{+1})^2}{8}\right)\right)\leqslant 1.$$

Comme $p_+\geqslant p_->0$ par la question 22, on peut diviser par p_+, d'où

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\,\middle|\,\varepsilon_n=1\right)\leqslant\frac{1}{p_+}.$$

Q 26. Déduire de ce qui précède que pour tout λ dans $[0,1]$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_+} + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\cdot\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}\right)$$

Correction. Par la formule de l'espérance à l'aide de l'espérance conditionnelle (question 5, avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n=-1)=\mathbb{P}(\varepsilon_n=1)=\frac{1}{2}$), on obtient que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=-1\right)+\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)|\varepsilon_n=1\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{-1})^2\right)\right)\right)^{1-\lambda}\cdot\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{+1})^2\right)\right)\right)^{\lambda}+\frac{1}{2p_+}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}+\frac{1}{2p_+},\end{aligned}$$

par les questions 24 et 25, puis par hypothèse de récurrence appliquée à X' et $C_{\pm1}$ (qui donne $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X',C_{\pm1})^2\right)\right)\leqslant\frac{1}{p_\pm}$) et par croissance de $x\mapsto x^{1-\lambda}$ et de $x\mapsto x^{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+$.

II.F – Optimisation

Q 27. On pose $\lambda = 1-\frac{p_-}{p_+}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)$$

Correction. *Cette partie était en fait beaucoup plus simple que les dernières questions de la partie précédente.* Par la question précédente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) &\leqslant \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{1}{(p_+)^{\lambda}}+\frac{1}{2p_+}\\ &\leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{(p_-)^{1-\lambda}}\frac{p_+}{(p_+)^{\lambda}}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{p_+^{1-\lambda}}{(p_-)^{1-\lambda}}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^{1-\lambda}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1+\exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right)\end{aligned}$$

Q 28. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$, $\frac{x^2}{2}+(x-1)\ln(1-x)\leqslant\ln(2+x)-\ln(2-x)$.
On pourra faire une étude de fonction.

Correction. Posons $f: x\mapsto \ln(2+x)-\ln(2-x)-\frac{x^2}{2}-(x-1)\ln(1-x)$. Alors f est dérivable sur $[0,1[$ et pour tout x dans $[0,1[$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}-x-\ln(1-x)-1\\ &= \frac{4}{4-x^2}-1-x-\ln(1-x)\\ &= \frac{x^2}{4-x^2}+(-x-\ln(1-x))\,.\end{aligned}$$

Or $\frac{x^2}{4-x^2}\geqslant 0$ et, par concavité de ln, $\ln(1-x)\leqslant -x$. Ainsi $f'\geqslant 0$ sur $[0,1[$, donc f est croissante, et comme

$f(0) = 0$, f est positive sur $[0, 1[$.
L'inégalité est donc démontrée.

Q 29. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, $1 + \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} \leqslant \frac{4}{2-x}$.

Correction. Soit $x \in [0, 1[$. Par l'inégalité précédente et par passage à l'exponentielle,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)(1-x)^{x-1} &\leqslant \frac{2+x}{2-x} \\ &\leqslant \frac{4-(2-x)}{2-x} = \frac{4}{2-x} - 1,\end{aligned}$$

d'où le résultat.
C'est fou de faire une question pour ça alors que les questions de la fin de la partie d'avant étaient extrêmement difficiles !

Q 30. Terminer la démonstration de l'inégalité (II.1).

Correction. Comme $p_- > 0$, on a $\lambda \in [0, 1[$, ce qui permet d'appliquer la question précédente avec $x = \lambda$. Par la question 27, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) &\leqslant \frac{1}{2p_+}\left(1 + \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)(1-\lambda)^{\lambda-1}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2p_+}\frac{4}{2-\lambda} \\ &\leqslant \frac{1}{p_+}\frac{2}{2-\lambda}.\end{aligned}$$

D'où

$$p_+\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1.$$

Or,

$$\begin{aligned}p_+\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) &= p_+\left(1 - \frac{1 - \frac{p_-}{p_+}}{2}\right) \\ &= p_+ - \frac{p_+}{2} + \frac{p_-}{2} = \frac{1}{2}(p_+ + p_-) = \mathbb{P}(X \in C).\end{aligned}$$

