TD 07
Réduction

1 Exercices classiques

1.1 Réductions concrètes

Exercice 1. ●○○ Soit φ l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(A) = A + \mathrm{Tr}(A)J$ où J désigne la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 . Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer ses éléments propres ainsi que son éventuelle diagonalisabilité.

Exercice 2. *Matrices vérifiant une certaine équation.* ●○○ Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}(M) = 3$.

Exercice 3. *Réduction concrète d'endomorphismes différentiels.* ●◐○ *Les questions de cet exercice sont indépendantes*

1. Donner la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \left(X^2-1\right)P'' + (2X+1)P'$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ et montrer que φ est diagonalisable.
2. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X(X-1)P' - XP$. Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto a(b-X)P' - nP$. Déterminer le spectre de f via la décomposition en éléments simples de P'/P.

Exercice 4. *Matrice compagnon et endomorphismes cycliques.* ●◐○

1. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme unitaire. La matrice compagnon de P est

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer que le polynôme caractéristique de C_P est P.
2. Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   - il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\left(x_0, f_M(x_0), \ldots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$,
   - M est semblable à une matrice compagnon.

Exercice 5. *Réduction de matrices par blocs.* ●●○ *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.* Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si A et B le sont.
2. On suppose que $AB = BA$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer, pour tout k dans $\mathbb{N}$, M^k.
   (b) En déduire, pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, une expression de $P(M)$.
   (c) Conclure que M est diagonalisable si, et seulement si A est diagonalisable et B est nulle.

Cf. exercices 84 et 85 pour des prolongements.

1.2 Deux endomorphismes : commutation, produits uv et vu

Exercice 6. *Commutation et codiagonalisation (1).* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, possédant n valeurs propres distinctes, et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que f est diagonalisable. On note $\mathscr{B}$ une base de diagonalisation de f.
2. Démontrer que la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale. On a donc **codiagonalisé** f et g.

3. Reformuler matriciellement le résultat précédent.

Exercice 7. *Valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$.* ●◐○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit λ une valeur propre de $u \circ v$. Démontrer que, si $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de $v \circ u$.

2. Démontrer que, si $\lambda = 0$ est une valeur propre de $u \circ v$ et E est de dimension finie, alors λ est une valeur propre de $v \circ u$.

3. En considérant $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \mapsto P'$ et v qui à P associe l'unique primitive de P qui s'annule en 0, démontrer que le résultat de la question précédente est faux en dimension infinie.

Exercice 8. *Commutation et codiagonalisation (2).* ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E, diagonalisables, tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que pour toute valeur propre λ de f, g stabilise $E_\lambda(f)$.

2. Démontrer que l'induit par g sur $E_\lambda(f)$ est diagonalisable.

3. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle les matrices de f et de g sont diagonales.

4. Traduire matriciellement le résultat précédent.

Exercice 9. *Cotrigonalisation (1).* ●●○ Soient u et v deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Soit λ une valeur propre de u. En considérant l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$, démontrer que u et v ont un vecteur propre en commun.

2. En déduire, par récurrence sur n, qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures. On dit que u et v sont cotrigonalisables.

Exercice 10. ●●○ Soient u et v deux endomorphismes de $\mathscr{L}(E)$, vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$. Notre but est de montrer que u est nilpotent.

1. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

2. Méthode 1. En déduire, en considérant les valeurs propres de l'endomorphisme $\varphi : w \mapsto w \circ v - v \circ w$, que u est nilpotente.

3. Méthode 2.

(a) Démontrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$, on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = uP'(u)$.

(b) En déduire que π_u divise $X\pi_u'$, puis que u est nilpotent.

Exercice 11. *Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.* ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. On définit le commutant de f par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$.

2. Montrer : $g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \quad E_\lambda(f)$ stable par g

3. Déterminer $\dim \mathscr{C}(f)$.

4. Si les valeurs propres de f sont simples, montrer que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

1.3 Endomorphismes d'espaces de matrices, traces

Exercice 12. *Endomorphisme de multiplication.* ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $g_A : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{array} \right.$.

1. Démontrer que pour tout polynôme P, $P(g_A) = g_{P(A)}$.

2. En déduire que $\pi_{g_A} = \pi_A$, que $\mathrm{Sp}(g_A) = \mathrm{Sp}(A)$, et que A est diagonalisable si, et seulement si g_A est diagonalisable.

3. Démontrer que $\chi_{g_A} = \chi_A^n$.

4. Démontrer que $E_\lambda(g_A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Im}(M) \subset E_\lambda(A)\}$.

Exercice 13. *Une CNS de nilpotence.* ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si, et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$.

