N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

DM 6
à rendre le vendredi 13/11/2026

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : **la formule choisie**, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules.

1. **Formule 1** Problème CCINP, Parties 2 et 4. (2h)
2. **Formule 2** Problème CCINP en entier, en remplaçant la question 3 par : « Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour toute suite $u \in \ell^\infty$, $|\varphi(u)| \leqslant K \|u\|$. » (4h)
3. **Formule 3** Problème Centrale, parties 1 et 2. (2h)
4. **Formule 4** Problème Centrale en entier. (4h)

Rendu + tôt. Si vous avez fini le DM en avance, vous pouvez bien sûr me le rendre en avance !

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 1

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé d'un problème qui comprend quatre parties indépendantes.

Objectifs

L'objectif de la **partie I** est de montrer l'existence d'un développement ternaire propre pour certains nombres réels.
La **partie II** propose l'étude d'une série de fonctions où les coefficients du développement ternaire sont remplacés par une fonction continue.
La **partie III** étudie des développements ternaires aléatoires.
La **partie IV** définit et présente quelques propriétés de la fonction de Cantor-Lebesgue.

Notations

On note T l'ensemble des suites réelles $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{0; 1; 2\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n \in \{0; 1; 2\}.$$

On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornées et on pose $\| u \| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n|$.

On note $\lfloor y \rfloor$ la partie entière d'un réel y.

PARTIE I - Développement ternaire

Étude de l'application σ

Q1. Démontrer que ℓ^∞ est un espace vectoriel réel et que l'application $u \longmapsto \| u \|$ est une norme sur ℓ^∞.

Q2. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^\infty$, démontrer que la série de terme général $\frac{u_n}{3^n}$ est convergente.
On note alors :

$$\sigma(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}.$$

Q3. Démontrer que l'application σ est une forme linéaire continue sur ℓ^∞.

Q4. Démontrer que si $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in T$, alors le réel $\sigma(t)$ est dans l'intervalle $[0,1]$.

Q5. On note $\tau = (\tau_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\tau' = (\tau'_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les éléments de T définis par :

$$\tau_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 0 \qquad\qquad \tau'_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \tau_n = 2.$$

Calculer $\sigma(\tau)$ et $\sigma(\tau')$. L'application σ est-elle injective sur T ?

Développement ternaire propre

On fixe $x \in [0,1[$. On définit une suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n(x) = \lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1} x \rfloor .$$

Q6. Démontrer que $t(x) \in T$.

Q7. On définit deux suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad x_n = \frac{\lfloor 3^n x \rfloor}{3^n} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{3^n}.$$

Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes de limite x. En déduire que :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t_n(x)}{3^n}.$$

Que peut-on en conclure concernant l'application $\begin{cases} T \longrightarrow [0,1] \\ u \longmapsto \sigma(u) \end{cases}$?

La suite $t(x) = (t_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée *développement ternaire propre* de x.

Q8. *Informatique pour tous.* Écrire en langage Python une fonction `flotVersTern(n,x)` d'arguments un entier naturel `n` et un flottant `x` et qui renvoie sous forme d'une liste les n premiers chiffres $t_1(x), \ldots, t_n(x)$ définis dans la question précédente du développement ternaire de x.
Par exemple `flotVersTern(4,0.5)` renvoie `[1,1,1,1]`.

Q9. *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on la complète avec des 0 pour en faire un élément de T encore noté ℓ.
Écrire en langage Python une fonction `ternVersFlot(`ℓ`)` d'arguments une liste d'entiers ℓ. Cette fonction renvoie en sortie le flottant $\sigma(\ell)$.
Par exemple `ternVersFlot([1,1,1,1])` renvoie `0.493827.....`

