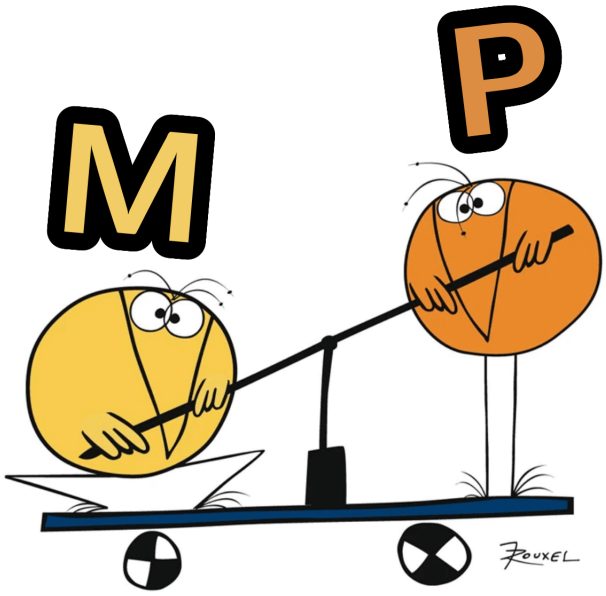


Mathématiques
DS 03 – Sujet B

Corrigé

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de trois exercices et d'un problème, indépendants, extraits d'épreuves CCINP et E3A. Dans chaque partie, la numérotation des questions est celle du sujet d'origine. L'ordre des exercices est choisi pour des contraintes de mise en page, mais vous pouvez les traiter dans l'ordre de votre choix. Faites en sorte qu'au rendu, on ait les exercices dans l'ordre du sujet.
- Les programmes demandés sont à écrire en langage Python.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Normes équivalentes, d'après CCINP MP 2012

1. (a) On vérifie les hypothèses d'une norme :

- si $f \in E$, $\|f\| \geqslant 0$,
- (homogénéité) soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= |\lambda f(0)| + 2\int_0^1 |(\lambda f)'(t)|dt \\ &= |\lambda|\left(|f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|dt\right) \\ &= |\lambda|\,\|f\|,\end{aligned}$$

d'où l'homogénéité.

- (inégalité triangulaire) Soient f et g dans E. Alors

$$\begin{aligned}\|f+g\| &= |f(0)+g(0)| + 2\int_0^1 |(f+g)'(t)|dt \\ &\leqslant |f(0)| + |g(0)| + 2\int_0^1 (|f'(t)| + |g'(t)|)\,dt \text{ par inégalité triangulaire dans } \mathbb{R} \text{ et croissance de l'intégrale} \\ &\leqslant |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|dt + |g(0)| + 2\int_0^1 |g'(t)|dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &\leqslant \|f\| + \|g\|,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire.

- (séparation) Soit $f \in E$ telle que $\|f\| = 0$. Alors, étant une somme de deux quantités positives, on en déduit que $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt = 0$. Mais $|f'|$ est continue, positive, d'intégrale nulle, donc $|f'|$ est nulle. Donc f' est nulle sur $[0,1]$, donc f est constante sur $[0,1]$. Mais $f(0) = 0$ donc f est nulle sur $[0,1]$. D'où la séparation.

Donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

(b) i. Deux normes N et N' sont équivalentes si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $N \leqslant \alpha N'$ et $N' \leqslant \beta N$.

ii. Soit $f \in E$. Alors

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Or, $|f(0)| \leqslant 2|f(0)| \leqslant \|f\|'$, et $\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|dt \leqslant \|f\|'$, d'où

$$\|f\| \leqslant 3\,\|f\|'.$$

De même,

$$\|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|dt \leqslant 2\,\|f\| + \|f\| \leqslant 3\,\|f\|.$$

Les deux normes sont donc équivalentes.