D'où l'inégalité tant attendue :

$$\mathbb{P}(X \in C)\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \leqslant 1.$$

II.G – Inégalité de Talagrand

Q 31. En déduire l'inégalité de Talagrand :

Pour tout C convexe non vide de E et pour tout réel t strictement positif

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}\big(d(X,C) \geqslant t\big) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Correction. Soit $t > 0$. On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(d(X,C) \geqslant t\big) &= \mathbb{P}\big(\frac{1}{8}d(X,C)^2 \geqslant \frac{t^2}{8}\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right) \geqslant \exp\left(\frac{t^2}{8}\right)\right) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right)}{\exp\left(\frac{t^2}{8}\right)},\end{aligned}$$

par inégalité de Markov. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}\big(d(X,C) \geqslant t\big) &\leqslant \mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{8}d(X,C)^2\right)\right) \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right),\end{aligned}$$

par la question précédente. L'inégalité de Talagrand est donc vérifiée.

III – Démonstration du théorème de Johnson-Lindenstrauss

Dans cette partie on considère l'espace $E = \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $\forall (A,B) \in E^2,\ \langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top \cdot B\right)$. On notera $\|\cdot\|_F$ la norme euclidienne associée.
On rappelle que $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^k$ sont munis de leurs normes euclidiennes canoniques, notées indistinctement $\|\cdot\|$.
On identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, de sorte qu'un vecteur quelconque $x = (x_1, \dots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$ peut être identifié à la matrice colonne $(x_1\ \dots\ x_d)^\top$.
On fixe un vecteur $u = (u_1, \dots, u_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, identifié comme ci-dessus à la matrice colonne $(u_1 \dots u_d)^\top$ de $\mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, et tel que $\|u\| = 1$. On définit l'application $g : \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ M \mapsto \|M \cdot u\|$.
Soit $X = (\varepsilon_{ij})_{1\leqslant i\leqslant k,\, 1\leqslant j\leqslant d}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, dont les coefficients ε_{ij} sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes dans leur ensemble.

III.A – Une inégalité de concentration

Soient r et t deux réels, avec $t > 0$.

Q 32. Montrer que $C = \{M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R}) \mid g(M) \leqslant r\}$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

Correction. Soient M et N dans C, $\lambda \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} g((1-\lambda)M + \lambda N) &= \|((1-\lambda)M + \lambda N)\, u\| \\ &\leqslant (1-\lambda)\,\|Mu\| + \lambda\,\|Nu\| \\ &\leqslant (1-\lambda)r + \lambda r = r, \end{aligned}$$

d'où $(1-\lambda)M + \lambda N \in C$. Ainsi, C est une partie convexe de $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$.

Q 33. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, $\|M \cdot u\| \leqslant \|M\|_F$.

Correction. Soit $M \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} \|Mu\|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} [M]_{ij} u_j\right)^2 \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} [M]_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{d} u_j^2\right) \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{d} [M]_{ij}^2\right) \text{ car } \|u\| = 1 \\ &\leqslant \|M\|_F^2 \text{ car } \|M\|_F^2 = \operatorname{tr}(M^\top M) = \sum_{i,j} [M]_{ij}^2. \end{aligned}$$

D'où $\|Mu\| \leqslant \|M\|_F$ par croissance de la racine carrée.

Q 34. On suppose $r \geqslant 0$. Montrer que C est non vide et que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$

$$d(M,C) < t \implies g(M) < r + t$$

Correction. Comme $r \geqslant 0$, la matrice nulle est dans C. Ainsi, C est non vide. Soit M dans $\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ vérifiant $d(M,C) < t$. Alors, par définition de la borne inférieure, on dispose de N dans C tel que $\|M - N\|_F < t$. On en déduit que

$$\begin{aligned} g(M) &= \|Mu\| \\ &= \|Mu - Nu + Nu\| \\ &\leqslant \|(M-N)u\| + \|Nu\| \\ &\leqslant \|M - N\|_F + r \\ &< t + r. \end{aligned}$$

Le résultat est ainsi prouvé.

