TD 06
Suites et séries de fonctions

1 Exercices classiques

Exercice 1. *Déterminations de CVS/CVU.* ●◐○ Déterminer la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes.

1. $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$ sur $]0, 1]$,
2. $g_n(x) = nx^n \ln(x)$ sur $]0, 1]$,
3. $h_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$,
4. $u_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1} e^{-nx} \cos(nx)$ sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ et $[a, +\infty[$ (où $a > 0$),
5. $v_n(x) = n^a x^n (1 - x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2. *Une série de fonctions classique.* ●◐○ On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = n^a x^n (1 - x)$. Discuter, selon les valeurs de a, de la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 3. *Comparaison série-intégrale : un cas général.* ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$continue, décroissante et intégrable. On pose $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(nx)$.

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}_+^\star$.

> **Correction.** Soit $x > 0$. Notons $\varphi : t \mapsto f(tx)$. Alors, par décroissance de f, φ est décroissante, donc, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,
> $$\int_n^{n+1} \varphi(t)dt \leqslant \varphi(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} \varphi(t)dt.$$
> Or, f est intégrable donc, par le changement de variables $u = tx$, φ est intégrable. Donc $\sum \int_n^{n+1} \varphi(t)dt$ converge, ce qui, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varphi(n)$ converge, donc g est définie.

2. On suppose que f n'est pas identiquement nulle. Donner un équivalent de $g(x)$ quand $x \to 0^+$.

> **Correction.** Continuons la comparaison série-intégrale. La question précédente nous assure que
> $$\int_n^{n+1} f(tx)dt \leqslant f(nx) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(tx)dt,$$
> d'où
> $$\int_1^{+\infty} f(tx)dt \leqslant g(x) - f(0) \leqslant \int_0^{+\infty} f(tx)dt$$
> d'où, par le changement de variables $u = tx$,
> $$\frac{1}{x}\int_x^{+\infty} f(u)du \leqslant g(x) - f(0) \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(u)du,$$
> ce qui, f n'étant pas identiquement nulle donc pas d'intégrale nulle, assure que $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)du$.

Remarque importante : cet exercice n'est pas un résultat à utiliser tel quel en cours. Ce qui est fondamental, c'est la méthode : pour déterminer des équivalents, ou bien on peut faire un équivalent de chaque terme de la série, et une double limite permet de conclure, ou bien on fait une comparaison série-intégrale.

Exercice 4. *Fonctions zêta et êta.* ●●○ On note

$$\zeta : \left| \begin{array}{c}]1, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right. \text{ et } \eta : \left| \begin{array}{c}]0, +\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que ζ et η sont bien définies et continues sur leurs domaines de définition respectifs.
2. Vérifier qu'elles sont bien de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur ces domaines.
3. Donner un équivalent de ζ en 1^+.

   Correction. Effectuons une comparaison série-intégrale. Soit $x > 1$.

4. Démontrer que pour $x > 1, \eta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 5. *Une série de fonctions.* ●◐○ On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

(cf. exercice 50 pour une série de fonctions voisine de celle-ci)

Exercice 6. *Fonction β de Nielsen.* ●●○ Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier la décroissance de f puis que pour tout $x > 0, f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Correction. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+x} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n t^{n+x-1} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n+x-1} dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_0^1 t^{x-1} \frac{1-(-t)^{N+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt\right| &\leqslant \int_0^1 \frac{t^{N+x}}{1+t} dt \\ &\leqslant \int_0^1 t^{N+x} dt = \frac{1}{N+x+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

ce qui assure que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+x} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

Remarque : on pouvait aussi partir de

$$\frac{t^{x-1}}{1+t} = t^{x-1} \sum_{n\geqslant 0} (-t)^n,$$

et tronquer la somme géométrique. Cela revient au même.

Exercice 7. *CVU sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes.* ●●○ Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales réelles convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 8. *Convergence de fonctions lipschitziennes*. ●●◐ Soit $k > 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes convergeant simplement vers f sur un segment $[0,1]$. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 9. *Mines-Ponts 23*. ●●○ On définit la suite de fonctions (p_n) par $p_0 : x \in [0,1] \mapsto 0$ et $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right)$

1. Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.

Correction. **A CORRIGER, J'AI PRIS** $p_0(x) = x$**.** On fixe x dans $[0,1]$, et on démontre ce résultat par récurrence sur n.
Initialisation. $p_0(x) = x$ et

$$p_1(x) = p_0(x) + \frac{1}{2}(x - p_0(x)^2) = x + \frac{1}{2}(x - x^2)$$

Comme $x \in [0,1]$, $x - x^2 \geqslant 0$ donc $p_0(x) \leqslant p_1(x)$. Ensuite, on a l'équivalence

$$\begin{aligned} p_1(x) \leqslant \sqrt{x} &\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}(x - x^2) \leqslant \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x - x^2) \leqslant \sqrt{x} - x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x) \leqslant \sqrt{x} - x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x} + x) \leqslant 1 \text{ on a supposé } x \neq 0 \text{ ou } 1 \text{ sinon tout est trivial} \end{aligned}$$