Q10. *Informatique pour tous.* Si $\ell = [\ell_1, \ldots, \ell_n]$ est une suite finie d'entiers de $\{0; 1; 2\}$, on lui ajoute un élément égal à -1 si la somme $\ell_1 + \cdots + \ell_n$ est paire et un élément égal à -2 sinon. Ce dernier élément permet alors d'essayer de détecter d'éventuelles erreurs de transmission.
Écrire en langage Python une fonction `ajout(`ℓ`)` qui ajoute à la liste ℓ un élément comme expliqué précédemment et qui renvoie la nouvelle liste.
Écrire en langage Python une fonction `verif(`ℓ`)` qui renvoie `True` si la valeur du dernier élément de ℓ est correcte et `False` sinon.
Par exemple `ajout([1,0,2,1,0])` renvoie `[1,0,2,1,0,-1]` et `verif([1,0,2,1,0,-2])` renvoie `False`.

PARTIE II - Étude d'une fonction définie par une série

Dans cette partie, on définit une fonction φ à l'aide d'un développement en série analogue au développement ternaire propre d'un réel, mais où la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est remplacée par une fonction numérique à valeurs dans l'intervalle $[0,2]$.

Pour tout réel x on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}.$$

Étude de l'application φ

Q11. Démontrer que φ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Q12. Pour tout x réel, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{3^n}\right)$$

et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Q13. Pour $x \in \mathbb{R}$, en déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}$ en fonction de $\cos(x)$.

Q14. À l'aide de $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi\,(x)\,\mathrm{d}x$ démontrer que :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n+1}}\left((-1)^{n-1} + 1\right)$$

puis en calculant la somme de la série du second membre, en déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Q15. Retrouver cette valeur par un calcul direct.

PARTIE III - Développements ternaires aléatoires

Dans cette partie, $(T_{n,N})_{n\geq 1, N\geq 2}$ est une suite de variables aléatoires discrètes réelles, mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

$$\forall n \geq 1, \forall N \geq 2, T_{n,N}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}(T_{n,N} = 0) = \mathbb{P}(T_{n,N} = 1) = \frac{1}{N} \text{ et } \mathbb{P}(T_{n,N} = 2) = 1 - \frac{2}{N}.$$

Soit $N \geq 2$ fixé. On pose :

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n,N}}{3^n}.$$

On admet que X_N est une variable aléatoire discrète réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Q16. Démontrer que X_N admet une espérance et une variance. Donner leur valeur en fonction de N.

Q17. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \varepsilon) = 0$$

Q18. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer que :

$$\mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X_N - \mathbb{E}(X_N)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_N) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}(|X_N - 1| \geq \varepsilon) = 0\,.$$

PARTIE IV - Fonction de Cantor-Lebesgue

Dans cette partie, on va définir et étudier la fonction de Cantor-Lebesgue.

Étude d'une suite de fonctions

On note f_0 la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_0(x) = x$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right] \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right[\\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{f_n(3x-2)}{2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases}.$$

Q19. Représenter l'allure graphique des fonctions f_0, f_1 et f_2 sur trois schémas différents (pour f_2 on envisagera sept sous-intervalles de $[0,1]$).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer que f_n est à valeurs dans $[0,1]$.

Q20. *Informatique.* Écrire en langage Python une fonction récursive `cantor(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$.

Q21. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, démontrer que :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\,.$$

Q22. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

La limite de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est notée f.
On l'appelle *fonction de Cantor-Lebesgue*.

Q23. Démontrer que la fonction f est à valeurs dans $[0,1]$ et qu'elle est croissante et continue sur $[0,1]$. Démontrer aussi qu'elle est surjective de $[0,1]$ vers $[0,1]$.

La fonction f est aussi nommée « escalier du diable ». Les développements ternaires étudiés en début de problème permettent d'obtenir une expression analytique de $f(x)$.

FIN

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

MP

4 heures

Calculatrice autorisée

2022

Objectifs

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$ de deux façons différentes : un point de vue déterministe et un point de vue probabiliste. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2, les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', ..., f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini. Cette dernière hypothèse sera de nouveau affaiblie dans la partie probabiliste consacrée à la dérivation de séries aléatoires de fonctions.