Q 35. En déduire que $\mathbb{P}\big(g(X) \leqslant r\big) \cdot \mathbb{P}\big(g(X) \geqslant r+t\big) \leqslant \exp\big(-\frac{1}{8}t^2\big)$.
On traitera à part le cas $r < 0$.

Correction. Si $r < 0$, la probabilité de gauche est nulle, car g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. L'inégalité est immédiate.
Si $r \geqslant 0$, on applique l'inégalité de Talagrand dans l'espace euclidien $E = \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$, de base orthonormée (E_{ij}), avec $X = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} E_{ij}$ et le convexe non vide C (questions 32 et 34) :

$$\mathbb{P}(X \in C) \cdot \mathbb{P}(d(X,C) \geqslant t) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right)$$

Or, d'une part, $\mathbb{P}(X \in C) = \mathbb{P}(g(X) \leqslant r)$.
D'autre part, par la contraposée de la question précédente, on sait que pour tout ω dans Ω, $g(X(\omega)) \geqslant r+t \Rightarrow d(X(\omega), C) \geqslant t$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\big(g(X) \geqslant r+t\big) \leqslant \mathbb{P}\big(d(X,C) \geqslant t\big).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(g(X) \leqslant r\big) \cdot \mathbb{P}\big(g(X) \geqslant r+t\big) &\leqslant \mathbb{P}\big(X \in C\big) \cdot \mathbb{P}\big(d(X,C) \geqslant t\big) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{t^2}{8}\right).\end{aligned}$$

III.B – Médianes

On dit qu'un réel m est une *médiane* de $g(X)$ lorsque $\mathbb{P}\big(g(X) \geqslant m\big) \geqslant \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big(g(X) \leqslant m\big) \geqslant \frac{1}{2}$.

Q 36. Justifier que $g(X)$ admet au moins une médiane.
On pourra considérer la fonction G de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel t, $G(t) = \mathbb{P}(g(X) \leqslant t)$, et examiner l'ensemble $G^{-1}\big(\big[\frac{1}{2}, 1\big]\big)$.

Correction. Ce qui rend les choses très faciles, c'est que Ω est **finie**, donc $g(X)$ prend un nombre fini de valeurs, disons $g_1 < \cdots < g_q$.
Considérons $G(t) = \mathbb{P}(g(X) \leqslant t)$ et l'ensemble $G^{-1}\big(\big[\frac{1}{2}, 1\big]\big)$.
La fonction G est clairement croissante. Ainsi, on dispose de $p \in [\![1, q]\!]$ tel que

$$G^{-1}\big(\big[\tfrac{1}{2}, 1\big]\big) = [g_p, +\infty[.$$

On a en fait $p = \min\left\{ i \in [\![1,q]\!],\ \mathbb{P}(g(X) \leqslant g_i) \geqslant \frac{1}{2} \right\}$.
Si $p = 1$, alors $\mathbb{P}(g(X) \leqslant g_1) \geqslant \frac{1}{2}$, mais comme $\mathbb{P}(g(X) \geqslant g_1) = 1$, g_1 convient.
Sinon, on a $\mathbb{P}(g(X) \leqslant g_p) \geqslant \frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(g(X) \leqslant g_{p-1}) < \frac{1}{2}$, ce qui signifie que

$$\mathbb{P}(g(X) \geqslant g_p) = 1 - \mathbb{P}(g(X) < g_p) = 1 - \mathbb{P}(g(X) \leqslant g_{p-1}) > \frac{1}{2}.$$

Donc g_p est une médiane de $g(X)$.

Q 37. Déduire de ce qui précède que, pour tout réel strictement positif t, $\mathbb{P}\big(|g(X) - m| \geqslant t\big) \leqslant 4\exp\big(-\frac{1}{8}t^2\big)$, où m est une médiane de $g(X)$.