ce qui est clairement vrai car $x \in [0,1]$. D'où l'initialisation.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$. Alors

$$p_{n+2}(x) = p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_{n+1}(x))^2\right) \geqslant p_{n+1}(x),$$

car, par hypothèse, $p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$. Ensuite, on a les équivalences

$$\begin{aligned} p_{n+2}(x) \leqslant \sqrt{x} &\Leftrightarrow p_{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_{n+1}(x))^2\right) \leqslant \sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x - (p_{n+1}(x))^2\right) \leqslant \sqrt{x} - p_{n+1}(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + p_{n+1}(x)}{2} \leqslant 1, \end{aligned}$$

en ayant supposé $p_{n+1}(x) < \sqrt{x}$, sinon tout est évident. Mais $p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ donc le résultat est vrai, d'où l'hérédité et le résultat.

2. En déduire la convergence simple de la suite (p_n) et trouver sa limite.

Correction. Soit $x \in [0,1]$. La suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majoré par $\sqrt{x}$; elle converge donc vers $\ell(x) \in [0,1]$. Or, comme $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right)$,

$$\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2), \text{ donc } \ell(x)^2 = x, \text{ donc } \ell(x) = \sqrt{x},$$

car $\ell(x) \geqslant 0$. Donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \mapsto \sqrt{x}$.

3. Montrer que la suite converge uniformément sur $[0,1]$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) - \sqrt{x} &= p_n(x) - \sqrt{x} + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right) \\ &= p_n(x) - \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right), \end{aligned}$$

donc

$$|p_{n+1}(x)-\sqrt{x}| \leqslant \left(1-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+p_n(x))\right)|p_n(x)-\sqrt{x}|.$$

Mais $p_n(x) \geqslant 0$ (récurrence immédiate) donc $\left(1-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+p_n(x))\right) \leqslant \mathbb{1}-\frac{\sqrt{x}}{2}$ donc

$$|p_{n+1}(x)-\sqrt{x}| \leqslant \left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)|p_n(x)-\sqrt{x}|,$$

donc, par récurrence immédiate,

$$|p_n(x)-\sqrt{x}| \leqslant \left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n |p_0(x)-\sqrt{x}| = \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$

Il nous reste à démontrer que si $u_n : x \mapsto \sqrt{x}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dérive,

$$\begin{aligned} u_n'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n + \sqrt{x}\times\frac{-1}{4\sqrt{x}}n\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4}-\frac{n}{4}\right)\left(1-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

La dérivée de u_n s'annule en $x=\frac{4}{(n+1)^2}$. u_n' est positive avant, négative ensuite. Donc u_n (qui est positive) atteint son maximum en $\frac{4}{(n+1)^2}$: ce maximum vaut

$$\frac{2}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$|p_n(x)-\sqrt{x}| \leqslant \|u_n\|_\infty^{[0,1]},$$

indépendante de x et tendant vers 0 en $+\infty$. Ainsi, (p_n) converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 10. *Orthogonal de* $\mathbb{R}[X]$. ●○○ Soit $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$.

1. Démontrer que pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, $\int_0^1 f(t)P(t)dt = 0$.
2. En déduire que f est nulle.

Exercice 11. *Deux preuves du lemme de Riemann-Lebesgue*. ●●○ On veut établir le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\forall f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\ \int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On pourrait remplacer sin *par* cos *ou* $e^{i\lambda t}$.

1. Démontrer le résultat si f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou si f est en escalier.
2. Démontrer le résultat lorsque f est simplement continue, en utlisant un résultat de densité.

2 Suites de fonctions

Exercice 12. ●○○ Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, vers une fonction f.
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x$. Qu'en déduire ?

Exercice 13. *Une double limite « facile ».* ●○○ Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies de $[a;b]$ sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{R})$. Soit $(x_n)_n \in [a;b]^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Exercice 14. *Déterminations de CVS/CVU (2).* ●◐○ Déterminer s'il y a convergence simple et/ou uniforme des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$ sur $[0,1]$,
2. $g_n(x) = (1-x)^n \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ sur $[0,1]$,
3. $h_n(x) = nx^n \sin(\pi x)$ sur $[0,1]$,
4. $u_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$,
5. $v_n(x) = nxe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 15. ●●○ On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = x^n \sin(\pi x) \text{ et } g_n(x) = nx^n \sin(\pi x).$$

Étudier le mode de convergence des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16. ●●○ Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$par :

$$\forall t \geqslant 0, \quad f_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(t) = \sqrt{t + f_n(t)}$$

1. Déterminer la limite simple ℓ de la suite (f_n).
2. Préciser si la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
3. Montrer que pour tout $t > 0, |f_{n+1}(t) - \ell(t)| \leqslant \dfrac{|f_n(t) - \ell(t)|}{2f_{n+1}(t)}$.
4. Remarquer que $f_n - \ell$ est bornée pour $n \geqslant 1$ et en déduire que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Exercice 17. ●●○ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dérivée seconde bornée. Étudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $u_n(t) = n\left(f\left(t + \dfrac{1}{n}\right) - f(t)\right)$.