Le sujet est divisé en quatre parties :

— la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$;

— la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions ;

— la partie III, qui est indépendante des parties I et II, étudie la convergence des séries aléatoires numériques de la forme $\sum X_n a_n$, où (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de Rademacher et (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— la partie IV utilise les résultats des parties précédentes pour donner une application au caractère $\mathcal{C}^K$ de la somme d'une série aléatoire de fonctions de la forme $\sum X_n f_n$.

Notations

— Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.

— La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.

— Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.

— Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$).

— Dans le cas particulier $I = [0, 1]$, pour toute fonction bornée $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

I Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0, 1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, ..., x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \qquad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| . \tag{I.1}$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre K.

I.A – Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0, 1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \qquad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C\,|f(x_1)| . \tag{I.2}$$

Q 1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.

Q 2. Soit $C \in]0, 1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

I.B – Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0, 1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \qquad \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leqslant \|f''\|_\infty + C(|f(x_1)| + |f(x_2)|). \tag{I.3}$$

BY-NC-SA

Q 3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty .$$

Q 4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a $\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \dfrac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q 5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C – Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^\star$.

Q 6. Démontrer que l'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & \big(P(x_1), ..., P(x_K)\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 7. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, ..., L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum_{j=1}^{K} f(x_j) L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \qquad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

Dans les deux questions suivantes Q8 et Q9, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question Q7.

Q 8. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Q 9. En déduire l'inégalité $\left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q 10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions

II.A – Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^\star$, on considère

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) ;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;

(H2) pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q 11. Dans le cas particulier $[a,b] = [0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.

Q 12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a,b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q 13. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in [\![1, K]\!]$.

II.B – Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = 0$, $f_n(2) = 0$ et $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$ pour tout $x > 0$.

Q 15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Q 16. Expliciter $F''(x)$.

Q 17. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$.

BY-NC-SA

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

Le but de cette partie est de montrer que, si la série $\sum a_n^2$ converge, alors la série aléatoire $\sum X_n a_n$ converge avec probabilité 1.

Notations

— $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2};$$

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N = \sum_{n=0}^{N} X_n a_n$ la somme partielle au rang N de la série $\sum X_n a_n$;

— si $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, on note les évènements

$$A_j = \Big\{\big|S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}\big| > 2^{-j}\Big\},$$
$$B_j = \Big\{\max_{\phi(j)+1\leqslant n\leqslant\phi(j+1)} \big|S_n - S_{\phi(j)}\big| > 2^{-j}\Big\},$$
$$B_{j,m} = \Big\{\big|S_m - S_{\phi(j)}\big| > 2^{-j} \text{ et } \forall n \in [\![\phi(j), m-1]\!], \quad \big|S_n - S_{\phi(j)}\big| \leqslant 2^{-j}\Big\}.$$

La réalisation de l'évènement $B_{j,m}$ signifie que m est le plus petit entier de l'intervalle $[\![\phi(j), \phi(j+1)]\!]$ vérifiant $\big|S_n - S_{\phi(j)}\big| > 2^{-j}$.

III.A – Construction de la suite $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ et majoration de $\mathbb{P}(A_j)$

Q 18. Justifier l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers naturels $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall j \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n>\phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leqslant \frac{1}{8^j}.$$

On fixe désormais une telle suite $\big(\phi(j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$.

Q 19. Exprimer l'espérance et la variance de $S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}$ en fonction des termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q 20. Déduire des deux questions précédentes la majoration $\mathbb{P}(A_j) \leqslant 2^{-j}$.

III.B – Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(B_j) \leqslant 2\mathbb{P}(A_j)$

Q 21. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, démontrer que les évènements $B_{j,m}$, pour m parcourant $[\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, sont disjoints deux à deux et qu'on a l'égalité d'évènements

$$B_j = \bigcup_{\phi(j)<m\leqslant\phi(j+1)} B_{j,m}.$$

Q 22. Expliquer comment en déduire la formule $\mathbb{P}(A_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$.