(c) La norme $\|\cdot\|_1$, définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$, n'est pas équivalente à $\|f\|$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : t \mapsto t^n$. Alors

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors que

$$\|f_n\| = 2\int_0^1 nt^{n-1}dt = 2,$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 pour $\|\cdot\|_1$ mais pas pour $\|\cdot\|$. Si les deux normes étaient équivalentes, il existerait $\alpha > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2 = \|f_n\| \leqslant \alpha\,\|f_n\|_1 = \dfrac{\alpha}{n+1}$, ce qui est absurde quand n tend vers $+\infty$.

Problème 2. Inégalités probabilistes, d'après CCINP PSI 2025

Q1. On a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Q2. Comme $\mathbb{E}(X) = \lambda$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff assure que

$$\mathbb{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

Q3. Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \geqslant 2\lambda$. Alors $X(\omega) - \lambda \geqslant \lambda$, donc $|X(\omega) - \lambda| \geqslant X(\omega) - \lambda \geqslant \lambda$.
Ainsi, on a bien l'inclusion

$$\{X \geqslant 2\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geqslant \lambda\}.$$

Q4. Par croissance des probabilités, on a bien

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2\lambda) \leqslant \mathbb{P}(|X - \lambda| \geqslant \lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}.$$

Problème 3. Nombre de valeurs distinctes, d'après E3A MP 2018

1. (a) U_2 est le nombre de valuers distinctes prises par X_1 et X_2, qui valent donc 1 (si $X_1 = X_2$) ou 2 (si $X_1 \neq X_2$).

(b) On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2) \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = i) \text{ car } (\{X_2 = i\})_{1 \leqslant i \leqslant \ell} \text{ est un système complet d'événements} \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = i) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{\ell^2} \\
&= \frac{1}{\ell}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\mathbb{P}(U_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(U_2 = 1) = \frac{\ell - 1}{\ell}.$$

(c) On en déduit que

$$\mathbb{E}(U_2) = 1\mathbb{P}(U_2 = 1) + 2\mathbb{P}(U_2 = 2) = \frac{1}{\ell} + 2\frac{\ell - 1}{\ell} = 2 - \frac{1}{\ell}.$$

C'est plutôt logique, quand ℓ est très grand, c'est très probable que les deux valeurs prises soient distinctes.

2. (a) On propose le programme suivant

```
1 import random
2
3 def simulU():
4     L = [] #liste des valeurs distinctes
5     for i in range(10):
6         x = random.randint(1,25)
7         if x not in L: #si la valeur est nouvelle
8             L.append(x)
9     return len(L)
```

(b) On va utiliser la loi faible des grands nombres, qui assure que si $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables iid de même loi que U_{10} (qui admet un moment d'ordre 2, puisqu'elle est bornée), alors, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{V_1 + \cdots + V_k}{k} - \mathbb{E}(U_{10})\right| \geqslant \varepsilon\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui assure qu'un grand nombre de tests permet d'approcher l'espérance. On propose

```
10 def espU():
11     res = 0
12     N = 10000
13     for _ in range(N):
14         res += simulU()
15     return res/N
```

3. Si $\ell \leqslant n$, alors on a $U_n(\Omega) \subset [\![1, \ell]\!]$, car on a plus de variables que de valeurs possibles prises.
Si $\ell \geqslant n$, on a $U_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$: on a, au maximum, toutes les variables $X_1, \dots, X_n$ qui sont distinctes.
Toutes ces valeurs sont atteintes (pour $1 \leqslant j \leqslant \min(n, \ell)$, prendre $X_1, \dots, X_j$ distinctes et $X_{j+1} = \dots = X_n = X_1$), donc $U_n(\Omega) = [\![1, \min(n, \ell)]\!]$.