Exercice 18. *Une récurrence intégrale.* ●●○ Soit $\lambda \in [0,1]$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x u_n(\lambda t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Établir sa convergence simple. On note φ sa limite.
3. Montrer que φ est dérivable et exprimer φ' en fonction de φ.

Exercice 19. *Une convergence uniforme vers $x \mapsto e^{-x}$.* ●●◐ Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.

   Correction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour $n \geqslant x$, on a
   $$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-x}.$$
   D'où la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $x \mapsto e^{-x}$.

2. On pose $\delta_n(x) = e^{-x} - f_n(x)$. Montrer que $\|\delta_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{en}$ puis conclure.

   Correction. Déjà, pour $x > n$, $\delta_n(x) = e^{-x} \leqslant e^{-n} \leqslant \dfrac{1}{en}$, car $e^{n-1} \geqslant n$, donc $e^{1-n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   Ensuite, si $x \leqslant n$, on étudier la fonction δ_n. δ_n est dérivable sur $[0,n]$ et, pour tout x dans $[0,n]$,
   $$\delta_n'(x) = -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

On ne va pas chercher à déterminer le signe de δ_n'. Simplement, comme δ_n est nul en 0 et vaut e^{-n} en n, on va étudier la valeur de δ_n en un éventuel point d'annulation de δ_n'.
Si $\delta_n'(x_n) = 0$, alors

$$e^{-x_n} = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}.$$

On conclut donc que

$$\begin{aligned}\delta_n(x_n) &= e^{-x_n} - f_n(x_n)\\ &= e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right) \times \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}\\ &= e^{-x_n} \times \frac{x_n}{n}.\end{aligned}$$

Or, si on étudie la fonction $h : t \mapsto te^{-t}$, on voit facilement que $h' : t \mapsto e^{-t}(1-t)$, donc que h est croissante puis décroissante, maximale en 1, où elle vaut $\frac{1}{e}$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant te^{-t} \leqslant \frac{1}{e}$. Ceci assure que

$$0 \leqslant \delta_n(x_n) \leqslant \frac{1}{ne}.$$

Récapitulons :

- $\delta_n(0) = 0 \leqslant \frac{1}{ne}$,
- $\delta_n(n) = e^{-n} \leqslant \frac{1}{ne}$,
- si δ_n atteint un extremum sur $]0, n[$, alors c'est un point d'annulation de δ_n', notons-le x_n, et alors $delta_n(x_n) \leqslant \frac{1}{ne}$.

Ainsi, pour tout x dans $[0, n]$, $|\delta_n(x)| \leqslant \frac{1}{ne}$.
Et, donc, pou rtout $x \geqslant 0$, $|\delta_n(x)| \leqslant \frac{1}{ne}$, indépendante de x, ce qui assure que $\|\delta_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{ne}$, et qui assure la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $x \mapsto e^{-x}$.

3. Rappeler pourquoi il existe γ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Correction. C'est du cours de séries :) Je rappelle la méthode la plus rapide. On note $u_n = H_n - \ln(n)$. Alors

$$\begin{aligned}u_n - u_{n-1} &= H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1)\\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2},\end{aligned}$$

terme général d'une série convergente. Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n - u_{n-1}$ converge, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma \in \mathbb{R}$.

4. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx = -\gamma$.

Correction. Il y a deux étapes : d'une part, calculer, pour n donné, $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ln(x)dx$; d'autre part, estimer $\int_0^{+\infty} \delta_n(x)\ln(x)dx$. **Attention, la convergence uniforme ne permet pas de conclure directement, car on n'est pas sur un segment.**

1. Calcul de $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ln(x)dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f_n(x)\ln(x)dx &= \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx \\ &=_{u=x/n} n\int_0^1 (1-u)^n \ln(nu)du \\ &= n\int_0^1 (1-u)^n\ln(u)du + n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^n du.\end{aligned}$$

La seconde intégrale vaut directement $n\ln(n)\left[-\frac{(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}\ln(n)$. Pour la première, on intègre par parties, en dérivant ln et en intégrant $u \mapsto (1-u)^n$ en $u \mapsto \frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}$. On obtient, comme le crochet converge,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-u)^n\ln(u)du &= \left[\ln(u)\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{u}\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}du \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{u}\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}du \\ &= -\int_0^1 \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n (1-u)^k du \text{ par identité de Bernoulli} \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{n+1}H_{n+1}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\ln(x)dx = \frac{n}{n+1}(-H_n+\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma.$$

2. Majoration du reste. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $A > 1$ tel que $0 \leqslant \int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)dx \leqslant \varepsilon$. On a alors, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty} \delta_n(x)\ln(x)dx = \int_0^A \delta_n(x)\ln(x)dx + \int_A^{+\infty}\delta_n(x)\ln(x)dx.$$

Or, on sait que l'on a toujours $0 \leqslant \delta_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$, donc, quel que soit n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leqslant \int_A^{+\infty}\delta_n(x)\ln(x)dx \leqslant \varepsilon.$$

Enfin,

$$\left|\int_0^A \delta_n(x)\ln(x)dx\right| \leqslant \int_0^A \frac{1}{\mathrm{e}n}|\ln(x)|dx.$$

En choisissant $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{1}{n}\int_0^A \frac{1}{\mathrm{e}}|\ln(x)|dx \leqslant \varepsilon$, on a établi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \left|\int_0^{+\infty}\delta_n(x)\ln(x)dx\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui signifie que $\int_0^{+\infty}\delta_n(x)\ln(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Conclusion. On en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\ln(x)dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)\ln(x)dx + \int_0^{+\infty}\delta_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\gamma.$$

D'où le résultat !

