Chapitre 06 – Suites et séries de fonctions

1 Modes de convergence

Définition 1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **simplement** (ou ponctuellement) vers f si pour tout x dans I, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit que f est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers f si pour tout n, $f_n - f$ est bornée sur I et si $\|f_n - f\|_\infty^{\mathrm{I}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On dit que f est la limite uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.

1. - convergence simple : $\forall x \in \mathrm{I},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
   - convergence uniforme : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathrm{I},\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$
2. Si les f_n et f sont bornées sur I, la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est exactement la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(\mathrm{I},\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.
3. On a l'unicité de la limite, ainsi que le passage aux combinaisons linéaires.
4. La convergence uniforme ne passe pas, **en général**, aux produits ni aux composées.

Définition 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

1. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément).
2. (Prop immédiate, quasi-définition, et fondamentale) La série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, converge uniformément vers 0.
3. On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement si pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est bornée sur I et si $\sum \|u_n\|_\infty^{\mathrm{I}}$ converge.

Proposition 4.

1. La convergence uniforme implique la convergence simple (vers la même fonction). La réciproque est (très) fausse.
2. La convergence normale de $\sum u_n$ implique la convergence uniforme de $\sum u_n$ et, pour tout x dans I, la convergence absolue de $\sum u_n(x)$.

Point de méthode 5.

- **Suites de fonctions.**
  1. On étudie d'abord la convergence simple, on en déduit la limite potentielle f.
  2. Pour étudier la convergence uniforme, on essaie de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité a_n **indépendante de** x et qui tend vers 0.
  3. Dans de (très rares) cas on cherchera vraiment le maximum de $f_n - f$ sur I.
- **Séries de fonctions.**
  1. On étudie d'abord la convergence simple grâce aux théorèmes sur les séries (critère de Riemann).
  2. On regarde s'il y a convergence normale (sur I, ou sur des intervalles adaptés) : c'est le cas le plus confortable.
  3. Lorsqu'on a affaire à une série alternée, on pense à étudier la convergence uniforme du reste, car **le comportement du reste d'une série alternée est gouverné par le premier terme** : si, pour tout x, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées, alors $|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)|$.

2 Applications

2.1 Limites et continuité

Proposition 6 (Théorème de la double limite). Soit a un point de I, ou une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$).

1. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I vers f et si, pour tout n, f_n admet une limite (finie) ℓ_n en a, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.
2. Si une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, u_n admet une limite (finie) ℓ_n en a, alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme de la série admet une limite en a et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Proposition 7 (Continuité). Soit $a \in \mathrm{I}$.

1. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I vers f et si, pour tout n, f_n est continue en a, alors f est continue en a.
   En particulier, si pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.
2. Si une série $\sum u_n$ de fonctions définies sur I converge uniformément sur I et si, pour tout n, u_n est continue en a (resp. sur I), alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue en a (resp. sur I).

Point de méthode 8 (Méthode FONDAMENTALE). Pour **TOUS** les théorèmes de régularité que l'on verra (continuité, intégration, dérivation), il suffit de vérifier la convergence uniforme **sur tout segment** de I, ou plus généralement sur des intervalles adaptés à la situation.
Plus précisément, on écrira, si (f_n) est une suite de fonctions et f est sa limite simple :
« Soient $\alpha < \beta$ tels que $[\alpha, \beta] \subset \mathrm{I}$.
(...)
Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.
Comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, f_n est continue sur I et comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, on en déduit que f est continue sur I. »
Attention : ce n'est pas vrai pour le théorème de la double limite en une extrémité a de I : il faut la convergence uniforme sur un voisinage de a dans I (du type $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, ou $\mathrm{I} \cap]a - \eta, a + \eta[$ si a est réel).

2.2 Intégration et régularité supérieure

Proposition 9 (Intégration d'une limite uniforme).

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I convergeant uniformément sur tout segment de I vers f, et soit $a \in \mathrm{I}$. Alors la suite de fonctions $\left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$.
2. En particulier, si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur **le segment** $[a, b]$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f, alors $\int_a^b f_n(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)dt$.
3. Si une série $\sum u_n$ de fonctions continues sur **le segment** $[a, b]$ converge uniformément sur $[a, b]$, alors $\sum \int_a^b u_n$ converge et $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)dt$.

Proposition 10 (Dérivation d'une suite, d'une série de fonctions).

1. Si une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I converge simplement sur I vers une fonction f, et si la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'=g$.
2. Si une série $\sum u_n$ de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ converge simplement sur un intervalle I et si la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa dérivée est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.

Point de méthode 11 (Méthode FONDAMENTALE, bis). Pour **TOUS** les théorèmes de régularité que l'on verra, il suffit de vérifier la convergence uniforme **sur tout segment** de I.

Remarque 12. On étend la proposition précédente pour démontrer la classe $\mathscr{C}^k$ de la limite d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en démontrant la convergence simple des $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ $(0\leqslant j<k)$ sur I et la convergence uniforme de $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ sur I (**ou, encore une fois, sur tout segment de I**). On étend bien sûr aux séries de fonctions.

Proposition 13.

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathscr{C}^k$ telle que
   - $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I,
   - pour tout i dans $[\![1,k-1]\!]$, $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction g_i sur I,
   - $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers une fonction g_k sur I

   Alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ et pour tout i dans $[\![1,k]\!]$, $f^{(i)}=g_i$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathscr{C}^k$ telle que
   - $\sum u_n$ converge simplement sur I,
   - pour tout i dans $[\![1,k-1]\!]$, $\sum u_n^{(i)}$ converge simplement sur I,
   - $\sum u_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur I

   Alors $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et pour tout i dans $[\![1,k]\!]$, $S^{(i)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{(i)}$.
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ telle que
   - $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I,
   - pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers une fonction g_i sur I,

   Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $f^{(i)}=g_i$.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ telle que
   - $\sum u_n$ converge simplement sur I,
   - pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $\sum u_n^{(i)}$ converge **uniformément** sur I,

   Alors $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout i dans $\mathbb{N}^*$, $S^{(i)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{(i)}$.

On peut remplacer « converge uniformément sur I » par « converge uniformément sur tout segment de I » et avoir la même conclusion en termes de régularité.

Point de méthode 14 (Étude d'une fonction définie comme somme d'une série). Pour $S:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$:

- **domaine** : convergence simple ;
- **régularité** : théorèmes précédents, avec convergence uniforme (souvent normale) sur des intervalles adaptés ;
- **limites aux bornes** : théorème de la double limite (convergence uniforme au voisinage de la borne), ou encadrement direct ;
- **équivalents aux bornes** : souvent par comparaison série-intégrale, en encadrant $u_n(x)$ par des intégrales lorsque $t\mapsto u_t(x)$ est monotone.

3 Approximation uniforme

Théorème 15 (Théorème de Weierstrass). Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Théorème 16 (Théorème d'approximation par des fonctions en escalier). Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Alors il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque 17. On dit que l'ensemble des fonctions polynomiales est **dense** dans $(\mathscr{C}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ et que l'ensemble des fonctions en escalier est **dense** dans $(\mathscr{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$: tout élément de l'espace est limite uniforme d'une suite d'éléments de la partie.