Correction. Soit m une médiane de $g(X)$, $t > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(|g(X) - m| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(g(X) \geqslant m + t) + \mathbb{P}(g(X) \leqslant m - t).$$

Or, par la question 35, avec $r = m$,

$$\mathbb{P}(g(X) \leqslant m)\mathbb{P}(g(X) \geqslant m + t) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right),$$

d'où, comme $\mathbb{P}(g(X) \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ par définition de la médiane,

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(g(X) \geqslant m+t) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right).$$

Ensuite, par la question 35 avec $r = m - t$,

$$\mathbb{P}(g(X) \leqslant m-t)\mathbb{P}(g(X) \geqslant m) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right),$$

d'où

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(g(X) \leqslant m-t) \leqslant \mathbb{P}(g(X) \leqslant m-t)\mathbb{P}(g(X) \geqslant m) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right),$$

donc

$$\mathbb{P}(|g(X)-m| \geqslant t) \leqslant \mathbb{P}(g(X) \geqslant m+t) + \mathbb{P}(g(X) \leqslant m-t) \leqslant 4\exp\left(-\frac{1}{8}t^2\right).$$

Le résultat est donc démontré.

Q 38. En déduire que $\mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right) \leqslant 32$.

Correction. Par la question 7, appliquée à la variable $g(X) - m$, avec $a = 4$ et $b = \frac{1}{8}$ (question précédente, l'inégalité étant aussi vraie pour $t = 0$ puisque $\mathbb{P}(|g(X) - m| \geqslant 0) = 1 \leqslant 4$), on a le moment d'ordre 2 de $g(X) - m$ qui est inférieur ou égal à $\frac{a}{b} = 32$.

Q 39. Montrer que $\mathbb{E}\left(g(X)^2\right) = k$, et en déduire que $\mathbb{E}\big(g(X)\big) \leqslant \sqrt{k}$.

Correction. On calcule

$$g(X)^2 = \|Xu\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{ij}u_j\right)^2$$

Donc

$$\mathbb{E}(g(X)^2) = \sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{ij}u_j\right)^2\right).$$

Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{ij}u_j\right)^2\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{ij}^2u_j^2 + 2\sum_{1\leqslant j<j'\leqslant d}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij'}u_ju_{j'}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{d}u_j^2 + 2\sum_{1\leqslant j<j'\leqslant d}u_ju_{j'}\mathbb{E}\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij'}\right)\\ &= 1 \text{ car } \sum_{j=1}^{d}u_j^2 = \|u\|^2 = 1 \text{ et, pour } j \neq j', \text{ on a } \mathbb{E}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij'}) = \mathbb{E}(\varepsilon_{ij})\mathbb{E}(\varepsilon_{ij'}) = 0 \text{ par indépendance.}\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(g(X)^2) = k$.
On conclut, par inégalité de Cauchy-Schwarz, que $\mathbb{E}(g(X)) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(g(X)^2)\mathbb{E}(1)} = \sqrt{k}$.

Q 40. En déduire que $\left(\sqrt{k}-m\right)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right)$.

Correction. Comme $g(X) \geqslant 0$, toute médiane m est positive (sinon $\mathbb{P}(g(X) \leqslant m) = 0 < \frac{1}{2}$). Par linéarité de

l'espérance et la question précédente,

$$\mathbb{E}\left(\left(g(X)-m\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(g(X)^2\right) - 2m\,\mathbb{E}(g(X)) + m^2 \geqslant k - 2m\sqrt{k} + m^2 = \left(\sqrt{k}-m\right)^2,$$

où l'on a utilisé $m \geqslant 0$ et $\mathbb{E}(g(X)) \leqslant \sqrt{k}$.

III.C – Un lemme-clé

Q 41. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, $\mathbb{P}\left(\left|g(X)-\sqrt{k}\right| \geqslant t\right) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right)$.

Correction. D'après la question 37, la variable $g(X)-m$ vérifie l'hypothèse de I.D avec $a=4$ et $b=\dfrac{1}{8}$. Posons $\delta = m-\sqrt{k}$: par les questions 38 et 40, $\delta^2 \leqslant 32 = \dfrac{a}{b}$. Les questions 10 et 11, appliquées à $g(X)-m$ et à δ, donnent alors, pour tout $t>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|g(X)-\sqrt{k}\right| \geqslant t\right) = \mathbb{P}\big(|(g(X)-m)+\delta| \geqslant t\big) \leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}t^2\right).$$

On pose $A_k = \frac{1}{\sqrt{k}}X$. Soient ε dans $]0,1[$ et δ dans $]0,\frac{1}{2}[$. On suppose que $k \geqslant 160\,\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$.