Exercice 20. *Convergence uniforme vers l'exponentielle.* ●●◐ (prolongement de l'exo 19) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f avec $f_n \geqslant f$.
2. Démontrer que $\forall t \geqslant 0 \quad t - \frac{t^2}{2} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
3. Montrer que la convergence uniforme a lieu en fait sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 21. *Convergence uniforme et continuité uniforme.* ●●◐

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions uniformément continues telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I. Montrer que f est uniformément continue.
2. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers g sur I. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si φ est lipschitzienne sur I, alors $(\varphi \circ g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi \circ g$.
3. Montrer que le résultat précédent persiste si φ est uniformément continue.
4. **Application.** Montrer que $\frac{g_n}{1+g_n^2}$ converge uniformément vers $\frac{g}{1+g^2}$.

Exercice 22. *Convergence uniforme et convexité.* ●●◐ Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convexes définies sur $[a, b]$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a, b]$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Soit α, β dans $\mathbb{R}$ tels que $a < \alpha < \beta < b$. Montrer qu'il existe $K \geqslant 0$ (qui dépend donc de a, b, α, β mais pas de x, y ni de n) tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous x, y dans $[\alpha, \beta]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant K|x - y|$.
3. En déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$. Y a-t-il convergence uniforme sur $[a, b]$?

Exercice 23. *Une récurrence intégrale (2).* ●●◐ On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ sur $[0; 1]$ par

$$\forall x \in [0,1] \quad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n\left(t - t^2\right) \mathrm{d}t$$

1. Montrer $\quad \forall (x, n) \in [0; 1] \times \mathbb{N} \quad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
2. En déduire la convergence simple de $(u_n)_n$.
3. Montrer que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u non nulle solution de $u'(x) = u\left(x - x^2\right)$.

Exercice 24. *Théorèmes de Dini.* ●●◐

1. **Premier théorème de Dini.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante (i.e. pour tout x, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante) de fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ qui converge simplement vers f continue sur $[a, b]$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f.

   Correction. On pose pour tout n $g_n = f - f_n$. Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0. Montrons qu'elle tend uniformément vers 0. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors on dispose de $\varepsilon > 0$, d'une extraction φ, d'une suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que pour tout n, $g_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geqslant \varepsilon$. On peut, quitte à extraire encore, supposer que $x_{\varphi(n)}$ converge vers x. Alors, par décroissance on sait que pour tout $m \leqslant \varphi(n)$, $g_m(x_{\varphi(n)}) \geqslant g_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \geqslant \varepsilon$ soit, en faisant tendre n vers $+\infty$, $g_m(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout m, ceci contredisant la convergence simple de g_n vers 0.

2. **Une application.** On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X - {P_n}^2\right)$.

   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right)$.

   Correction. On calcule
   $$\left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right] = P_n - \sqrt{x} - \frac{1}{2}\left(P_n(x)^2 - x\right) = P_{n+1}(x) - \sqrt{x}$$

   (b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$.

Correction. Soit $x \in [0,1]$. On montre par récurrence que pour tout n, $\sqrt{x} \leqslant P_n(x) \leqslant 1$. L'initialisation est évidente.
On suppose que pour un certain n. $\sqrt{x} \leqslant P_n(x) \leqslant 1$. D'après la relation de récurrence,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \leqslant P_n(x)$$

car $x - P_n(x)^2 \leqslant 0$. De plus, on a $P_n(x) + \sqrt{x} \leqslant 2$ sur $[0,1]$ donc

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\left[1 - \left(\frac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2}\right)\ \right] \geqslant 0$$

On peut alors conclure par une récurrence puisque $\sqrt{x} \leqslant P_0(x) \leqslant 1$ pour tout entier $x \in [0,1]$.

Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x) \leqslant 1$.

Pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée donc convergente (et la limite est positive). Si l'on note $f(x)$ sa limite, on a par passage à la limite dans la relation de récurrence

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}\left(x - f(x)^2\right), \text{ d'où } f(x) = \sqrt{x}$$

Ainsi, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $x \longmapsto \sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

(c) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Correction. Découle directement du théorème de Dini.

3. **Une deuxième application (X 2016).** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues positives telle que $\sum u_n$ converge simplement. Montrer que $\sum u_n$ est continue si et seulement si la convergence est uniforme.

Correction. C'est une autre application du théorème de Dini. La suite (S_n) des sommes partielles est une suite croissante de fonctions continues. Si elle converge uniformément, la limite est continue, pas de problème. Si la limite est continue, on est ramenés au théorème de Dini !

4. **Deuxième théorème de Dini.** Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes qui converge simplement vers une fonction f continue sur un segment. Montrer que (f_n) converge uniformément.

Correction. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur un segment, elle y est uniformément continue, soit η d'uniforme continuité pour f, et $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision du segment de pas $< \delta$. Soit N un rang à partir duquel pour tout i, $|f_n(a_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon$. Soit x dans $[a,b]$. Alors si $n \geqslant N$, et i tel que $a_i \leqslant x \leqslant a_{i+1}$,

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |f_n(x) - f_n(a_i) + f_n(a_i) - f(a_i) + f(a_i) - f(x)| \\
&\leqslant |f_n(x) - f_n(a_i)| + |f_n(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\
&\leqslant f_n(x) - f_n(a_i) + \varepsilon + \varepsilon \text{ par croissance.} \\
&\leqslant f_n(a_{i+1}) - f_n(a_i) + 2\varepsilon \\
&\leqslant f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + f(a_{i+1}) - f(a_i) + f(a_i) - f_n(a_i) + 2\varepsilon \\
&\leqslant 5\varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme !

5. **Application du deuxième théorème de Dini.** On note $f_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Démontrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers exp sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 25. *La réciproque du 13.* ●●● Soient S un segment de $\mathbb{R}$, et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de S dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout x de S, toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de S tendant vers x, $(f_n(x_n))_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction f, que f est continue, et que la convergence est uniforme.

3 Approximation uniforme

Exercice 26. *Une contrainte d'intégrale nulle.* ●○○ Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_n$ de polynômes tels que $\displaystyle\int_a^b P_n(t)dt = 0$ et convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Exercice 27. ●○○

1. Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $x_0 \in [a,b]$, $\|f-g\|_\infty \leqslant |f(x_0)-g(x_0)| + (b-a)\|f'-g'\|_\infty$.
2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que la suite $(P_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f'.
3. Peut-on généraliser le résultat pour $f \in \mathscr{C}^k([a,b],\mathbb{C})$?

Exercice 28. *Approximation uniforme à valeurs fixées.* ●●○ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, $x_0,\dots,x_p$ des réels de $[0,1]$, deux à deux distincts. Démontrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes convergeant uniformément vers f et vérifiant, pour tout i dans $[\![0,p]\!]$, $P_n(x_i) = f(x_i)$.

Correction. Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$.
Notons $(L_0,\dots,L_p)$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux points $x_0,\dots,x_p$. Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$P_n = Q_n + \sum_{k=0}^{p}(f(x_k) - Q_n(x_k))L_k.$$

Alors, pour tout i dans $[\![0,p]\!]$,

$$P_n(x_i) = Q_n(x_i) + \sum_{k=0}^{p}(f(x_k) - Q_n(x_k))L_k(x_i) = Q_n(x_i) + f(x_i) - Q_n(x_i) = f(x_i).$$

Ensuite, on remarque que

$$\begin{aligned}\|P_n - f\|_\infty &= \left\|Q_n - f + \sum_{k=0}^{p}(f(x_k) - Q_n(x_k))L_k\right\|_\infty \\ &\leqslant \|Q_n - f\|_\infty + \left\|\sum_{k=0}^{p}(f(x_k) - Q_n(x_k))L_k\right\|_\infty \\ &\leqslant \|Q_n - f\| + \sum_{k=0}^{p}|f(x_k) - Q_n(x_k)|\,\|L_k\|_\infty .\end{aligned}$$

Par convergence uniforme de $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, $|f(x_k)-Q_n(x_k)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. De plus, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}|f(x_k)-Q_n(x_k)|\,\|L_k\|_\infty$ étant finie, et la quantité $\|L_k\|_\infty$ ne dépendant pas de n, on en déduit que

$$\|Q_n - f\| + \sum_{k=0}^{p}|f(x_k) - Q_n(x_k)|\,\|L_k\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc que $\|P_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 29. *Contrainte affine et degrés majorés.* ●●○ Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ ne rencontrant pas $[0,1]$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément vers le polynôme nul sur $[a,b]$ et vérifiant $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)dt = 1$ pour tout n. Démontrer que la suite $(\deg(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Exercice 30. *Mines-Ponts MP 2025.* ●●◐ Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales convergeant simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) \leqslant d$. Démontrer que f est polynomiale et que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 31. *Approximation de l'unité et théorème de Weierstrass.* ●●◐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, on pose :

$$P_n(x) = \left(1-x^2\right)^n \quad ; \quad a_n = \int_{[-1,1]} P_n \quad ; \quad Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_n}.$$

1. (a) Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{2}{n+1}$.

(b) Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, 1]$.

2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, nulle à l'extérieur de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que la restriction de f_n à $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ est une fonction polynomiale.

(b) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

3. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass sur le segment $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

4 Séries de fonctions

Exercice 32. *Une mise en jambes.* ●○○ Étudier le mode de convergence sur $\mathbb{R}_+$ de $\sum f_n$, où $f_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-nx}$.

Exercice 33. *Intégrale de Cauchy sur un cercle.* ●●○ Soit $(z, r) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $r \neq |z|$. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, exprimer $\dfrac{1}{z - re^{it}}$ sous la forme de la somme d'une série géométrique puis calculer $\mathrm{I}(r, z) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{z - re^{it}}$.

Exercice 34. ●●○ On note, lorsqu'elle est définie, $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S. Y a-t-il convergence simple ? uniforme ? normale ?

Correction. On note, pour $n \geqslant 1$, $u_n : x \mapsto (-1)^n \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

- si $x < 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ diverge grossièrement,
- si $x = 0$, $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge par le critère des séries alternées,
- si $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n(x)$ converge.

Ainsi le domaine de définition de S est $D = [0, +\infty[$. Il y a convergence simple sur D. Ensuite, si $R_n = \displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} u_k$, on a, pour tout $x \geqslant 0$,

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \leqslant \frac{1}{n},$$

indépendant de x et tendant vers 0 en $+\infty$, ce qui assure que $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc que $\sum u_n$ converge uniformément.
En revanche, il n'y a pas de convergence normale : pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$, terme général d'une série divergente.

2. Démontrer que S est continue sur son domaine de définition.

Correction. On sait que :

- $\sum u_n$ converge uniformément sur D,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est continue,

donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, S est continue.

3. Démontrer que S est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer S'.

> **Correction.** On sait que u_n est dérivable sur D et, pour tout x dans $]0,+\infty[$, $u_n'(x) = (-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-nx}$. Ensuite, si $0 < a < b$ et $x \in [a,b]$, on a, en notant R_n le reste de S,
>
> $$|R_n(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \leqslant \mathrm{e}^{-na},$$
>
> majorant indépendant de x. Ainsi, $\|R_n\|_\infty \leqslant \mathrm{e}^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où la convergence uniforme sur $[a,b]$. On a donc :
>
> - $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$,
> - u_n est dérivable sur $]0,+\infty[$,
> - $\sum u_n'$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.
>
> Ainsi, par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions, S est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$,
>
> $$S'(x) = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{-nx} = -\sum_{n\geqslant 1}(-\mathrm{e}^{-x})^n = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

4. Calculer S.

> **Correction.** On en déduit que l'on dispose de $C > 0$ tel que, pour tout $x > 0$, $S(x) = -\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + C$. Pour trouver C, deux méthodes :
>
> - ou bien on utilise le fait que S est continue en 0, donc $-\ln(2) + C = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$, donc $C = 0$.
> - ou bien on utilise un théorème de double limite pour dire que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et on en déduit que $C = 0$.
>
> L'avantage de la deuxième méthode est qu'elle permet de retrouver la valeur de la somme alternée de la série harmonique.

Exercice 35. *Une récurrence intégrale (3).* ●●○ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \quad \text{et,} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[0,a]$, où $a > 0$, puis justifier la continuité de sa somme S sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $S(x) = u_0(x) + \mathrm{e}^x\int_0^x \mathrm{e}^{-t}u_0(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 36. *Une étude au bord.* ●●○ On pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.

> **Correction.** Si $x \neq 0$, alors $\ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x^2}$, terme général d'une série convergente. Donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Donner un équivalent en $+\infty$ de f.

> **Correction.** Quand x est grand, on veut dire que $f(x)$ va ressembler à $\sum\frac{1}{n^2x^2} = \frac{\pi^2}{6x^2}$. Démontrons-le, en considérant $x^2f(x)$. On note $u_n(x) = x^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)$. Alors $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}$.
> De plus, on a, pour $x \neq 0$,
>
> $$|u_n(x)| \leqslant x^2\frac{1}{n^2x^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$
>
> quantité indépendante de x. Ainsi, $\|u_n\|_\infty^{\mathbb{R}^*} \leqslant \frac{1}{n^2}$, ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n$, donc la convergence uniforme.

Le théorème de la double limite assure donc que $\sum_{n\geqslant 1} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. D'où l'équivalent désiré.

3. Donner un équivalent en 0 de f.

Correction. Notons $v_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2x^2}\right)$. En 0, le terme en $\frac{1}{n^2x^2}$ est gros. On ne peut pas facilement déterminer un équivalent par double limite, essayons une comparaison série-intégrale. Soit $x \neq 0$. Soit $n \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2x^2}\right)$ est décroissante, donc

$$v_{n+1}(x) \leqslant \int_n^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{t^2x^2}\right) dt \leqslant v_n(x),$$

ce qui assure que

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2x^2}\right) dt \leqslant f(x) \leqslant v_1(x) + \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2x^2}\right) dt.$$

Or,

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2x^2}\right) dt =_{u=tx} \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) du.$$

Mais si $g : u \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)$, alors

- g est continue sur $]0,+\infty[$,
- $g(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$, intégrable en $+\infty$,
- $g(u) \underset{u\to 0}{\sim} -2\ln(u)$, intégrable en 0.

Ainsi,

$$\int_x^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) du \underset{x\to 0}{\sim} \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) du.$$

On note $a(u) = \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right)$, donc $a'(u) = \frac{-\frac{2}{u^3}}{1+\frac{1}{u^2}} = -\frac{2}{u^3+u}$, et $b(u) = u$, donc $b'(u) = 1$. Le crochet $[a(u)b(u)]_0^{+\infty}$ converge bien donc, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u^2}\right) du = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+u^2} du = \pi.$$

Ainsi,

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2x^2}\right) dt \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x}.$$

Or, $v_1(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -2\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{\pi}{x}\right)$, ce qui assure que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x}$.

Exercice 37. ●●○ On note, lorsqu'elle est définie, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2}\right)$.

1. Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et continue sur son ensemble de définition.

2. Déterminer des équivalents de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 38. *Fonction digamma.* ●●○ On pose, pour $x > -1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Montrer que S est définie, continue sur $\mathrm{I} =]-1,+\infty[$.

2. Calculer $S(x+1) - S(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$.
3. Déterminer un équivalent simple de $S(x)$ quand $x \to -1$.

Exercice 39. *Une série presque télescopique.* ●●○ On pose, pour $x \geqslant 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{th}(x+n) - \mathrm{th}(n))$.

1. Montrer que S est définie, continue, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $S(x+1) - S(x)$ pour $x \geqslant 0$.
3. Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 40. *Une fausse série télescopique (2).* ●●○ On pose, pour $x \geqslant 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{Arctan}(x+n) - \mathrm{Arctan}\, n)$.

1. Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.
3. Déterminer un équivalent simple de $S(x)$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 41. *Une série d'exponentielles.* ●●○ Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, puis la continuité de f sur ce domaine.
2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Exercice 42. *Série d'Euler* $\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$. ●●○ Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-nx}\right)$.

1. Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. On admet que pour tout $x \in \left[0, 1\right[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$. En déduire la valeur $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + e^{-u}\right) \mathrm{d}u$.
3. Déterminer le domaine de définition D de f, la continuité et la monotonie de f sur D.
4. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, et calculer cette limite.
5. Trouver un équivalent simple de f en 0.

Exercice 43. *Série de type Prym.* ●●○ Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence et la continuité de S sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. Étudier les variations de S, et préciser les limites de S en 0 et en $+\infty$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $xS(x) + S(x+1) = \mathrm{e}$.
4. Trouver un équivalent simple de S en 0 et un développement asymptotique à deux termes de S en $+\infty$.

Exercice 44. *Une série non dérivable en* 0. ●●○ On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(nx)}{n^2}$.

1. Montrer que f est bien définie, continue et impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On rappelle que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$, mais n'est pas dérivable en 0.

Exercice 45. *Convergence uniforme par transformation d'Abel.* ●●○ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ et $f_n : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$.

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.
2. Prouver que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 46. *Une variante de la fonction β de Nielsen.* ●●◐ *Cet exercice est à rapprocher de 6.* On pose, pour tout $x > 0$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que S est bien définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$ puis un équivalent simple de $S(x)$ pour $x \to +\infty$.
3. Déterminer une écriture intégrale de $S(x)$ pour $x > 0$.
4. En déduire le comportement de $S(x)$ lorsque $x \to 0$.

Exercice 47. *Une fonction continue, non dérivable en une infinité de points.* ●●◐ Pour x dans $\mathbb{R}$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $2f(x) - f(2x)$ et en déduire que f n'est pas dérivable en 0.
3. Montrer que f n'est dérivable en aucun point de la forme $\dfrac{k\pi}{2^m}$ avec $(k, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

Exercice 48. *La fonction de Takagi, ou blanc-manger.* ●●◐ On note, pour x réel, $\varphi(x) = d(x, \mathbb{Z})$, la distance de x à $\mathbb{Z}$: $\varphi(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x)$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n}$.

1. Démontrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On va montrer que f n'est dérivable en aucun réel. Soit x un réel. On note $k_n = \lfloor 2^n x \rfloor$, $u_n = \dfrac{k_n}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{k_n + 1}{2^n}$.
   (a) Démontrer que $f(u_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi(2^k u_n)$ et $f(v_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \varphi(2^k v_n)$.
   (b) Démontrer que, si $p_n = \dfrac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n}$, alors $|p_{n+1} - p_n| \geqslant 1$.
   (c) Démontrer que, pour toute fonction g dérivable en x, $\dfrac{g(u_n) - g(v_n)}{u_n - v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g'(x)$, et conclure que f n'est pas dérivable en x.

   Ainsi, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 49. *Une généralisation de l'exercice 2.* ●●● Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Soit, pour $x \in [0, 1]$ et $n \geqslant 0$, $f_n(x) = a_n x^n (1 - x)$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur [0, 1].
2. À quelle condition $\sum f_n$ converge-t-elle normalement sur [0,1] ?
3. À quelle condition $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 50. ●●● On pose, lorsqu'elle est définie, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$? convergence uniforme ?

Indications

Ex 1. **2.** Regarder $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.

3. Sur $\mathbb{R}_+$, regarder $x_n = \dfrac{\pi}{2n}$.

4. Sur $\mathbb{R}_+^*$, regarder $x_n = \dfrac{1}{n}$.

Ex 4. **2.** Regarder sur des $[a, +\infty[$. Pour η, montrer que $t \mapsto (\ln t)^k t^{-x}$ décroît pour $t \geqslant \mathrm{e}^{k/a}$.

3. On a intérêt à utiliser une comparaison série-intégrale.

4. Calculer $\eta(x) - \zeta(x)$.

Ex 5. **2.** Faire une comparaison série-intégrale.

Ex 6. **3.** En 0 : $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$ et $f(x+1) \to f(1)$. En $+\infty$: encadrer $2f(x)$ entre $f(x) + f(x+1)$ et $f(x-1) + f(x)$ grâce à la décroissance.

4. Écrire $\dfrac{1}{n+x} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+x-1}\,\mathrm{d}t$, sommer jusqu'à N (somme géométrique) et montrer que le reste intégral tend vers 0 .

Ex 7. Montrer qu'à partir d'un certain rang N, le polynôme $P_n - P_N$ est borné, donc constant.

Ex 8. On reviendra à la définition avec des ε, et on découpera l'intervalle $[0,1]$ en segments de taille $\dfrac{\varepsilon}{k}$.

Ex 9. **1.** Faire une récurrence, montrer que $\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left(1 - \dfrac{\sqrt{x} + p_n(x)}{2}\right)$.

3. On montrera que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant \sqrt{x} - p_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.

Ex 10. **2.** Utiliser le théorème de Weierstrass.

Ex 13. Montrer que $|f_n(x_n) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)|$.

Ex 15. On aura intérêt à regarder ou sur des intervalles du type $[0, a]$, ou du type $[a, 1]$.

Ex 16. **1.** Montrer que pour x fixé, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. Que dire de la régularité de la limite trouvée ?

Ex 17. Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 : $|u_n(t) - f'(t)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{2n}$.

Ex 18. **1.** Montrer par récurrence que (u_n) est définie et continue pour tout n.

3. La convergence est uniforme sur tout segment : passer à la limite sur l'intégrale puis dériver.

Ex 19. **2.** On cherchera à majorer $\delta_n(x_0)$ pour x_0 vérifiant $\delta_n'(x_0) = 0$.

4. Poser $x = nu$ dans $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln x\,\mathrm{d}x$, puis intégrer par parties $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u$ en prenant la primitive $\dfrac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}$, qui s'annule en 0 : H_{n+1} apparaît.

Ex 21. **1.** Couper les ε en 3.

3. Prendre η associé à ε par la continuité uniforme de φ, puis N tel que $\|g_n - g\|_\infty < \eta$.

Ex 22. **1.** Passer à la limite dans l'inégalité de convexité.

3. Pas de CVU a priori, penser à l'exemple le plus classique.

Ex 23. **2.** C'est une série télescopique.

Ex 24. **1.** On pourra raisonner par l'absurde et supposer que la suite (g_n) définie par $g_n = f - f_n$ ne tend pas uniformément vers 0.

Ex 25. Convergence simple : prendre des suites constantes. Continuité de f et convergence uniforme : raisonner par l'absurde.

Ex 26. Prendre (Q_n) qui converge uniformément vers f, puis corriger avec une constante.

Ex 27. **2.** Approcher f' par des polynômes et intégrer.

Ex 28. Approcher par une suite de polynômes puis corriger via l'interpolation de Lagrange.

Ex 29. Raisonner par l'absurde.

Ex 30. Faire de l'interpolation de Lagrange.

Ex 31. **1.b.** Remarquer que sur $[\alpha, 1]$, $Q_n \leqslant \dfrac{n+1}{2}\left(1-\alpha^2\right)^n$.

2.b. Remarquer que $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)\mathrm{d}t$.

Ex 32. Remarquer que $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\mathrm{e}n}$.

Ex 33. Distinguer $|z| > r$ et $|z| < r$: si $r < |z|$, factoriser par z, si $r > |z|$, factorisez par $-r\mathrm{e}^{it}$.

Ex 34. **1.** C"est une série alternée.

3. Se placer sur $[a, b]$.

Ex 35. **1.** Montrer par récurrence que $|u_n(x)| \leqslant M\dfrac{x^n}{n!}$ avec $M = \sup\limits_{[0,a]} |u_0|$

2. Exprimer $\sum u_{n+1}$ à l'aide d'intégrales.

Ex 36. **3.** Utiliser une comparaison série-intégrale.

Ex 37. **2.** En 0, faire une comparaison série-intégrale. En $+\infty$, une double limite devrait suffire.

Ex 39. **1.** On peut utiliser les accroissements finis.

Ex 44. **3.** On pourra calculer la limite, quand x tend vers 0, de $f'(x)$ et utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Ex 46. **3.** Utiliser que $\dfrac{1}{1+nx} = \displaystyle\int_0^1 t^{nx}\ \mathrm{d}t$ et tronquer la somme.

Ex 48. **2.a.** Utiliser que si $k \geqslant n$, $2^k u_n$ et $2^k v_n$ sont entiers.

2.b. Penser que si $k < n$, $[2^k u_n, 2^k v_n]$ ne contient aucun $k + \dfrac{1}{2}$ et remarquer que p_n est une somme de ± 1.

2.c. Écrire ce taux comme une moyenne pondérée des taux entre x et u_n et v_n et x.