Chapitre 07 – Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1 Éléments propres, aspects géométriques de la réduction

1.1 Premières définitions

Remarque 1 (Rappel). Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **stable** par u si $u(F) \subset F$. On définit alors l'**endomorphisme induit** $u_F \in \mathscr{L}(F)$, $x \mapsto u(x)$.
En dimension finie, si $\mathscr{B}$ est une base de E adaptée à F, F est stable par u si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$, et alors A est la matrice de u_F.

Définition 2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E.

1. Une **valeur propre** de u est un élément λ de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x$.
2. Un **vecteur propre** de u est un vecteur x **non nul** de E vérifiant : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$.
3. Si $x \in E \setminus \{0_E\}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ satisfont $u(x) = \lambda x$, on dit que x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
4. Lorsqu'il n'est pas réduit à $\{0_E\}$, $\ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.
5. Le spectre d'un endomorphisme u, souvent noté $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble de ses valeurs propres.

On adapte les définitions aux matrices.

Remarque 3.

1. Un vecteur propre est non nul.
2. Un vecteur est propre si, et seulement si, il engendre une droite stable.
3. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire se lisent sur la diagonale.

Proposition 4. Si u et v commutent, tout sous-espace propre pour u est stable par v. Il en va de même de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition 5.

1. Toute somme (finie) de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.
2. En particulier, toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
3. Si E est de dimension finie n, tout endomorphisme de E a au plus n valeurs propres.

Dans tout ce qui suit, E est un espace de dimension finie.

Proposition 6. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow \det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0.$$

On a le même résultat pour les matrices.

Remarque 7.

1. Deux matrices semblables ont même spectre.
2. Si $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}'$ et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(M)$.

1.2 Diagonalisabilité

Définition 8.

1. Un endomorphisme de E est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
2. Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 9.

1. Diagonalisation des projecteurs et des symétries.
2. Application au calcul de puissances de matrices.

Proposition 10. Soit u un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :
- u est diagonalisable
- la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E
- la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à la dimension de E

On adapte cette proposition aux matrices.

Remarque 11. Si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont des droites.

Point de méthode 12 (Première manière de déterminer la diagonalisabilité). Étant donné $u \in \mathscr{L}(E)$, on résout l'**équation aux éléments propres** $u(x) = \lambda x$, d'inconnues $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$.

Proposition 13 (Théorème spectral (V1) – admis pour le moment). Toute matrice **symétrique réelle** A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$: il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

1.3 Trigonalisabilité et nilpotence

Définition 14.
1. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit triangulaire supérieure.
2. Une matrice M est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 15. Interprétation géométrique en termes de sous-espaces stables.

Définition 16. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On appelle indice de nilpotence de u le plus petit entier p tel que $u^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On adapte la définition aux matrices.

Proposition 17. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.
1. si u est nilpotent, alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n, i.e. $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. u est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec comme seule valeur propre 0.

2 Polynôme caractéristique

Définition 18. Le polynôme caractéristique d'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est le polynôme χ_M défini par : $\chi_M(X) = \det(X\mathrm{I}_n - M) = (-1)^n \det(M - X\mathrm{I}_n)$.
χ_M est donc le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$.

Remarque 19.
1. On a : $\chi_M(X) = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$.
2. Si $T = (t_{i,j})$ est triangulaire, $\chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - t_{i,i})$.

Proposition et Définition 20.
1. Prop. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

2. Déf. On définit, si $u \in \mathscr{L}(E)$, χ_u comme le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant u.

Proposition 21. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et F est un sous-espace stable par u, alors le polynôme caractéristique de u_F divise χ_u.

Proposition 22. $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des racines de χ_u dans $\mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre, si m est sa multiplicité (à comprendre comme « sa multiplicité dans χ_u »), si $E_\lambda(u)$ est le sous-espace propre correspondant, alors

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(u)) \leqslant m.$$

On adapte cette proposition aux matrices.

Proposition 23. u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre de u est égale à la dimension de l'espace propre correspondant.
En particulier, si χ_u est scindé à racines simples, u est diagonalisable.
On adapte cette proposition aux matrices.