4. Comme X_i est uniforme, on peut directement dire que

$$\mathbb{P}(X_i \in S) = \frac{|S|}{\ell}.$$

5. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \neq a, \dots, X_{n-1} \neq a) &= \mathbb{P}(X_1 \neq a) \dots \mathbb{P}(X_{n-1} \neq a) \text{ par indépendance.} \\ &= \mathbb{P}(X_1 \neq a)^{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

6. U_n compte le nombre de valeurs distinctes prises par $X_1, \dots, X_n$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1, \ell]\!]$, si i est une valeur prise par au moins l'une de ces variables, on ajoute 1 au résultat. Ceci assure que $U_n = \sum_{i=1}^{\ell} A_i$.

7. On a

$$\mathbb{P}(A_i = 0) = \mathbb{P}(X_1 \neq i, \dots, X_n \neq i) = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n.$$

Mais comme A_i est une variable de Bernoulli, on en déduit que

$$\mathbb{P}(A_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(A_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n.$$

On en déduit que

$$\mathbb{E}(A_i) = \mathbb{P}(A_i = 1) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n.$$

8. On remarque que l'événement $(A_1 = 0, \dots, A_\ell = 0)$ est l'événement « aucune valeur n'est prise par les $X_1, \dots, X_n$ ».
Cet événement est impossible, ce qui assure que

$$\mathbb{P}(A_1 = 0, \dots, A_\ell = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(A_1 = 0) \dots \mathbb{P}(A_\ell = 0).$$

car chaque $\mathbb{P}(A_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n$ est strictement positif (puisque $\ell \geqslant 2$). Ceci assure que $A_1, \dots, A_\ell$ ne sont pas indépendantes.

9. On conclut que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U_n) &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n\right) \\ &= \ell - \ell\left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^n.\end{aligned}$$

10. Si ℓ est fixé et que n tend vers $+\infty$, on a $\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où $\mathbb{E}(U_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui est cohérent : s'il y a beaucoup de variables, il y a de grandes chances qu'elles prennent toutes les valeurs entre 1 et ℓ.

11. Si n est fixé et ℓ tend vers $+\infty$, on fait davantage attention :

$$\ell - \ell\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^n = \ell\left(1-\left(1-\frac{1}{\ell}\right)^n\right) \underset{\ell\to+\infty}{\sim} \ell n\frac{1}{\ell} = n.$$

Ce résultat est cohérent. Si les valeurs prises par les X_i appartiennent à un ensemble de plus en plus grand, il est cohérent que $X_1, \dots, X_n$ tendent à prendre des valeurs toutes différentes.

12. (a) Par la question 9, $\mathbb{E}(D_n) = 365 - 365 \times \left(1-\frac{1}{365}\right)^n$.

(b) Lorsque n tend vers $+\infty$, ce nombre moyen est de 365... absolument aucun intérêt :(Le problème aurait pu s'intéresser à la probabilité que $D_n \leqslant n-1$ par exemple (proba que deux personnes aient la même date d'anniversaire).

Problème 4. Deux lois géométriques indépendantes, d'après E3A PC 2025

1. On rappelle que Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Z=k) = p(1-p)^{k-1}$, que $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. X_1 et X_2 sont indépendantes, et on note $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ si pour tout $A \subset X_1(\Omega)$, pour tout $B \subset X_2(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(X_1 \in A, X_2 \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in A)\mathbb{P}(X_2 \in B).$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant k) &= \sum_{i\geqslant k} \mathbb{P}(X=i)\\ &= \sum_{i\geqslant k} pq^i\\ &= pq^k\frac{1}{1-q} = q^k \text{ (série géométrique convergente car } 0<q<1).\end{aligned}$$

4. 4.1. Les variables X et Y prennent leur valeurs dans $\mathbb{N}$, donc $X+Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

4.2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, comme $(\{Y=i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i\geqslant 0} \mathbb{P}(X+Y=k, Y=i)\\ &= \sum_{i\geqslant 0} \mathbb{P}(X=k-i, Y=i)\\ &= \sum_{i\geqslant 0} \mathbb{P}(X=k-i)\mathbb{P}(Y=i) \text{ par indépendance}\\ &= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k-i)\mathbb{P}(Y=i) \text{ car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N}\\ &= \sum_{i=0}^{k} pq^{k-i}pq^i\\ &= \sum_{i=0}^{k} p^2q^k\\ &= (k+1)p^2q^k\end{aligned}$$