Exercice 14. *L'endomorphisme $M \mapsto AMB$, Mines-Ponts PSI 2015.* ●●○ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$: $M \mapsto AMB$.

1. Montrer que $\varphi = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.
2. Montrer que φ est nilpotente si et seulement si A ou B est nilpotente.
3. Montrer que φ est diagonalisable si A et B le sont. Réciproque ?

Exercice 15. *Équation de Sylvester $AX - XB = C$.* ●●◐ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$;
2. pour tout X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \Rightarrow X = 0$;
3. $\chi_B(A)$ est inversible (où χ_B désigne le polynôme caractéristique de B) ;
4. A et B n'ont pas de valeur propre commune.

2 Aspects géométriques : vecteurs propres, valeurs propres, polynôme caractéristique, réduction concrète

2.1 Calculs de réduction

Exercice 16. *Diagonalisabilité de matrices triangulaires.* ◐○○ Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17. *CCINP 24.* ●○○ Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M.
2. Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
3. M est-elle diagonalisable ?
4. M est-elle trigonalisable ? Si oui, trouver une matrice triangulaire supérieure à laquelle M est semblable.
5. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x' &= x + 4y - 2z \\ y' &= 6y - 3z \\ z' &= -x + 4y \end{cases}$

Exercice 18. *Diagonalisation explicite.* ●○○ Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19. *Diagonalisation explicite (2).* ●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer le polynôme minimal de A.

Exercice 20. *Réduction concrète d'une matrice 3×3.* ●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont réels.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Démontrer que les valeurs propres de A^2 sont (réelles et) négatives ou nulles.

Exercice 21. *Mines-Telecom 24*. ●○○ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note I et S ses valeurs propres avec $\mathrm{I} \leqslant S$.

1. Donner les expressions de I et S.
2. Calculer la probabilité que M soit inversible.
3. Calculer la covariance de I et de S. Les variables I et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 22. *Un type de matrices simple à diagonaliser*. ●◐○ Pour chacune des matrices, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les sous-espaces propres associés, une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que cette matrice s'écrive PDP^{-1} :

1. la matrice J ne contenant que des 1.
2. la matrice A avec des 1 partout, sauf la diagonale qui est nulle.
3. la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 23. *Mines PSI 22*. ●◐○ Diagoniser $M = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24. *CCINP MP 2026*. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et 0 sinon.

1. Déterminer le spectre de M.
2. Montrer qu'il n'existe pas de forme linéaire ϕ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi(A) \in \mathrm{sp}(A)$.

Exercice 25. *Valeurs propres d'une matrice tridiagonale*. ●●○ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + 2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)$ et en déduire les valeurs propres de A.

2.2 Endomorphismes d'espaces de polynômes ou de matrices

Exercice 26. *CCINP 24*. ●○○ Soit φ l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de X^2P par $X^4 - 1$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donnez A la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. A est-elle diagonalisable ? (on pourra calculer A^2)
3. Donner le spectre de φ.
4. Donnez les sous-espaces propres de φ.
5. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.
6. L'application φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$?
7. Que représente la matrice A géométriquement ?

Exercice 27. *Mines-Telecom 24*. ●○○ Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + \mathrm{tr}(A)\mathrm{I}_n$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Trouver les valeurs propres de f.
3. f est-elle diagonalisable ?
4. Donner $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.
5. f est-elle un automorphisme ?
6. Lien entre Id_E, f et f^2 ?
7. Donner f^{-1}.

Exercice 28. *Mines-Télécom MP 2016*. ●○○ Soit A une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = (\mathrm{Tr}(A))M + (\mathrm{Tr}(M))A.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{rg}(\varphi)$ (on distinguera selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(A)$).
3. Diagonaliser φ (quand cela est possible).

Exercice 29. *Application de transposition*. ●○○ Montrer que les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

$$\tau : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto M^\top \end{array} \right. \text{ et } \tau : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto M + M^\top \end{array} \right.$$

sont diagonalisables, et préciser les espaces propres correspondants.

Exercice 30. ●◐○ Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$ avec $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(M)A - \mathrm{Tr}(A)M$$

1. Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que φ est diagonalisable puis calculer $\mathrm{Tr}\,\varphi$ et $\det\varphi$.

Exercice 31. *X MP 23*. ●●● Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(\mathrm{I}_n + (X-1)P)$.

1. Calculer R_P en fonction de P.
2. Soient P, Q des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.
3. Soit φ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1 , pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
   (b) Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour i, j dans $[\![1, n]\!]$?
   (c) Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,\varphi(E_{i,1})$.