Q 23. Soit $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$, montrer que la fonction

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto & 2^{\phi(j+1)-\phi(j)}\,\mathbb{P}\left(\Big\{\big|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\big| > 2^{-j}\Big\} \cap B_{j,m}\right) \end{array}\right.$$

est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est paire.

Q 24. Prouver que si l'évènement B_j se réalise, alors il existe $m \in [\![\phi(j)+1, \phi(j+1)]\!]$ et $\alpha \in \{-1, +1\}$ tels que l'évènement

$$\Big\{\big|\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}\big| > 2^{-j}\Big\} \cap B_{j,m}$$

se réalise également.

On pourra exprimer $S_m - S_{\phi(j)}$ en fonction des deux nombres $\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}$ avec $\alpha = \pm 1$.

Q 25. En déduire que

$$\mathbb{P}(B_j) \leqslant 2\mathbb{P}(A_j)$$

BY-NC-SA

III.C – Convergence de la série aléatoire $\sum X_n a_n$

Q 26. On note B l'évènement $\bigcap_{J\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geqslant J} B_j$. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(B)=0$.

Q 27. Montrer que l'évènement

$$\{\exists J\in\mathbb{N},\quad \forall j\geqslant J,\quad \forall n\in[\![\phi(j)+1,\phi(j+1)]\!],\quad \left|S_n-S_{\phi(j)}\right|\leqslant 2^{-j}\}$$

se réalise avec probabilité 1.

Q 28. En déduire que l'évènement

$$\{\text{la suite } \left(S_{\phi(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

a également une probabilité 1.

On pourra examiner la série $\sum\left|S_{\phi(j+1)}-S_{\phi(j)}\right|$.

Q 29. Conclure que l'évènement

$$\{\text{la série } \sum X_n a_n \text{ est convergente}\}$$

a une probabilité 1.

IV Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour des séries aléatoires de fonctions

On fixe $K\in\mathbb{N}^\star$ et on considère

— une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de la partie précédente ;

— des réels distincts $x_1<\cdots<x_K$ de $[0,1]$;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0,1]$;

(H2') pour tout $\ell\in[\![1,K]\!]$, la série numérique $\sum f_n(x_\ell)^2$ est convergente.

Q 30. Montrer que l'une des deux hypothèses (H2') ou (H2) (étudiée dans la partie II) implique l'autre.

Q 31. Montrer que l'évènement

$$\{\text{pour tout } \ell\in[\![1,K]\!],\ \text{la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\}$$

a une probabilité 1.

Q 32. On note $P_n\in\mathbb{R}_{K-1}[X]$ un polynôme vérifiant $P_n(x_\ell)=f_n(x_\ell)$ pour tout $\ell\in[\![1,K]\!]$ (cf. question 7), montrer que l'évènement

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } k\in[\![0,K]\!],\ \text{la série de fonctions } \sum X_n(f_n-P_n)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1],\\ \text{la fonction } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n(f_n-P_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^K,\\ \text{pour tout } k\in[\![0,K]\!],\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n(f_n-P_n)\right)^{(k)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n(f_n-P_n)^{(k)}\end{array}\right\}$$

a une probabilité 1.

Q 33. Montrer que l'évènement

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } k\in[\![0,K]\!],\ \text{la série de fonctions } \sum X_n f_n^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1],\\ \text{la fonction } \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^K,\\ \text{pour tout } k\in[\![0,K]\!],\ \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n\right)^{(k)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n^{(k)}\end{array}\right\}$$

a une probabilité 1.

Q 34. Donner un exemple d'entier $K\in\mathbb{N}^\star$ pour lequel l'évènement précédent se réalise avec les fonctions f_n définies par

$$\left\{\begin{array}{l}f_0=0,\\ f_n(x)=\ln\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right)\end{array}\right.\quad \forall n\in\mathbb{N}^\star,\forall x\in[0,1].$$

• • • FIN • • •

BY-NC-SA