4.3. Si $k > n$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X+Y=n}(X=k) &= \frac{\mathbb{P}(X+Y=n, X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Y=n-k, X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Y=n-k)\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \text{ par indépendance}\\ &= 0 \text{ car } n-k<0, \text{ donc } \mathbb{P}(Y=n-k)=0\end{aligned}$$

4.4. Soit $k \leqslant n$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X+Y=n}(X=k) &= \frac{\mathbb{P}(X+Y=n, X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Y=n-k, X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(Y=n-k)\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \text{ par indépendance}\\ &= \frac{pq^{n-k}\,pq^k}{(n+1)p^2q^n}\\ &= \frac{1}{(n+1)},\end{aligned}$$

quantité qui ne dépend bien que de n.

5. **5.1** La variable V prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$, et la variable M prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

5.2 Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M \geqslant k) &= \mathbb{P}(X \geqslant k, Y \geqslant k)\\ &= \mathbb{P}(X \geqslant k)\mathbb{P}(Y \geqslant k) \text{ par indépendance}\\ &= (q^2)^k.\end{aligned}$$

5.3 On en déduit que, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k) &= \mathbb{P}(M \geqslant k) - \mathbb{P}(M \geqslant k+1)\\ &= (q^2)^k - (q^2)^{k+1}\\ &= (q^2)^k\left(1-q^2\right),\end{aligned}$$

donc $M+1 \sim \mathscr{G}(1-q^2)$.

5.4 Distinguons les cas :

- si $r < 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k, V=r) &= \mathbb{P}(\min(X,Y)=k, Y-X=r)\\ &= \mathbb{P}(Y=k, X=Y-r) \text{ car } r<0 \text{ donc } Y<X\\ &= \mathbb{P}(Y=k, X=k-r)\\ &= \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}(X=k-r) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y\\ &= pq^k pq^{k-r}\\ &= p^2q^{2k-r}.\end{aligned}$$

- si $r \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M=k, V=r) &= \mathbb{P}(\min(X,Y)=k, Y-X=r)\\ &= \mathbb{P}(X=k, Y-X=r)\\ &= \mathbb{P}(X=k, Y=k+r)\\ &= \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k+r)\\ &= pq^k pq^{k+r}\\ &= p^2q^{2k+r}.\end{aligned}$$

On peut résumer en :

$$\forall (k,r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z},\ \mathbb{P}(M=k, V=r) = p^2 q^{2k+|r|}.$$

5.5 On en déduit, comme $(\{M=k\})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, que pour $r \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V=r) &= \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{P}(M=k, V=r)\\ &= \sum_{k\geqslant 0} p^2 q^{2k+|r|}\\ &= p^2 q^{|r|} \sum_{k\geqslant 0} (q^2)^k\\ &= p^2 q^{|r|} \frac{1}{1-q^2}.\end{aligned}$$

5.6 Si $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(M=k)\mathbb{P}(V=r) = (q^2)^k \left(1-q^2\right) \frac{p^2}{1-q^2} q^{|r|} = q^{2k+|r|} p^2,$$

donc les deux variables sont indépendantes !

Problème 5. Majorations pour la loi de Poisson, d'après E3A PC 2017

1. (a) Déjà, $X(X-1)$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$: calculons son espérance dans $[0,+\infty]$ et vérifions qu'elle est finie. Par la formule de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k\geqslant 0} k(k-1)\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\ &= \sum_{k\geqslant 2} \frac{\lambda^k}{(k-2)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k\geqslant 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\\ &= \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda} = \lambda^2 < +\infty,\end{aligned}$$

donc $X(X-1)$ admet une espérance finie, égale à λ^2.