2.3 Dimension infinie

Exercice 32. *Liberté par la réduction*. ●○○ Démontrer, à l'aide d'arguments de réduction, que les familles suivantes sont libres dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. les $(x \mapsto \mathrm{e}^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$.
2. les $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. les $(t \mapsto t^a)_{a>0}$, dans $\mathscr{C}^\infty(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Exercice 33. *Mines-Telecom 24*. ●◐○ Soit E, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x non nul, on définit

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{x} f(t)\,dt.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Montrer que φ est injectif.
3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 34. *Quelques exemples en dimension infinie*. ●◐○

1. Montrer que $S : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ admet tout élément de $\mathbb{K}$ comme valeur propre.
2. Montrer que $D : \left| \begin{array}{c} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$ admet tout réel comme valeur propre, et n'admet aucun polynôme annulateur.
3. Montrer que $\Delta : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ admet 0 pour seule valeur propre.

Exercice 35. ●●○ Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et pour $f \in E$,

$$L(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $L \in \mathscr{L}(E)$ puis que pour tout $f \in E$, $L(f)$ est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer, pour $f \in E$, $L(f)(0)$ et $L(f)'(1)$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de L.

2.4 Applications : systèmes différentiels, suites récurrentes

Exercice 36. *Suite récurrente linéaire par diagonalisation.* ●○○ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On définit la suite (u_n) par u_0 et u_1 dans $\mathbb{R}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$. Exprimer u_n pour tout n.

Exercice 37. *Un système différentiel, CCINP 24.* ●◐○ Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et (S) le système différentiel $X' = AX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Expliciter P et D telles que $A = PDP^{-1}$.
3. On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par U et le résoudre. Déterminer alors les solutions de (S).
4. Soit (S') le système différentiel $X'' = AX$. Déterminer les solutions réelles de (S').
5. Soit E l'ensemble des solutions réelles bornées de (S'). Montrer que E est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 38. *Mines-Ponts MP 2026.* ●◐○ Résoudre :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$$

Exercice 39. *Système différentiel, Mines-Telecom 22.* ●◐○ Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$

Exercice 40. *Centrale PC 2023.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite réelle vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}.$$

On introduit le polynôme $P_p = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

1. Trouver une matrice A_p de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = A_p U_n.$$

2. Montrer que P_p est le polynôme caractéristique de la matrice A_p.

3. Écrire une fonction en Python qui détermine les racines complexes de P_p en fonction de p.
Appliquer cette fonction pour quelques valeurs de p et émettre des conjectures sur le nombre de racines distinctes de P_p ainsi que les modules de ces racines.

4. Si $p \geqslant 2$, vérifier que P_p admet une unique racine dans $]1,2[$. On la note x_p.

5. Montrer que toutes les autres racines de P_p ont un module strictement inférieur à x_p.

6. Montrer que P_p est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples. Qu'en déduit-on sur la matrice A_p ?

7. Représenter graphiquement les points (p, x_p) pour p variant de 2 à 20 . Émettre des conjectures quant au comportement de la suite $(x_p)_{p\geqslant 2}$.

8. Démontrer ces conjectures.

2.5 Équations matricielles, similitude

Exercice 41. *CCINP 24*. ◐○○ Soient A et B deux matrices carrées de taille n et de même polynôme caractéristique P.

1. Montrer que si P admet n racines distinctes alors A et B sont semblables.

2. Donner un exemple de deux matrices de même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

Exercice 42. ●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A et résoudre l'équation $M^2 + M = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 43. *CCINP PSI 2025*. ●◐○

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$. En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

3. Désormais $a \geqslant 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

4. Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si M est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$. Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

Exercice 44. *TPE MP 2015*. ●◐○ Soient A et B deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation (E) : $AM = MB$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose qu'il existe une solution M non nulle de (E).
(i) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B)$.
(ii) Montrer que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) \neq \emptyset$.

2. On suppose que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) \neq \emptyset$.
(i) Montrer que $\forall X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $XY^\top \neq 0$.
(ii) Prouver l'existence de M vérifiant (E).

Exercice 45. *Matrices semblables ou non ?*. ●◐○

1. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 46. *Équations du second degré matricielles*. ●●○

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 47. *Matrices de carré nul et similitude, Mines-Ponts MP 2017.* ●●◐ Soit n dans $\mathbb{N}^*$

1. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\ker(A) = \mathrm{Im}(A)$ et $\ker(B) = \mathrm{Im}(B)$. Montrer que A et B sont semblables.

2. Soit $F = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = 0\}$. Montrer que F est une réunion finie de classes de similitude et dénombrer ces classes.

2.6 Spectre : rang, trace, existence et localisation des valeurs propres

Exercice 48. *CCINP MP 2018.* ●○○ On note A^T la transposée d'une matrice A.
Soit $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, toutes deux non nulles. Considérons la matrice $M = X.Y^T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

1. Démontrer que le rang de f est égal à 1. En déduire l'image de f.

2. Démontrer que si $\mathrm{Im}(f) \not\subset \ker(f)$ alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^n$.

3. Démontrer que si $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ alors M est semblable à $E_{1,n}$ où $E_{1,n}$ est la matrice ayant un 1 à la première ligne, n-ième colonne et des zéros partout ailleurs.

4. En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) f est diagonalisable
(b) $\mathrm{Im}(f) \not\subset \ker(f)$
(c) $X^T.Y \neq 0$.

Exercice 49. *Endomorphismes simples.* ●◐○ Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que E est le seul sev non nul stable par u.

1. L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?

2. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $\mathscr{L}_x = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

3. Déterminer mat $_{\mathscr{L}_x} u$. Cette matrice dépend-elle du choix de $x \in E \setminus \{0_E\}$?

Exercice 50. *Réduction d'une matrice de rang* 1. ●●○ Soit A une matrice de rang 1.

1. Démontrer que $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.

2. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 51. *Mines-Ponts 24.* ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 2, \mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 52. *Mines-Ponts 24, réduction et équation séculière.* ●●○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 < a_1 < \cdots < a_n$ tel que la $i^{\text{ième}}$ ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$.

2. En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 53. *Condition de nilpotence ?.* ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^{n-1}) = 0$. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.

Exercice 54. *Centrale 22.* ●●◐ On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs et vérifient : $\forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1$. Elle est dite *stochastique stricte* si, de plus, tous ses coefficients sont strictement positifs.

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par multiplication.

2. Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.

3. Montrer que toute valeur propre d'une matrice stochastique est de module inférieur ou égal à 1.

4. Montrer que si X est propre pour une matrice stochastique stricte, pour une valeur propre de module 1, alors le vecteur dont les coordonnées sont les modules de celles de X est propre pour 1 .

5. On rappelle qu'une matrice $C = (c_{ij})$ est dite *à diagonale strictement dominante* lorsque $|c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$ pour tout i, et qu'une telle matrice est inversible. Montrer que si M est stochastique stricte, alors $\ker(M - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1.

6. Montrer que les valeurs propres autres que 1 d'une matrice stochastique stricte sont de module strictement inférieur à 1.

7. Soit M stochastique et λ une valeur propre de M. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - m_{ii}| \leqslant 1 - m_{ii}$. Qu'en déduit-on sur la localisation du spectre de M ?

8. Montrer que si λ est une valeur propre de module 1 d'une matrice stochastique M, alors λ est une racine m-ième de l'unité pour un certain $m \leqslant n$.

2.7 Commutation et commutant

Exercice 55. *Mines-Telecom PSI 24, 25.* ●◐○ Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XB - BX$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(A^k) = kA^k$.

3. En déduire que A est nilpotente.

Exercice 56. ●◐○ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouver un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que son commutant (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f) est de dimension 5.

Exercice 57. *Endomorphismes stabilisant toutes les droites.* ●●○

1. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E qui commutent. Montrer que tout sous-espace propre de v est stable par u.

2. Quels sont les endomorphismes de E qui stabilisent toutes les droites vectorielles ?

3. On suppose E de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes diagonalisables ?

Exercice 58. *Commutant d'un nilpotent, d'un trigonalisable.* ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On définit le commutant de f par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

1. Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$.

2. On suppose f nilpotent d'indice n. Déterminer $\mathscr{C}(f)$.

3. On suppose seulement f trigonalisable. Montrer $\dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

Exercice 59. *Vecteur propre commun sous une relation de commutation.* ●●● Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie tels qu'il existe a et b dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$u \circ v - v \circ u = au + bv.$$

Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

3 Aspects algébriques : polynômes annulateurs, sous-espaces caractéristiques

3.1 Polynômes annulateurs, polynôme minimal

Exercice 60. *CCINP 24.* ●○○ Soient A et B deux matrices, et P un polynôme.

1. Montrer que si $P(A) = 0$, alors toute valeur propre de A est racine de P.

2. Soit $U \neq 0$ telle que $AU = UB$. Montrer que $P(A)U = UP(B)$.

3. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

Exercice 61. *CCINP 24.* ●○○ Soit $n \geqslant 2$. On considère $u : M \in : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto aM + bM^\top$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de u.

3. Trouver les valeurs propres de u.

4. u est-il diagonalisable ?

Exercice 62. ●○○ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 = 3u + 3\mathrm{Id}_E$. Déterminer le polynôme minimal de u.

Exercice 63. ●○○ Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sont-elles diagonalisables ?

Exercice 64. ●○○ Soit A une matrice de rang 1. Déterminer π_A.

Exercice 65. *CCINP 24*. ●◐○ Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M = 0$.

1. Démontrer que les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X$.

2. Caractériser les matrices vérifiant les conditions de l'énoncé.

Exercice 66. *Mines-Telecom 24*. ●◐○ On s'intéresse aux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(*) \quad \begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \mathrm{tr}(M) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que si M vérifie (*), alors les valeurs propres de M sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$.

2. Exprimer les matrices M vérifiant (*).

Exercice 67. *Polynôme minimal et puissances*. ●◐○ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver le polynôme minimal de A. En déduire que $\mathbb{R}[A] = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_n, A)$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer A^k en fonction de I_3 et A.

3. Trouver la dimension du commutant de A, c'est-à-dire de l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Exercice 68. ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \mathrm{I}_n - A$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ puis établir $\det(A) > 0$.

Exercice 69. *Réduction et inverse*. ●●○ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^{-1} \in \mathbb{K}[A]$.

2. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ à l'aide de χ_A.

Exercice 70. *Dimension multiple de 3 par un annulateur, Mines-Ponts PSI 2016*. ●●○ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^3 + f^2 - \mathrm{Id}_E = 0$ et $\mathrm{Tr}(f) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est un multiple de 3.

3.2 Polynômes en u, projecteurs spectraux, commutant

Exercice 71. *CCINP 24*. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n n$ valeurs propres distinctes de f.

1. Justifier que $\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

2. Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h = P(f)$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que h et f commutent.

3. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

(a) Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

(b) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre de f ? Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

(c) En déduire qu'il existe une base de vecteurs propres commune à f et g.
(d) En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

4. Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ d'une dimension qu'on précisera.

Exercice 72. *Mines-Telecom PSI*. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit f un endomorphisme diagonalisable de E.
On considère le commutant de f, défini par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}.$$

Démontrer que

$$g \in \mathscr{C}(f) \Leftrightarrow \text{ Tout sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g.$$

Exercice 73. *Mines-Télécom MP 2026*. ●◐○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant exactement n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. En supposant dans un premier temps que A est diagonale, montrer que l'algèbre $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en A est égale à l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Revenir au cas général. Montrer qu'il existe des matrices $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p M_i.$$

Exercice 74. ●●○ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres de u, $p_1, \dots, p_r$ les projecteurs associés à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$. Montrer que pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $p_i \in \mathbb{K}[u]$.

Exercice 75. *Réciproque des projecteurs spectraux, Mines-Ponts MP 2016*. ●●○ Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$, $A, B_1, \dots, B_p$ des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $b_1, \dots, b_p$ des nombres complexes distincts. On suppose : $\forall k \in \{0, \dots, p\},\ A^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k B_i$

1. Montrer que, si $1 \leqslant i \leqslant p$, B_i est dans $\mathbb{C}[A]$.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. Pour k dans $\mathbb{N}$, calculer A^k.

3.3 Lemme des noyaux, sous-espaces caractéristiques

Exercice 76. ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u) \in \mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si $P \wedge \pi_u = 1$.

Exercice 77. *Sous-espaces caractéristiques : exemple concret*. ●○○ Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\left(f^2\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{id}_E\right)$.

2. Donner un élément de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) \setminus \mathrm{Ker}(f)$.

3. Démontrer que M est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Soit $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $g^2 = f$. Démontrer que $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ est stable par g. En déduire qu'un tel g n'existe pas.

Exercice 78. ●◐○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, P et Q deux polynômes premiers entre eux tels que $(PQ)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Démontrer que $\ker(P(u)) \oplus \mathrm{Im}(P(u)) = E$.

Exercice 79. *Quand a-t-on $P(A)$ nilpotente ?*. ●◐○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ses valeurs propres. On note $Q = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$.

1. Démontrer que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ est nilpotente est $Q\mathbb{C}[X]$.

2. Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)$ est nilpotente $\Leftrightarrow P(A) = 0_n$.

3.4 Critères de diagonalisabilité

Exercice 80. *Centrale 24*. ●●○ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que M^2 est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.
2. On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que M est diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P \circ Q(M) = 0_n$.
   (b) Soit $\beta_1, \dots, \beta_k$ les racines de P. En considérant les polynômes $(Q(X) - \beta_1), \dots, (Q(X) - \beta_k)$, montrer que toute valeur propre de M est racine simple de $P \circ Q$. Conclure.

Exercice 81. *Mines-Ponts MP 2026*. ●●○ Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension n, et f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $k \geqslant 2$ tel que f^k est un projecteur. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^k)$.

Exercice 82. ●●◐ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, montrer que u est diagonalisable si et seulement si u^2 est diagonalisable.
2. Dans le cas général, démontrer que si u^2 est diagonalisable, alors u est diagonalisable ssi $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 83. *Centrale 24*. ●●○ On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

1. Soit $R \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.
2. On suppose que U et V sont semblables et que A est diagonalisable.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme P scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0_n$.
   (b) Montrer que $A = 0_n$.

Exercice 84. *Réduction d'une matrice par blocs (2).* ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Exprimer le déterminant de M en fonction de celui de A.
2. Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
3. Démontrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Exercice 85. ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Démontrer que A est diagonalisable si, et seulement si B est diagonalisable.

3.5 Sous-espaces stables

Exercice 86. *Nombre fini de sous-espaces stables, Mines-Ponts MP 2026*. ●●○ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que le polynôme caractéristique de f est scindé, noté :
$$\chi_f = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k}$$
On pose, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $E_k = \ker(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)^{n_k}$. Montrer que :
$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$$
2. Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension p ($\dim V = p$) et soit $u \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme nilpotent tel que $u^{p-1} \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que :
$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(b) En déduire que le nombre de sous-espaces vectoriels de V stables par u est fini.

3. On suppose que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\dim E_k = 1$ (chaque E_k est une droite vectorielle).
Montrer que le nombre de sous-espaces vectoriels de E stables par f est fini.

Exercice 87. *Endomorphismes semi-simples.* ●●○ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit semi-simple si tout sous-espace vectoriel de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.
Montrer que u est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

Exercice 88. *Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.* ●●◐ Soit u un endomorphisme diagonalisable, $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ses valeurs propres, $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ les sous-espaces propres associés.

1. Démontrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si, et seulement s'il existe $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ tels que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

2. Si u possède n valeurs propres distinctes, combien possède-t-il de sous-espaces stables ?

Exercice 89. *Polynôme minimal et sous-espaces stables.* ●●◐ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que F et G sont des supplémentaires de E stables par u. On note $v = u_F$ et $w = u_G$ et π le polynôme minimal d'un endomorphisme.

1. Justifier que χ_v et χ_w divisent χ_u. Faire de même avec π_v, π_w et π_u.

2. Montrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$.

Exercice 90. *Hyperplans stables et diagonalisabilité, Mines-Ponts MP 2018.* ●●◐ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. Montrer que f est diagonalisable si et seulement s'il existe n hyperplans $H_1, \dots, H_n$ de E stables par f tels que $H_1 \cap \dots \cap H_n = \{0\}$.

3.6 Familles qui commutent

Exercice 91. *Perturbation nilpotente.* ●●○ Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient u, v dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, avec v nilpotent.

1. Montrer que $\chi_{u+v} = \chi_u$. En déduire que $\det(u + v) = \det(u)$.

2. Ce résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus que u et v commutent ?

Exercice 92. *Commutation et codiagonalisation (3).* ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de chaque u_i est diagonale.

Exercice 93. *Cotrigonalisation (cas général).* ●●◐ Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes de E, de dimension n, trigonalisables et commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que pour tout i, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 94. *Endomorphismes de multiplication à droite, à gauche.* ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $g_A : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{array} \right.$ et $d_A : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto MA \end{array} \right.$.

1. Reprendre l'exercice 12, mais avec d_A.

2. Démontrer que, si A et B sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ et $M \mapsto AM + MB$ le sont.

3. ●●● Démontrer que, pour A et B quelconques, si $\varphi : M \mapsto AM + MB$, $\text{Sp}(\varphi) = \text{Sp}(A) + \text{Sp}(B)$.

3.7 Spectre et puissances

Exercice 95. ●●○ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, i.e. qui vérifie :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

2. Montrer que 1 est valeur propre de M.

3. Prouver que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M), |\lambda| \leqslant 1$, et qu'en cas d'égalité, $\lambda = 1$ si de plus les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs.

Exercice 96. *Disques de Gershgörin.* ●●○ Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On dit que A est à diagonale strictement dominante si $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|$.

(a) Démontrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

2. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $D_i(A)$ le disque de $\mathbb{C}$ défini par la condition $|z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq i} |a_{i,j}|$. Démontrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset D_1(A) \cup \cdots \cup D_n(A)$.

Exercice 97. *Convergence des puissances et des moyennes de Cesàro.* ●●● Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite P est un projecteur sur $\ker(A - \mathrm{I}_n)$ qui commute avec A.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

3. On pose $M_k = \dfrac{1}{k}(\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^{k-1})$. Démontrer que si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite P est un projecteur sur $\ker(A - \mathrm{I}_n)$ qui commute avec A.

4. Démontrer que si (A^k) converge, alors $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi. La réciproque est-elle vraie ?

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

3.8 Groupes finis de matrices

Exercice 98. *Centrale MP 24.* ●●◐ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un entier premier impair. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.

1. (a) Rappeler la définition de la comatrice.

(b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = \mathrm{I}_n$ et que $A = \dfrac{1}{p}(M - \mathrm{I}_n)$ soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M = \mathrm{I}_n$.

3. Déterminer un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 99. *Centrale MP 2015.* ●●● Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Si G est fini, montrer que $\forall g \in G,\ \exists N_g \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{N_g} = \mathrm{I}_n$.

2. On considère les deux assertions suivantes :

(a) G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

(b) $T_n(G) = \{\mathrm{Tr}(g),\ g \in G\}$ est fini et tous les éléments de G sont diagonalisables.

Montrer que (a) implique (b).

3. Montrer la réciproque (on pourra s'aider de la fonction $f : X \mapsto (\mathrm{Tr}(A_1X), \ldots, \mathrm{Tr}(A_pX))$ avec $(A_1, \ldots, A_p)$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$).

Exercice 100. *Théorème de Kronecker.* ●●●

1. Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Existe-t-il une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de polynôme caractéristique $\pm P$?

2. Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont toutes les racines complexes sont de module inférieur ou égal à 1. Montrer que les racines non nulles de P sont des racines de l'unité.

Indications

Ex 5. **2.b.** On doit trouver une expression avec B et $P'(A)$ en haut à droite.

Ex 13. Pour le sens réciproque, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de A et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités, on montrera que $m_1, \dots, m_r$ sont solution d'un système linéaire avec une matrice presque de Vandermonde.

Ex 14. **1.** Supposer $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
2. Calculer φ^{n^2} et utiliser la question 1.
3. Utiliser que si $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, alors $\psi : M \mapsto P^{-1}MQ$ est un isomorphisme.

Ex 22. Pour les questions 2 et 3, exprimer ces matrices à l'aide de la matrice J.

Ex 23. Résoudre une équation aux valuers propres $MX = \lambda X$.

Ex 24. **2.** Que vaut $\phi(E_{ij})$?

Ex 25. Remarquer que $\mathscr{D}_n(\theta)$ est un déterminant tridiagonal classique, la récurrence est relativement simple et nous permet de trouver facilement n valeurs de θ différentes pour lesquelles $D_n(\theta) = 0$.

Ex 26. **2.** Remarquer que c'est la matrice d'une symétrieu.

Ex 28. **2.** Distinguer $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Ex 29. Écrire τ dans une bonne base adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$.

Ex 31. **1.** Diagonaliser P.
2. Coréduire P et Q.
3.a. Calculer $\varphi(E_{i,i})^2$.
3.c. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi(E_{i,1})) = \mathrm{Im}(\varphi(E_{i,i}))$.

Ex 32. À chaque fois, remarquer que la famille en question est une famille de vecteurs propres d'un certain endomorphisme.

Ex 33. **3.** Faire une équaiton aux valeurs propres et résoudre une équation différentielle.

Ex 35. **1.** Découper l'intégrale en deux.
3. Résoudre une équation aux valeurs propres, et dériver l'équation obtenue.

Ex 36. **2.** Exprimer matriciellement la relation de récurrence et utiliser la matrice diagonalisée.

Ex 39. Remarque : on n'a pas besoin de déterminer P^{-1}.

Ex 45. Regarder déjà si les polynômes caractéristiques sont les mêmes : s'ils sont différents, la conclusion est immédiate. Sinon, regarder les sous-espaces propres : deux matices diagonalisables avec les mêmes valeurs propres (et la même multiplicité) sont semblables.

Ex 46. Diagonaliser les matrices, et remarquer qu'une solution M de l'équation commute avec A : elle stabilise les sous-espaces propres de A.

Ex 47. **1.** Considérer les endomorphismes canoniquement associés à A et B et les écrire simplement dans une bonne base.
2. Comme la 1, mais on distingue selon la valeur de $\mathrm{rg}(A)$.

Ex 49. **1.** Se rappeler le lien entre valeur propre et droite stable.

Ex 51. Analyser les valeurs propres de A, et remarquer que E est la somme de trois sous-espaces propres de A.

Ex 52. **1.** Calculer explicitement le polynôme caractéristique. On trouve $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x + a_k) - \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k\neq i}(x + a_k)$.

2. Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i}$.

Ex 53. Raisonner comme à l'exercice 13, distinguer le cas n vp distinctes et $r < n$ vp distinctes.

Ex 54. **3.** Considérer, pour V un vecteur propre, i tel que $|v_i| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |v_k|$.
6. Si $\lambda \neq 1$, montrer que $M - \lambda \mathrm{I}_n$ est à diagonale strictement dominante.
7. Raisonner par contraposée et se ramener à une matrice à diagonale strictement dominante.

Ex 55. **3.** On montrera que si A n'est nilpotente, f admet une infinité de valeurs propres, alors que f est un endomorphisme en dimension finie.

Ex 56. On doit penser au fait que si $f \circ g = g \circ f$, alors g doit stabiliser les sous-espaces propres de f.

Ex 58. **2.** Utiliser x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, et que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. Décomposer $g(x_0)$ sur cette base.

3. Considérer T une matrice triangulaire représentant f, et l'endomorphisme $\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \to \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ M \mapsto TM - MT \end{array} \right.$ et faire un théorème du rang sur φ.

Ex 59. Commencer avec $a = b = 0$ (déjà fait, commutation et vecteur propre commun), puis $a \neq 0$ et $b = 0$ pour montrer que u est nilpotente et que v stabilise $\ker(u)$. Enfin, sinon, poser $w = au + bv$ et calculer $w \circ v - v \circ w$.

Ex 60. C'est quasiment l'exercice 15, en plus simple.

Ex 61. La difficulté dans cet exo est le type des objets.

Ex 64. On a intérêt à utiliser l'exercice 50.

Ex 65. **2.** Remarquer que M est diagonalisable, et regarder toutes les possibilités en termes de valeurs propres.

Ex 66. **2.** Remarquer que M doit être nilpotente.

Ex 70. On s'intéressera aux valeurs propres de f, et à l'irationnalité des solutions de $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

Ex 73. **1.** Utiliser l'interpolation de Lagrange.

2. Diagonaliser A et utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs propres de A.

Ex 74. On aura intérêt à utiliser la famille $(L_1, \dots, L_r)$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Ex 78. On utilisera le lemme des noyaux et on montrera que $\operatorname{Im}(P(u)) = \ker(Q(u))$.

Ex 79. **1.** Remarquer que P^n est alors annulateur de A.

2. Considérer le polynôme Q.

Ex 80. **1.** Exercice classique !

2.b. Remarquer que si λ est une valeur propre de M, la multiplicité de λ dans $P \circ Q$ est égale à la multiplicité de λ dans $Q(X) - \beta_i$.

Ex 81. Montrer que l'induit de f sur son image est diagonaliable sur $\mathbb{C}$.

Ex 82. **1.** On utilisera, pour le sens réciproque, un polynôme annulateur de u^2 scindé à racines simples, ne possédant pas 0 comme racine.

2. En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres non nulles de u^2, et $F = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u^2)$, on utilise que $E = F \oplus \ker(u^2) = F \oplus \ker(u)$. On démontre alors que u_F (l'induit de u sur F) est diagonalisable.

Ex 83. Cf. exercice 5, les méthodes sont les mêmes.

Ex 87. Deux possibilités : ou bien une récurrence (mais alors, il faut montrer que l'induit d'un semi-simple est semi-simple), ou bien considérer $F = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Ex 88. **1.** Le sens réciproque est le plus simple. Pour le sens direct, montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap E_{\lambda_i}(u))$.

Ex 89. **1.** Utiliser une représentation matricielle.

2. Remarquer que l'ensemble des polynômes annulateurs de u doivent annuler v et w.

Ex 91. **1.** Cotrigonaliser

Ex 94. **2.** Utiliser l'exercice 12 et la codiagonalisation.

Ex 95. **3.** On écrira l'équation $MX = \lambda X$, et majorer $|[MX]_i|$.

Ex 98. **2.** Montrer que A diagonalisable et nilpotente, en regardant les valeurs propres de M et, donc, celles de A.

Ex 99. **2.a.** Utiliser que G est fini.

2. Le premier point est évident, le deuxième se fait avec un polynôme annulateur.

3. Monter que f est d'image finie et est injective.