Q 42. Montrer que, pour tout vecteur unitaire u dans $\mathbb{R}^d$: $\mathbb{P}\Big(\big|\|A_k\cdot u\|-1\big| > \varepsilon\Big) < \delta$.

Correction. Soit u un vecteur unitaire et g la fonction définie en préambule de la partie. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\,\|A_k u\|-1| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|g(X)-\sqrt{k}| > \sqrt{k}\varepsilon)\\ &\leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}k\varepsilon^2\right).\end{aligned}$$

Or, $k \geqslant 160\dfrac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|\,\|A_k u\|-1| > \varepsilon) &\leqslant 4\exp(4)\exp\left(-\frac{1}{16}160\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2}\varepsilon^2\right)\\ &\leqslant 4\exp(4)\exp(10\ln(\delta))\\ &\leqslant 4\exp(4)\delta^{10} \leqslant 3^4\delta\frac{1}{2^7} \leqslant \frac{81}{128}\delta \leqslant \delta.\end{aligned}$$

D'où le résultat !

III.D – Conclusion

On conserve les notations et les hypothèses précédentes. Soient $v_1,\dots,v_N$ des vecteurs distincts dans $\mathbb{R}^d$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i<j$ on note E_{ij} l'événement $(1-\varepsilon)\|v_i-v_j\| \leqslant \|A_k\cdot v_i - A_k\cdot v_j\| \leqslant (1+\varepsilon)\|v_i-v_j\|$.

Q 43. Montrer que $\mathbb{P}\left(\overline{E_{ij}}\right) < \delta$, où $\overline{E_{ij}}$ désigne l'événement contraire de E_{ij}.

Correction. En prenant, dans la question 42, $u = \dfrac{v_i-v_j}{\|v_i-v_j\|}$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{E_{ij}}) = \mathbb{P}(|\,\|A_k u\|-1| > \varepsilon) < \delta.$$

Q 44. En déduire que $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\Big) \geqslant 1 - \frac{N(N-1)}{2}\,\delta$.

Correction. On écrit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\Big) &= 1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant N} \overline{E_{ij}}\Big)\\ &\geqslant 1-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\mathbb{P}(\overline{E_{ij}})\\ &\geqslant 1-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\delta\\ &\geqslant 1-\frac{N(N-1)}{2}\delta.\end{aligned}$$

Q 45. En déduire le théorème de Johnson et Lindenstrauss.

Correction. Prenons $c = 320 > 0$. Soient $\varepsilon \in]0,1[$, N et d des entiers supérieurs ou égaux à 2, et $v_1, \dots, v_N$ des vecteurs distincts de $\mathbb{R}^d$. Soit k un entier tel que $k \geqslant c\,\dfrac{\ln(N)}{\varepsilon^2}$ (on a bien $k \geqslant 320\ln 2 > 2$), et posons $\delta = \dfrac{1}{N^2}$.

Comme $N \geqslant 2$, on a $\delta \leqslant \dfrac{1}{4}$, donc $\delta \in]0, \dfrac{1}{2}[$, et

$$160\,\frac{\ln(1/\delta)}{\varepsilon^2} = 160\,\frac{\ln(N^2)}{\varepsilon^2} = 320\,\frac{\ln(N)}{\varepsilon^2} \leqslant k :$$

les hypothèses de III.C sont satisfaites. Par la question précédente,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}\Big) \geqslant 1-\frac{N(N-1)}{2}\cdot\frac{1}{N^2} = 1-\frac{N-1}{2N} > \frac{1}{2} > 0.$$

L'événement $\displaystyle\bigcap_{1\leqslant i<j\leqslant N} E_{ij}$ est donc non vide : soit ω dans cet événement, et soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A_k(\omega) \in \mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$. Pour tous $i < j$, comme $\omega \in E_{ij}$,

$$(1-\varepsilon)\,\|v_i - v_j\| \leqslant \|f(v_i) - f(v_j)\| \leqslant (1+\varepsilon)\,\|v_i - v_j\|\,,$$

et ces inégalités restent vraies pour $i = j$ et, par symétrie, pour $i > j$. Ainsi f est une ε-isométrie pour $v_1, \dots, v_N$, ce qui démontre le théorème de Johnson et Lindenstrauss, avec $c = 320$.

FIN