Point de méthode 24 (Deuxième manière de déterminer la diagonalisabilité). On calcule le polynôme caractéristique d'une matrice A, on trouve ses racines $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et on résout, pour tout i, $AX = \lambda_i X$, en vérifiant que la dimension de l'ensemble des solutions est égale à la multiplicité de λ_i dans χ_A.

Proposition 25.

1. Un endomorphisme de E (resp. une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Proposition 26. Un endomorphisme u de E, avec $\dim(E) = n$, est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$. On adapte cette proposition aux matrices.
En particulier, sur $\mathbb{C}$, un endomorphisme est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

Proposition 27. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) dont le polynôme caractéristique est scindé, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Alors

$$\det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } \mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{(resp. pour } M\text{)}.$$

C'est en particulier le cas de toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3 Polynômes annulateurs

Remarque 28 (Rappels).

1. On définit, si P est un polynôme, u un endomorphisme et A une matrice, $P(u)$, $P(A)$.
2. L'application $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$.
3. L'idéal annulateur de u, noté $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X],\ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}\}$, noyau de ce morphisme, est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, non réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ lorsqu'on est en dimension finie. Il est engendré par un unique polynôme unitaire, appelé polynôme minimal de u, noté π_u ou μ_u.
4. On définit la même chose pour les matrices, et on remarque que deux matrices semblables ont même polynôme minimal (car si $A = RBR^{-1}$, alors pour $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A) = RP(B)R^{-1}$, donc $\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(B)$).
5. $\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$, image de ce morphisme, est une sous-algèbre commutative de $\mathscr{L}(E)$. Si $d = \deg(\pi_u)$, la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ en est une base. En particulier $\dim(\mathbb{K}[u]) = d$.

Proposition 29. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Si $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$ et si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
2. Si $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, toute valeur propre de u est racine de P. On adapte cette proposition aux matrices.
3. Les racines de π_u dans $\mathbb{K}$ sont les valeurs propres de u.

Proposition 30 (Lemme des noyaux). Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker\left(P_i(u)\right).$$

Proposition 31. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a l'équivalence entre les quatre propositions suivantes :

1. u est diagonalisable,
2. $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$,
3. u est annulé par un polynôme scindé à racines simples,
4. π_u est scindé à racines simples.

La même proposition fonctionne pour les matrices.

Point de méthode 32 (Troisième manière de déterminer la diagonalisabilité). Étant donné $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. une matrice A), on calcule u^2, u^3, ... et on essaie de trouver un polynôme scindé à racines simples annulant u.

Proposition 33. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est trigonalisable,
2. u est annulé par un polynôme scindé,
3. π_u est scindé.

La même proposition fonctionne pour les matrices.

Proposition 34. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u.

1. Le polynôme minimal de u_F divise le polynôme minimal de u.
2. Si u est diagonalisable, alors u_F est diagonalisable.

Théorème 35 (Cayley-Hamilton). Pour tout u dans $\mathscr{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$; pour toute M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M(M) = 0_n$.

Corollaire 36. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, π_u divise χ_u. Notamment, $\deg(\pi_u) \leqslant \dim(E)$.

Définition 37. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ le sous-espace $\ker\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m\right)$ où m représente l'ordre de multiplicité de λ dans χ_u.

Proposition 38. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose χ_u scindé, on écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$, $\pi_u = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{s_i}$, où les λ_i sont deux à deux distincts.

1. On a la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i})$.
2. Pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $\ker((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}) = \ker((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{s_i})$, et ce sous-espace vectoriel, noté ici $F_{\lambda_i}(u)$, est de dimension m_i.
3. Si on note v l'endomorphisme induit par u sur $F_{\lambda_i}(u)$, alors on dispose de w un endomorphisme nilpotent de $F_{\lambda_i}(u)$ tel que $v = \lambda_i \mathrm{Id}_{F_{\lambda_i}(u)} + w$.
4. (traduction matricielle) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose χ_M scindé, $\chi_M = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors M est semblable à une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} T_1 & & (0) \\ & T_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & T_r \end{pmatrix}$, où $T_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure avec des λ_i sur la diagonale.