(b) On en déduit que $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)+X) = \lambda\text{^}2 + \lambda$.

2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant i) &= \mathbb{P}(X^2 \geqslant i^2) \text{ par stricte croissance de } x \mapsto x^2\\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{i^2} \text{ par l'inégalité de Markov appliquée à } X^2\\ &\leqslant \frac{\lambda+\lambda^2}{i^2}.\end{aligned}$$

Par comparaison à une série de Riemann, on en déduit que la série de terme général $\mathbb{P}(X \geqslant i)$ converge.

3. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{lambda^i}{(k+1)\dots(k+i)} \leqslant \frac{\lambda^i}{i!},$$

terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{i\geqslant 1} u_{i,k}$ converge.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{(k+1)\dots(k+i)} \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i},$$

ce qui est vrai pour tout k. Mais la somme de droite est finie lorsque $k \geqslant \lambda$. Donc $K = \lfloor \lambda \rfloor + 1$ convient parfaitement !

4. (a) Soit $k > \lambda$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant k) &= \sum_{i \geqslant k} \frac{\lambda^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{i \geqslant k} \frac{\lambda^{i-k}}{(k+1)\dots i} \\
&= \mathbb{P}(X = k) \sum_{j \geqslant 0} \frac{\lambda^j}{(k+1)\dots(k+j)} \\
&\leqslant \mathbb{P}(X = k) \sum_{j \geqslant 0} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^j \\
&\leqslant \mathbb{P}(X = k) \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{k}} \\
&\leqslant \mathbb{P}(X = k) \frac{k}{k - \lambda}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.
Si $k \geqslant 2\lambda$, on a $k - \lambda \leqslant \lambda < k$, donc $\dfrac{k}{k-\lambda} < 1$, ce qui assure que $\mathbb{P}(X \geqslant k) < \mathbb{P}(X = k)$.

(b) Si $\lambda \leqslant \dfrac{1}{2}$, alors pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $k \geqslant 2\lambda$, ce qui assure que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \geqslant 2} \mathbb{P}(X \geqslant i) &= \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(X > i) \\
&\leqslant \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(X = i) = 1,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(c) Calculons dans $[0, +\infty]$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}(X \geqslant i) &= \sum_{i \geqslant 0} \sum_{k \geqslant i} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k \geqslant 0} \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k \geqslant 0} (k+1) \mathbb{P}(X = k) \\
&= 1 + \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

5. (a) La fonction exponentielle est convexe, donc son graphe est au-dessus de sa tangente en 0. L'inégalité est donc démontrée.

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n^k}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{n}} \\ &\leqslant \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{k(k-1)}{2n}}.\end{aligned}$$

(c) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) &= \binom{n}{k}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{k(k-1)}{2n}}\frac{\lambda^k(n-\lambda)^{n-k}}{n^n} \\ &\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{k(k-1)}{2n}}\frac{(n-\lambda)^{n-k}}{n^{n-k}} \\ &\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{k(k-1)}{2n}}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{k(k-1)}{2n}}\mathrm{e}^{-(n-k)\frac{\lambda}{n}} \\ &\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\frac{k(k-1)}{2n}-\lambda+\frac{k\lambda}{n}} \\ &\leqslant \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\frac{k(1-k+2\lambda)}{2n}}.\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré.

(d) Si $k \geqslant 2\lambda+1$, alors l'exponentielle est négative, et $\mathbb{P}(Y=k) \leqslant \mathbb{P}(X=k)$.

(e) On a alors, pour $k \geqslant 2\lambda+1$,

$$\begin{aligned}&\sum_{k\geqslant k+1}\mathbb{P}(Y=j) \\ &\qquad\leqslant \sum_{j\geqslant k+1}\mathbb{P}(X=j) \\ &\qquad\leqslant \mathbb{P}(X>k) \\ &\qquad\leqslant \mathbb{P}(X=k) \text{ par la 4.(a)} \\ &\qquad\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré.