

TD 01

Procédés sommatoires

1 Exercices classiques

Exercice 1. *L'asymptotique de la série harmonique.* ●●○ On considère $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer qu'il existe $\gamma \geq 0$ tel que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Correction. On note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = H_n - \ln(n)$. Soit $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= H_n - \ln(n) - H_{n-1} + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Donc, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n - u_{n-1}$ converge, donc, comme il s'agit d'une série télescopique, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel γ .

L'équivalent ne nous permet en revanche pas de déterminer le signe de γ . Pour cela, on recourt à une comparaison série-intégrale. On sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t},$$

par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$. Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$, en sommant de 1 à n ,

$$H_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \geq \ln(n).$$

Ainsi, $H_n - \ln(n) \geq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, ce qui assure que $\gamma \geq 0$.

2. Déterminer un équivalent de $H_n - \ln(n) - \gamma$.

Correction. Si on note, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - u_{n-1}$, alors, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n v_k = u_n - u_0$, ce qui assure

que $\gamma = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$. Ainsi,

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) - \gamma &= u_n - \gamma \\ &= - \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - u_{k-1}. \end{aligned}$$

Or, $u_k - u_{k-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}$. Par sommation des relations de comparaison dans le cas convergent,

$$H_n - \ln(n) - \gamma \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2}.$$

Mais, par l'exercice 2, on sait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$. Ainsi, $H_n - \ln(n) - \gamma \sim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n}$, d'où

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 2. *Équivalents des sommes partielles ou des restes des séries de Riemann.* ●●○

1. Soit $a < 1$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$.

Correction. Faisons une comparaison série-intégrale. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, si $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^a}$$

Ainsi, si $n \geq 2$, en sommant pour k allant de 2 à n , on obtient

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^a} \leq S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t^a},$$

d'où

$$\left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_2^{n+1} \leq S_n - 1 \leq \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_1^n,$$

soit

$$\frac{(n+1)^{1-a}}{1-a} - \frac{2^{1-a}}{1-a} + 1 \leq S_n \leq \frac{n^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a}.$$

Or, $\frac{(n+1)^{1-a}}{1-a} - \frac{2^{1-a}}{1-a} + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}$ et $\frac{n^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}$ donc, par encadrement,

$$S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}.$$

2. Soit $a > 1$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

Correction. On fait encore une comparaison série-intégrale. Par le même calcul que précédemment, si $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^a} \leq \frac{1}{k^a} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^a}.$$

Soit $n \geq 1$ et $N \geq n$. En sommant de $n+1$ à N , on obtient

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^a} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^a} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^a},$$

d'où

$$\left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^a} \leq \left[\frac{t^{-a+1}}{-a+1} \right]_n^N.$$

Mais, ici, $1-a < 0$! On a alors

$$\frac{(n+1)^{-a+1}}{a-1} - \frac{(N+1)^{-a+1}}{a-1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^a} \leq \frac{n^{-a+1}}{a-1} - \frac{N^{-a+1}}{a-1}.$$

On en déduit, en faisant tendre N vers $+\infty$, que

$$\frac{1}{(a-1)n^{a-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(a-1)n^a},$$

d'où, comme $\frac{1}{(a-1)n^{a-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}, R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}.$

Exercice 3. *Quelques séries alternées.* ●●○ On étudie la nature des séries suivantes selon le paramètre $\alpha > 0$.

1. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right).$
2. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$

Exercice 4. *Une série alternée ?.* ●●○ L'objectif est d'étudier des séries dont le terme général est de la forme $\sin(\pi \sqrt{n^2 + \alpha n + \beta})$, via un développement asymptotique de $\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta}$.

1. Établir le développement asymptotique $\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + O(1/n^5)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}).$
3. Établir le développement asymptotique $\sqrt{n^2 + n + 1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O(1/n^2)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}).$

Correction.

1. On écrit $\sqrt{n^2 + 1} = n\sqrt{1 + 1/n^2}$ et on développe $(1 + u)^{1/2} = 1 + u/2 - u^2/8 + O(u^3)$ avec $u = 1/n^2$:

$$\sqrt{n^2 + 1} = n \left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + O(n^{-6}) \right) = n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + O(n^{-5}).$$

2. On a $\pi \sqrt{n^2 + 1} = \pi n + \frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})$, d'où :

$$\begin{aligned} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) &= \sin(\pi n) \cos\left(\frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})\right) + \cos(\pi n) \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})\right) \\ &= 0 + (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n \pi}{2n}. \end{aligned}$$

La suite $c_n = \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O(n^{-3})\right)$ est positive, décroissante et tend vers 0 pour n assez grand, donc $\sum (-1)^n c_n$ converge par le critère des séries alternées. La série diverge absolument car $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi/(2n)$ et $\sum 1/n$ diverge. C'est une **série semi-convergente**.

3. Posons $\varepsilon_n = 1/n + 1/n^2$. Alors $(1 + \varepsilon_n)^{1/2} = 1 + \varepsilon_n/2 - \varepsilon_n^2/8 + O(\varepsilon_n^3)$, soit :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} = n \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^2} + O(n^{-3}) \right) = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O(n^{-2}).$$

4. On a $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = \pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O(n^{-2})$, d'où :

$$\begin{aligned} \sin(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}) &= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + O(n^{-2})\right) \\ &= \cos(\pi n) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{8n} + O(n^{-2})\right) = (-1)^n (1 + O(n^{-2})). \end{aligned}$$

(On a utilisé $\sin(\pi n + \pi/2 + \theta) = \cos(\pi n) \cos \theta - \sin(\pi n) \sin \theta = (-1)^n \cos \theta$.)

Le terme général ne tend pas vers 0 (il oscille entre des valeurs proches de ± 1), donc la série **diverge grossièrement**.

Exercice 5. *Une série complexe.* ●●○ Soit $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Montrer que pour tout entier n , $1 + j^n + j^{2n} = 3 \mathbf{1}_{3|n}$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2})$.

3. Calculer $e^j + e^{j^2}$ en termes de fonctions réelles, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.
4. Calculer de même $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$, et vérifier que les trois sommes s'additionnent bien en e .

Correction.

1. Si $3 \mid n$, alors $j^n = 1$ et $1 + j^n + j^{2n} = 3$. Sinon, j^n est une racine cubique primitive de l'unité ($(j^n)^3 = 1$ et $j^n \neq 1$), donc $1 + j^n + (j^n)^2 = \frac{1 - (j^n)^3}{1 - j^n} = 0$.
2. La série exponentielle donne $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$ pour tout $x \in \mathbb{C}$, d'où :

$$e + e^j + e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!} = \sum_{n \geq 0, 3 \mid n} \frac{3}{n!} = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3k)!}.$$

L'interversion est licite par convergence absolue des séries exponentielles.

3. $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\operatorname{Re}(j) = -1/2$ et $\operatorname{Im}(j) = \sqrt{3}/2$. Ainsi :

$$e^j = e^{-1/2 + i\sqrt{3}/2} = e^{-1/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad e^{j^2} = e^{-1/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Donc $e^j + e^{j^2} = 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}.$$

4. Pour extraire les termes d'indices $\equiv r \pmod{3}$, on multiplie par j^{-r} avant de sommer :

$$e + j^{-r} e^j + j^{-2r} e^{j^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 + j^{n-r} + j^{2(n-r)}}{n!} = 3 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3k+r)!}.$$

Pour $r = 1$ (en utilisant $j^{-1} = j^2 = e^{-2i\pi/3}$) :

$$j^{-1} e^j + j^{-2} e^{j^2} = 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right), \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} = \frac{e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)}{3}.$$

Pour $r = 2$ (en utilisant $j^{-2} = j = e^{2i\pi/3}$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} = \frac{e + 2e^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)}{3}.$$

Vérification : $\cos \theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$ pour tout θ (parties réelles de $e^{i\theta}(1 + j + j^2) = 0$), donc la somme des trois expressions vaut bien e .

Exercice 6. Règle de Raabe-Duhamel. ●●○ Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c/n^\alpha$.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.

3. Pour $a > 0$, on pose $u_n = \frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}$. Calculer u_{n+1}/u_n et déterminer la nature de $\sum u_n$.
4. On pose $v_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$. Calculer v_{n+1}/v_n et déterminer la nature de $\sum v_n$.

Correction.

1. On pose $w_n = n^\alpha u_n$. Alors :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{\alpha}{n} + O(n^{-2})\right) \left(1 - \frac{\alpha}{n} + O(n^{-2})\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum 1/n^2$ converge, le produit $\prod_{k=1}^n \frac{w_{k+1}}{w_k} = \frac{w_n}{w_1}$ converge vers une limite finie non nulle (la série $\sum \ln(1 + O(1/k^2))$ converge absolument). Donc $w_n \rightarrow c > 0$, i.e. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c/n^\alpha$.

2. Il vient aussitôt : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c/n^\alpha$ avec $c > 0$, donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum 1/n^\alpha$. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! / a(a+1)\cdots(a+n+1)}{n! / a(a+1)\cdots(a+n)} = \frac{n+1}{a+n+1}.$$

Pour n grand :

$$\frac{n+1}{n+a+1} = \frac{1+1/n}{1+(a+1)/n} = 1 - \frac{a}{n} + O(n^{-2}).$$

Par la règle avec $\alpha = a$:

- si $a > 1$: $\sum u_n$ **converge** ;
- si $0 < a < 1$: $\sum u_n$ **diverge** ;
- si $a = 1$: $u_n = n!/(1 \cdot 2 \cdots (n+1)) = 1/(n+1)$ et $\sum u_n$ diverge.

4.
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n+1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n+2} = 1 - \frac{1}{2n} + O(n^{-2}).$$

Par la règle avec $\alpha = 1/2 < 1$: $\sum v_n$ **diverge**.

Exercice 7. Transformation d'Abel et applications. ●●○ Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ des suites réelles. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ (avec $A_0 = 0$).

1. Démontrer la **formule de sommation d'Abel** :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

2. En déduire le **critère de Dirichlet** : si (A_n) est bornée et si (b_n) est décroissante et tend vers 0, alors $\sum a_k b_k$ converge.

3. Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \sin(k\theta)\right)_{n \geq 1}$ est bornée, puis en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge.

4. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge.

Correction.

1. On écrit $a_k = A_k - A_{k-1}$ et on effectue une sommation par parties :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} - A_0 b_1 \\ &= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k). \end{aligned}$$

2. Soit M tel que $|A_n| \leq M$ pour tout n . La formule d'Abel donne $S_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$.

- $A_n b_n \rightarrow 0$ car $|A_n b_n| \leq M b_n \rightarrow 0$.
- La série $\sum A_k (b_{k+1} - b_k)$ converge absolument : comme (b_n) est décroissante,

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k (b_{k+1} - b_k)| \leq M \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \leq M b_1 < +\infty.$$

Donc S_n converge.

3. Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{i\theta} \neq 1$, donc :

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} = e^{i\theta} \frac{1 - e^{in\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

$$\text{et } \left| \sum_{k=1}^n \sin(k\theta) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}.$$

Les sommes partielles de $\sum \sin(k\theta)$ sont donc bornées, et $(1/n)$ est décroissante de limite 0. Par le critère de Dirichlet, $\sum \sin(n\theta)/n$ converge.

4. Si $\sum a_n$ converge, les sommes partielles A_n sont convergentes, donc bornées. La suite $(1/\sqrt{n})$ est décroissante et tend vers 0. Par le critère de Dirichlet, $\sum a_n/\sqrt{n}$ converge.

Exercice 8. Étude de suites récurrentes. ●●○

- Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.
 - Montrer que (u_n) est décroissante, positive, et converge vers 0.
 - En développant $\sin(u_n)$ à l'ordre 3, montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.
 - En déduire la nature de $\sum u_n$ et de $\sum u_n^3$.
- Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_0 \in]0, 1[$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$.
 - Montrer que (v_n) converge vers 0.
 - En développant $\ln(1 + v_n)$ à l'ordre 2, montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
 - En déduire la nature de $\sum v_n$.

Correction.

- (a) $u_0 \in (0, \pi/2)$ entraîne $u_1 = \sin(u_0) \in (0, 1) \subset (0, \pi/2)$. Par récurrence, la suite reste dans $(0, \pi/2)$, et $u_{n+1} = \sin(u_n) < u_n$ (car $\sin x < x$ pour $x > 0$). Donc (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle

converge vers $\ell \geq 0$ vérifiant $\ell = \sin \ell$, d'où $\ell = 0$.

(b) Le DL $\sin x = x - x^3/6 + O(x^5)$ donne :

$$u_{n+1}^2 = \sin^2(u_n) = u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + O(u_n^4) \right)^2 = u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + O(u_n^4) \right),$$

$$\text{d'où } \frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + \frac{1}{3} + O(u_n^2).$$

Comme $u_n \rightarrow 0$, on a $O(u_n^2) \rightarrow 0$, donc $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \rightarrow \frac{1}{3}$. Par le lemme de Cesàro : $\frac{1/u_n^2}{n} \rightarrow \frac{1}{3}$, soit

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

(c) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{3/n}$, donc $\sum u_n$ **diverge** (comparaison à $\sum 1/\sqrt{n}$, série de Riemann d'exposant $1/2 \leq 1$).

Pour $\sum u_n^3$: $u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\sqrt{3/n})^3 = 3\sqrt{3}/n^{3/2}$, et $3/2 > 1$, donc $\sum u_n^3$ **converge**.

2. (a) $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$, donc $v_{n+1} < v_n$; la suite est décroissante et positive, elle converge vers $\ell \geq 0$ avec $\ell = \ln(1+\ell)$, d'où $\ell = 0$.

(b) Le DL $\ln(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ donne :

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{v_n - v_n^2/2 + O(v_n^3)} = \frac{1}{v_n} \cdot \frac{1}{1 - v_n/2 + O(v_n^2)} = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{2} + O(v_n).$$

Donc $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{1}{2}$. Par le lemme de Cesàro : $\frac{1/v_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$, soit $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

(c) $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2/n$ et $\sum 1/n$ diverge, donc $\sum v_n$ **diverge**.

Exercice 9. *Un peu de familles sommables.* ●●○ Pour $x \in [0, 1)$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in [0, 1)$.

2. En développant $\frac{x^n}{1-x^n}$ en série géométrique, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n,$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n . On justifiera soigneusement l'intervention des sommes.

3. Vérifier le résultat pour $n = 1, 2, 3, 4$: calculer $d(n)$ et retrouver le coefficient de x^n à partir de la série $\sum x^n/(1-x^n)$.

4. Montrer de même que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n) x^n$, où $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ est la somme des diviseurs de n .

Correction.

1. Pour $x \in [0, 1)$, on a $x^n/(1-x^n) \leq x^n/(1-x)$. Donc $\sum x^n/(1-x^n) \leq \frac{1}{1-x} \sum x^n = \frac{x}{(1-x)^2} < +\infty$.

2. Pour $x \in [0, 1)$ et $n \geq 1$, on développe en série géométrique :

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} x^{kn}.$$

La famille $(a_{n,k})_{n,k \geq 1} = (x^{kn})_{n,k \geq 1}$ est une famille de termes positifs. Sa somme totale vaut :

$$\sum_{n,k \geq 1} x^{kn} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} < +\infty.$$

La famille est donc sommable ; on peut intervertir les sommations et regrouper par valeur de $m = kn$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n,k \geq 1} x^{kn} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{k,n \geq 1 \\ kn=m}} 1 \right) x^m = \sum_{m=1}^{+\infty} d(m) x^m,$$

car le nombre de couples (k, n) avec $k, n \geq 1$ et $kn = m$ est exactement le nombre de diviseurs de m .

3. On vérifie :

- $m = 1$: $d(1) = 1$ (diviseurs : 1). Dans $\sum x^n/(1-x^n)$, seul $n = 1, k = 1$ contribue à x^1 .
- $m = 2$: $d(2) = 2$ (diviseurs : 1, 2). Contributions : $(n = 1, k = 2)$ et $(n = 2, k = 1)$.
- $m = 3$: $d(3) = 2$ (diviseurs : 1, 3). Contributions : $(n = 1, k = 3)$ et $(n = 3, k = 1)$.
- $m = 4$: $d(4) = 3$ (diviseurs : 1, 2, 4). Contributions : $(n = 1, k = 4)$, $(n = 2, k = 2)$ et $(n = 4, k = 1)$.

4. On développe $\frac{nx^n}{1-x^n} = n \sum_{k=1}^{+\infty} x^{kn}$. La famille $(nx^{kn})_{n,k \geq 1}$ est à termes positifs et de somme totale $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n/(1-x^n) \leq \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^3} < +\infty$. Elle est donc sommable, et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{\substack{k,n \geq 1 \\ kn=m}} n \right) x^m = \sum_{m=1}^{+\infty} \sigma(m) x^m,$$

$$\text{car } \sum_{\substack{kn=m \\ k,n \geq 1}} n = \sum_{n|m} n = \sigma(m).$$

Exercice 10. Séries de Bertrand. ●●○ Soient a et b deux réels. On note, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n^a \ln(n)^b}$. Déterminer, en fonction des valeurs de a et de b , la nature de $\sum u_n$.

Correction.

- cas où $a < 1$. On montre facilement que $\sum u_n$ diverge.
Soit $c \in]a, 1[$.

Exercice 11. Formule de Stirling. ●●○

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$. Montrer que la suite (u_n) converge.

Correction. Déjà fait en classe : on calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(n+1) - n \ln(n+1) - \ln(n+1) - \frac{1}{2} \ln(n+1) + n+1 + n \ln(n) + \frac{1}{2} \ln(n) - n \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + 1 \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

terme général d'une série de Riemann convergente. Donc, par comparaison, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

2. En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} n^n e^{-n}$.

Correction. On en déduit que $\ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc que

$$\frac{n!}{n^n \sqrt{n}} e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell,$$

quantité que l'on nomme *FC*. Alors $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}$.

- Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. Établir une relation entre W_{n+2} et W_n , puis exprimer W_{2n} à l'aide de factorielles.
- Montrer que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, puis en déduire $C = \sqrt{2\pi}$.
- Application : donner un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ et déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et de $\sum_{n \geq 1} \binom{2n}{n} x^n$ pour $x > 0$.

2 Nature de séries

Exercice 12. ●●○ Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas

- $\sum \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$
- $\sum e^{-\sqrt{n}}$
- $\sum \frac{n}{2^n + n}$
- $\sum \frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})}$
- $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$
- $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$
- $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$
- $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
- $\sum e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
- $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx$
- $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$
- $\sum \cos^n \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$
- $\sum \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$
- $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

Correction.

- On remarque que $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par croissances comparées. Donc $\frac{1}{n^{\sqrt[n]{n}}} \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série considérée est divergente.
- $n^2 e^{-\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison au terme général d'une série de Riemann convergente, $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.
- $\frac{n}{2^n + n} \sim \frac{n}{2^n}$. Or, $n^2 \frac{n}{2^n} = \frac{n^3}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $\sum \frac{n}{2^n + n}$ converge. **Remarque :** on aurait pu utiliser un critère de D'Alembert, mais de fait il n'était pas nécessaire.
- $\frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^2 \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente.
- $n^2 \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n} = \frac{n^5 \ln(2n)}{3^n} = o\left(\frac{n^6}{3^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $\frac{n^3 \ln(2n)}{3^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$ est à termes positifs, donc elle est convergente.

(vi) On détermine un équivalent du terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-n + \frac{1}{2} + o(1)} \sim \sqrt{e} e^{-n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente (géométrique). Donc, comme u_n est à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

(vii) Posons $v_n = \frac{n!^2}{(2n)!}$. Là, une règle de D'Alembert s'impose !

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{1}{4} < 1,$$

donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum v_n$ converge.

(viii) Posons $a_n = \frac{1}{\ln(n)^n}$. Pour $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(3)$ donc $a_n \leq \frac{1}{\ln(3)^n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc $\sum a_n$ converge.

(ix) Posons $b_n = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$. Alors $b_n = e^{-\ln(n) \ln(\ln(n))} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$. Or, pour $n \geq e^3$, $\ln(\ln(n)) \geq \ln(3) > 1$, donc $b_n \leq \frac{1}{n^{\ln(3)}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum b_n$ converge.

(x) Posons $c_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{2n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série positive divergente, donc $\sum c_n$ diverge.

(xi) On sait que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$. Donc $\frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}$, donc $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx \geq \frac{2}{\pi n}$, terme général d'une série divergente. Donc la série diverge.

(xii) Si $\alpha > 0$, $\cos \frac{1}{n^\alpha} \sim 1$, donc $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

(xiii) Si $\alpha > 0$,

$$\cos^n \frac{1}{n^\alpha} = e^{n \ln(\cos \frac{1}{n^\alpha})}.$$

Or,

$$n \ln \left(\cos \frac{1}{n^\alpha} \right) = n \ln \left(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \right) = -n^{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha}).$$

Ainsi, $\cos^n \frac{1}{n^\alpha} = \exp(-n^{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha}))$. Donc, comme $\alpha > 0$, $\cos^n \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{1} 0$, donc la série diverge. En revanche elle convergerait si on avait $\alpha < 0$, et divergerait si $\alpha = 0$.

(xiv) Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$ $d_n = \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$. Alors

$$\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{2n^3},$$

donc $d_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum d_n$ converge.

(xv) Si $t \leq \frac{1}{n}$, alors $t^n \leq \frac{1}{n^n}$, donc $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{n^{2n}}} = \frac{n^{2n}}{n^{2n}+1}$, donc $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^2} \geq \frac{1}{n} \frac{n^{2n}}{n^{2n}+1} \sim \frac{1}{n}$, donc la série diverge.

Exercice 13. ●○○ Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ et $\sum |u_{n+1} - u_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

Correction. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a alors, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k^2 &= u_0^2 + \sum_{k=1}^n u_k(S_k - S_{k-1}) \\ &= u_0^2 + \sum_{k=1}^n u_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} S_k \\ &= u_0^2 + \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) S_k + u_n S_n. \end{aligned}$$

Mais (S_n) converge et (u_n) aussi (vers 0) donc $u_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ensuite, $|u_k - u_{k+1}| |S_k| \leq M |u_{k+1} - u_k|$ où $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n|$ (qui existe par convergence de (S_n)). Donc, par comparaison

de séries à termes positifs, $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) S_k$ est absolument convergente, donc convergente. Donc $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 14. Croissances comparées exotiques. ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant (les paramètres α et β sont des réels strictement positifs).

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$ | 7. $\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{n^\alpha}$ |
| 2. $\frac{(\ln n)^n}{n!}$ | 8. $e^{-(\ln n)^\alpha}$ |
| 3. $1 - \operatorname{th}\left(\sqrt{\ln n}\right)$ | 9. $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ |
| 4. $(n+1)^{1/n} - n^{1/n}$ | 10. $\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{n^\alpha}$ |
| 5. $\frac{1}{n^{2-\cos(1/n)}}$ | 11. $\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^\alpha}$ |
| 6. $\operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi} \operatorname{Arctan}(n^\alpha)\right)$ | 12. $(\ln(n+\beta))^\alpha - (\ln n)^\alpha$ |

Exercice 15. Termes généraux issus d'un procédé sommatoire. ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant ($a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$).

1. $a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$

Correction. On sait que si $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, alors $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler-Mascheroni. Ainsi,

$$a^{H_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a^{\ln(n)+\gamma+o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^\gamma n^{\ln(a)},$$

terme général d'une série

- grossièrement divergente si $\ln(a) \geq 0$, i.e. $a \geq 1$,
- divergente si $-1 \leq \ln(a) < 0$, i.e. $e^{-1} \leq a < 1$,
- convergente si $a < e^{-1}$.

2. $a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^b}}$

Correction. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^b}$.

Tout d'abord, si $b > 1$, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc a^{S_n} converge vers une limite finie non nulle, ce qui assure que

la série diverge grossièrement.

On suppose désormais $b < 1$ (le cas $b = 1$ ayant déjà été traité à la question précédente). On sait qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $S_n = \frac{n^{1-b}}{1-b} + c + o(1)$. Alors

$$a^{S_n} = a^{\frac{n^{1-b}}{1-b} + c + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^c a^{\frac{n^{1-b}}{1-b}} = a^c e^{\frac{n^{1-b}}{1-b} \ln(a)}.$$

Si $a \geq 1$, ce terme ne tend pas vers 0, d'où la divergence grossière.

Si $a < 1$, on étudie le comportement de $n^2 a^{S_n}$:

$$n^2 a^{S_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} a^c e^{2 \ln(n) + \frac{n^{1-b}}{1-b} \ln(a)}.$$

Puisque $\ln(a) < 0$, on a par croissances comparées :

$$2 \ln(n) + \frac{n^{1-b}}{1-b} \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-b}}{1-b} \ln(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Par composition avec l'exponentielle, $n^2 a^{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, d'où $a^{S_n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison avec les séries de Riemann convergentes, la série converge.

3. $a^{\sum_{k=1}^n \ln(k)}$

Correction. Encore une comparaison série-intégrale ! Par comparaison avec une intégrale, on sait que

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n).$$

Si $a \geq 1$, la série diverge grossièrement car son terme général ne tend pas vers 0.

Si $a < 1$, on observe la quantité $n^2 a^{\sum_{k=1}^n \ln(k)}$:

$$n^2 a^{\sum_{k=1}^n \ln(k)} = e^{2 \ln(n) + \left(\sum_{k=1}^n \ln(k)\right) \ln(a)}.$$

Puisque $\ln(a) < 0$, par croissances comparées :

$$2 \ln(n) + \left(\sum_{k=1}^n \ln(k)\right) \ln(a) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n) \ln(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

On en déduit que $n^2 a^{\sum_{k=1}^n \ln(k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, soit $a^{\sum_{k=1}^n \ln(k)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ce qui prouve la convergence de la série.

4. $\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{1^\beta + 2^\beta + \dots + n^\beta}$

Correction. Il s'agit à nouveau d'un classique de l'asymptotique. Une comparaison série-intégrale permet d'affirmer que $\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (puisque $\alpha > 0$). De même au dénominateur, $\sum_{k=1}^n k^\beta \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}$.

Ainsi, en effectuant le quotient des équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}{\frac{n^{\beta+1}}{\beta+1}} = \frac{\beta+1}{\alpha+1} n^{\alpha-\beta} = \frac{\beta+1}{\alpha+1} \frac{1}{n^{\beta-\alpha}}.$$

Par comparaison avec les séries de Riemann, la série converge si, et seulement si, $\beta - \alpha > 1$.

5. $\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n \ln(k^\alpha)$

Correction. Par propriété du logarithme, on sort la constante α de la somme : $\sum_{k=1}^n \ln(k^\alpha) = \alpha \sum_{k=1}^n \ln(k)$.

Comme $\sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$, on obtient :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \frac{n \ln(n)}{n^\beta} = \frac{\alpha \ln(n)}{n^{\beta-1}}.$$

On reconnaît le terme général d'une série de Bertrand. Celle-ci converge si, et seulement si, $\beta - 1 > 1$, c'est-à-dire $\beta > 2$.

6. $\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$

Correction. Regroupons les équivalents usuels : le numérateur est la somme harmonique $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, et le

dénominateur vaut $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$.

En formant le quotient des équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n \ln(n)} = \frac{1}{n}.$$

Par comparaison avec la série harmonique, la série diverge.

7. $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)$

Correction. Ce terme général combine deux comportements asymptotiques distincts :

- D'une part, pour le reste de la série de Riemann convergente, une comparaison série-intégrale donne

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n}.$$

- D'autre part, la somme harmonique vérifie $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$. On a donc :

$$\exp(-H_n) = \exp(-\ln(n) - \gamma + o(1)) = \frac{e^{-\gamma}}{n} e^{o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-\gamma}}{n}.$$

Par produit d'équivalents :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \times \frac{e^{-\gamma}}{n} = \frac{e^{-\gamma}}{n^2}.$$

Puisque $2 > 1$, la série converge par comparaison aux séries de Riemann.

8. $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$, où $p \in \mathbb{N}$

Correction. On note $F_n = 1! + \dots + n!$. On isole les termes prépondérants en écrivant $F_n = F_{n-2} + (n-1)! + n!$. Ainsi,

$$\frac{F_n}{n!} = \frac{F_{n-2}}{n!} + \frac{1}{n} + 1.$$

Or, $\left| \frac{F_{n-2}}{n!} \right| \leq \frac{n(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, $F_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$. On a donc :

$$\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+p)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^p}.$$

Ainsi, la série converge si, et seulement si, $p \geq 2$.

Exercice 16. Nombres de Pisot. ●●○ – ●●●

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier naturel.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors par la formule du binôme de Newton, on sait que

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sqrt{3}^k 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1 + (-1)^k) \sqrt{3}^k 2^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2\sqrt{3}^k 2^{n-k}.\end{aligned}$$

Or, si k est pair, $\sqrt{3}^k \in \mathbb{N}$, ce qui assure que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.

2. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Correction. On note, pour n dans $\mathbb{N}$, K_n l'entier $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$. On a alors, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)| &= |\sin(K_n\pi - \pi(2 - \sqrt{3})^n)| \\ &= |\sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)| \\ &\leq |\pi(2 - \sqrt{3})^n|,\end{aligned}$$

terme général d'une série géométrique convergente : on a $1 < 3 < 4$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ donc $0 < 2 - \sqrt{3} < 1$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$ converge.

3. ●●● *Généralisation – difficile.* Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers, de racines complexes $\theta, z_2, \dots, z_d$ (comptées avec multiplicité), avec $\theta > 1$ réel et $|z_j| < 1$ pour tout $j \geq 2$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi\theta^n)$ converge absolument.

Correction. C'est un peu plus délicat à raconter. On note $\sigma_k = \sum_{i_1 < \dots < i_k} z_{i_1} \dots z_{i_k}$ (en notant $z_1 = \theta$).

On démontre que pour tout n , $p_n = \theta^n + z_2^n + \dots + z_d^n \in \mathbb{Z}$.

- pour $n = 1$, on a $p_1 = \theta + z_2 + \dots + z_d \in \mathbb{Z}$ par les relations coefficients racines (c'est l'opposé du coefficient devant X^{n-1})
- pour $n = 2$, on remarque que

$$\begin{aligned}p_2 &= z_1^2 + \dots + z_d^2 \\ &= (z_1 + \dots + z_d)^2 - 2 \sum_{i < j} z_i z_j \\ &= \sigma_1 p_1 - 2\sigma_2,\end{aligned}$$

qui est donc entier car σ_1, p_1 et σ_2 sont entiers (c'est volontaire de ma part d'avoir écrit $\sigma_1 p_1$ car, même si ces quantités sont égales, il faut écrire les choses comme ça pour que la formule fasse sens).

- pour $n = 3$, et $d = 3$, on remarque que

$$\begin{aligned}z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 &= (z_1 + z_2 + z_3)(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) - z_1 z_2^2 - z_1 z_3^2 - z_2 z_1^2 - z_2 z_3^2 - z_3 z_1^2 - z_3 z_2^2 \\ &= \sigma_1 p_2 - (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(z_1 + z_2 + z_3) + 3z_1 z_2 z_3 \\ &= \sigma_1 p_2 - \sigma_2 p_1 + 3\sigma_3.\end{aligned}$$

On généralise facilement cette formule, et on obtient que

- pour $k \leq n$, $p_k = \sigma_1 p_{k-1} - \sigma_2 p_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} k \sigma_k$,
- pour $k > n$, $p_k = \sigma_1 p_{k-1} - \sigma_2 p_{k-2} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_n p_{k-n}$.

Ainsi, on montre par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, p_n est entier. On en déduit que, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\sin(\theta^n \pi)| &= \left| \sin \left(p_n \pi - \sum_{k=2}^d z_k^n \pi \right) \right| \\ &= \left| \sin \left(\sum_{k=2}^d z_k^n \pi \right) \right| \\ &= \left| \sin(z_2^n \pi) \cos \left(\sum_{k=2}^d z_k^n \pi \right) + \cos(z_2^n \pi) \sin \left(\sum_{k=2}^d z_k^n \pi \right) \right| \\ &\leq |\sin(z_2^n \pi)| + \left| \sin \left(\sum_{k=2}^d z_k^n \pi \right) \right|, \text{ en majorant les cos par } 1 \\ &\leq \dots \\ &\leq \sum_{k=2}^d |z_k|^n, \text{ en majorant } |\sin(x)| \text{ par } |x|, \end{aligned}$$

ce qui est le terme général d'une série convergente ! Donc $\sum \sin(\theta^n \pi)$ est absolument convergente, donc convergente.

4. Que se passe-t-il pour $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(1 + \sqrt{2})^n)$?

Correction. Il faut essayer de relier cette question à la question précédente. On écrit $\theta = 1 + \sqrt{2}$. Alors $\theta^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2} = 3 + 2(\theta - 1) = 1 + 2\theta$. Ainsi, θ est racine de $X^2 - 2X - 1$, de racines θ et $z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$, de module < 1 . Ainsi, cette série converge.

Remarque, on aurait pu juste faire comme à la première question et regarder $1 - \sqrt{2}$.

Exercice 17. Regroupement par paquets. ●●○

1. Soit $\alpha > 0$. On étudie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}$.

- (a) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, montrer que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p$ si et seulement si $p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1$.

Correction. C'est une question de cours. On sait que, par définition, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est l'unique entier p vérifiant $\sqrt{n} - 1 < p \leq \sqrt{n}$, ou, formulé autrement, l'unique entier p vérifiant $p \leq \sqrt{n} < p+1$, i.e. $p^2 \leq n < (p+1)^2$, ou encore $p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1$.

- (b) On note S_n la somme partielle d'ordre n et $U_p = S_{p^2-1}$. Donner un équivalent de $U_{p+1} - U_p$.

Correction. On écrit

$$U_{p+1} - U_p = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha} = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^p}{n^\alpha} = (-1)^p \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Pour déterminer un équivalent de la somme, on peut faire une comparaison série-intégrale **mais**, comme les bornes sont équivalentes, des encadrements seront certainement plus adéquats. On écrit que

$$\sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{(p+1)^{2\alpha}} \leq \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{p^{2\alpha}}$$

d'où

$$\frac{2p+1}{(p+1)^{2\alpha}} \leq \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{2p+1}{p^{2\alpha}}.$$

Ainsi, par encadrement, on en déduit que $U_{p+1} - U_p \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^p}{p^{2\alpha-1}}$.

(c) En déduire la nature de la série selon α .

Correction. Attention ! On a potentiellement une série alternée ! Déterminons déjà la convergence éventuelle de $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$.

- si $\alpha \leq \frac{1}{2}$, alors $U_{p+1} - U_p$ ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$, donc (U_p) diverge (par comparaison suite-série).
- si $\alpha > 1$, alors $|U_{p+1} - U_p| \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{2\alpha-1}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc, par comparaison, $\sum U_{p+1} - U_p$ converge absolument, donc converge. Donc la suite (U_p) converge.
- si $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, là il faut faire attention. On ne peut pas utiliser d'équivalents lorsqu'on a affaire à une série alternée. En revanche, l'encadrement de la question précédente va nous aider, car il nous donne

$$\frac{2(p+1)-1}{(p+1)^{2\alpha}} \leq |U_{p+1} - U_p| \leq \frac{2p+1}{p^{2\alpha}},$$

c'est-à-dire que

$$\frac{2}{(p+1)^{2\alpha-1}} - \frac{2}{p^{2\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1)^{2\alpha}} \leq |U_{p+1} - U_p| - \frac{1}{p^{2\alpha-1}} \leq \frac{1}{p^{2\alpha}}$$

Or,

$$\frac{2}{(p+1)^{2\alpha-1}} - \frac{2}{p^{2\alpha-1}} = \frac{2}{p^{2\alpha-1}} \left(\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{1-2\alpha} - 1 \right) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1-2\alpha}{p^{2\alpha}}.$$

Ainsi, l'encadrement donne que

$$|U_{p+1} - U_p| - \frac{1}{p^{2\alpha-1}} \underset{p \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right).$$

On en déduit que

$$U_{p+1} - U_p \underset{p \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^p}{p^{2\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{p^{2\alpha}}\right).$$

Le premier terme de la somme est le terme général d'une série convergente par critère des séries alternées. Le second est le terme général d'une série convergente par comparaison à une série de Riemann. Ainsi, par le lien suites-séries $\sum U_{p+1} - U_p$ converge donc la suite (U_p) converge.

On a donc vu que pour $\alpha \leq \frac{1}{2}$, (U_p) diverge, ce qui assure que (S_n) diverge.

Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, (U_p) converge. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$, et $p = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Alors

$$S_n = U_p + \sum_{k=p^2}^n \frac{(-1)^p}{k^\alpha}.$$

Mais on sait que

$$\left| \sum_{k=p^2}^n \frac{(-1)^p}{k^\alpha} \right| = \sum_{k=p^2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq |U_{p+1} - U_p| \leq \frac{2p+1}{p^{2\alpha}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui assure la convergence de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2. Déterminer, par la même méthode, la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 18. Séries de Kempner. ●●○ Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon_k = 1$ si l'écriture décimale de k ne comporte pas le chiffre 1, et $\varepsilon_k = 0$ sinon.

- Déterminer le nombre d'entiers ayant exactement p chiffres en base 10 et dont l'écriture ne comporte pas le chiffre 1.
- En déduire la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon_k}{k}$. Commenter.
- Déterminer, selon $\alpha > 0$, la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon_k}{k^\alpha}$.
- Soit $a > 0$ et $f(n)$ le nombre de 0 dans l'écriture décimale de n . Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$.
- Soit $a > 0$, b réel et $p(n)$ le nombre de chiffres de n en base 10. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{a^{p(n)}}{n^b}$.

Exercice 19. Séries et produits infinis. ●●○

- Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $v_n > -1$ pour tout n . On pose $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + v_k)$.
 - On suppose que $\sum v_n$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que (P_n) converge vers une limite non nulle.
 - Montrer que la conclusion subsiste si l'on suppose seulement que $\sum v_n$ converge absolument.
 - Donner un exemple où $\sum v_n$ converge mais où $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.
 - Donner un équivalent simple de $\ln(u_n)$, puis de u_n .
 - En déduire la nature de $\sum u_n$ et celle de $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 20. Séries indexées par une permutation. ●●○ Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.

- Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n) + n^2}$ et de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$.

Correction. Déjà, on remarque que $0 \leq \frac{1}{\sigma(n) + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sigma(n) + n^2}$ converge.

Ensuite, $0 \leq \frac{1}{\sigma(n)^2 + n} \leq \frac{1}{\sigma(n)^2}$. Mais comme la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable, on en déduit que $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge (invariance par permutation). Donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$ converge.

- Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge, et ce quelle que soit σ .

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$$

Comme $\sigma(n+1), \dots, \sigma(2n)$ sont n entiers distincts, on sait que $\sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k)$ est au moins égale à $1+2+\dots+n =$

$\frac{n(n+1)}{2}$. D'où $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{n(n+1)}{8n^2} \geq \frac{1}{8}$. Ainsi, comme $\mathbb{N}^* = \{1, 2\} \sqcup \bigsqcup_{p \geq 0} [2^p + 1, 2^{p+1}]$, et comme

$\sum_{p \geq 0} \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \sum_{p \geq 0} \frac{1}{8} = +\infty$, on en déduit que la série diverge.

Autre solution, + astucieuse. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k}$ et on remarque que, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} H_n^2 &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{\sigma(k)}}{k} \frac{1}{\sqrt{\sigma(k)}} \right)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

Mais comme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma(k)} \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ (par injectivité de σ), on en déduit que

$$H_n^2 \leq S_n H_n, \text{ d'où } H_n \leq S_n.$$

3. Le résultat subsiste-t-il si σ est seulement supposée injective ?

Correction. On a juste utilisé que si on prenait n images de σ , que l'on ordonnait, alors la plus petite était ≥ 1 , la seconde ≥ 2 , etc. Donc, **oui**, le résultat subsiste si σ est seulement injective.

4. Soit maintenant σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{\sigma(n)}{n!}$.

Correction. Cela dépend de σ .

- si $\sigma = \text{Id}$ ou $\sigma(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(n)$, alors on a convergence.
- sinon, on peut construire σ telle que la série diverge. Si on définit $\sigma(2k) = (2k)!$, et on met en bijection les impairs et les entiers restants.

5. Pour quels réels α est-on assuré que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$ converge, quelle que soit la bijection σ ?

Correction. Aucun, avec le contre-exemple précédent ! Comme $\frac{1}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, et ce, quel que soit α , le contre-exemple précédent marche toujours.

Exercice 21. Une série de Hardy. ●●● Soit $\alpha > 0$. On étudie la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Correction. Dans tout l'exercice, on note $a_n = \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

1. Traiter le cas $\alpha > 1$.

Correction. Si $\alpha > 1$, alors la série converge absolument.

2. On suppose $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. En posant $t = \sqrt{u}$, montrer que $\int_1^x \frac{\sin(\sqrt{u})}{u^\alpha} du$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, puis conclure par comparaison série-intégrale.

Correction. On fait, comme indiqué, le changement de variables. Alors si $t = \sqrt{u}$, $u = t^2$. Donc $du = 2t dt$. Lorsque $u = 1$, $t = 1$ et lorsque $u = x$, $t = \sqrt{x}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{\sin \sqrt{u}}{u^\alpha} du &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(u)}{t^{2\alpha}} 2t dt \\ &= \int_1^{\sqrt{x}} \frac{\sin(u)}{t^{2\alpha-1}} dt. \end{aligned}$$

Ensuite, je prends un peu d'avance sur le chapitre suivant... les deux sont très intriqués.

On verra, dans le chapitre 2 (et ça sera un grand classique) que l'intégrale ci-dessus converge (on fait une IPP). Ainsi, l'intégrale désirée admet une limite finie en $+\infty$.

Cependant, il faut faire très attention à la comparaison série-intégrale. La fonction que l'on considère n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$. On va utiliser la remarque faite en classe sur la CSI, et étudier $a_n - \int_n^{n+1} f(t)dt$, où $f : t \mapsto \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^\alpha}$. f est dérivable, de dérivée $f' : t \mapsto \frac{\frac{1}{2} \cos(\sqrt{t}) t^{\alpha-\frac{1}{2}} - \alpha \sin(\sqrt{t}) t^{\alpha-1}}{t^{2\alpha}}$. Ainsi, si $t \in [n, n+1]$, on peut majorer

$$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{\alpha+\frac{1}{2}}} + \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| a_n - \int_n^{n+1} f(t)dt \right| &= \left| \int_n^{n+1} f(n)dt - \int_n^{n+1} f(t)dt \right| \\ &\leq \int_n^{n+1} |f(n) - f(t)|dt \\ &\leq \int_n^{n+1} |n - t| \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}} dt \text{ par l'inégalité des accroissements finis.} \\ &\leq \frac{C}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente. Ainsi, la série de terme général $\left(a_n - \int_n^{n+1} f(t)dt \right)$ converge, ce qui assure que $\sum_{n=1}^N a_n$ converge, i.e. que la série converge.

3. On suppose $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} \right)^2 \right\rfloor.$$

(a) Montrer que pour tout k dans $[\alpha_n + 1, \beta_n]$, $\sin(\sqrt{k}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction. Soit k vérifiant $\alpha_n < k \leq \beta_n$. Alors

$$2n\pi + \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{k} \leq 2n\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Ainsi, $\sin(\sqrt{k}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Minorer $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha}$ et conclure.

Correction. On en déduit que, pour n dans $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha} \geq (\beta_n - \alpha_n) \frac{\sqrt{2}}{2\beta_n^\alpha}.$$

Mais

$$\begin{aligned} \beta_n - \alpha_n &\geq \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4} \right)^2 - 1 - \left(2n\pi + \frac{\pi}{4} \right)^2 \\ &\geq 3n\pi + \frac{9\pi^2}{16} - 1 - n\pi - \frac{\pi^2}{16} \\ &\geq 2n\pi + \frac{\pi^2 - 2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha} &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2n\pi}{\beta_n^\alpha} \\ &\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{2n\pi}{(2n\pi)^{2\alpha}}, \end{aligned}$$

quantité qui, étant donné que $\alpha \leq \frac{1}{2}$, ne tend pas vers 0. Cependant, si la série convergeait (vers $\ell \in \mathbb{R}$), on aurait

$$\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{\alpha_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0.$$

3 Asymptotique

Exercice 22. Suites à décroissance rapide. ●●○ Soient a dans $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^a.$$

Correction. Étant donné l'énoncé, il est naturel de vouloir considérer $v_n = \frac{u_n}{n^a}$. Le résultat précédent montre que

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^a \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$ converge, donc, par le lien suites-séries, la suite $(\ln(v_n))$ converge, ce qui assure que $v_n = e^{\ln(v_n)}$ converge vers $C > 0$. D'où le résultat.

Exercice 23. Suites à décroissance rapide. ●●○

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge et que, si R_n est le reste d'ordre n , alors $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_{n+1}$.

Correction. Déjà, $\sum u_n$ converge par la règle de D'Alembert.

Ensuite, on va en fait revenir à la preuve de la règle de D'Alembert en elle-même. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \varepsilon u_n$. Soit $n \geq N$. Alors pour tout $k \geq n+1$, $u_k \leq \varepsilon^{k-n-1} u_{n+1}$. Ainsi,

$$|R_n - u_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_{n+1} \leq 2\varepsilon \text{ si } \varepsilon \leq \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_{n+1} + o(u_{n+1})$, ce qui signifie que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_{n+1}$.

2. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2}$.

Correction. Par la question précédente, comme $\frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = e^{-2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-(n+1)^2}$.

Exercice 24. *Équivalents de restes et de sommes partielles à croissance rapide.* ●●○

1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $0 \leq \ell < 1$. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_{n+1}}{1-\ell}$.
2. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour les sommes partielles lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell > 1$ (ou $\ell = +\infty$).
3. Donner un équivalent simple de chacune des expressions suivantes ($\alpha > 0$, $a > 1$) :

1. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}$
2. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{a^k}$
3. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{(k!)^\alpha}$
4. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$

5. $\sum_{k=1}^n e^{k^\alpha}$
6. $\sum_{k=1}^n a^{k!}$
7. $\sum_{k=2}^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$
8. $\sum_{k=1}^n 3^{k^2} \ln(k)$

4. Que dire du cas $\alpha \leq 1$ pour $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}$? Traiter en particulier $\alpha = 1$ et $\alpha = 1/2$.

Exercice 25. *Reste de la série harmonique alternée.* ●●○ Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n , préciser son signe et majorer $|R_n|$.
2. Simplifier $R_n + R_{n+1}$ et en déduire un équivalent simple de R_n .
3. Établir un développement asymptotique de R_n à deux termes.
4. Montrer que $\sum R_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 26. *La série* $\sum (-1)^n \ln(n)/n$. ●●○ On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2(n)}{2} \right)_{n \geq 1}$ converge. On note C sa limite.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge, mais pas absolument.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = \ln(2) \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.
4. Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes, du reste de cette série.

Exercice 27. *Un « inverse » de la série harmonique.* ●●○ Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et on pose

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(p) = \min \{ n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geq p \}.$$

1. Justifier que φ est bien définie et que $\varphi(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Établir un développement asymptotique de H_n à deux termes lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. En déduire un équivalent simple de $\varphi(p)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.
4. Déterminer le comportement asymptotique de la suite $\left(\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)}\right)_{p \geq 1}$.
5. Pour $x > 0$, on note $a(x) = \text{Card} \{n \geq 1 \mid H_n \leq x\}$. Donner un équivalent de $a(x)$ en $+\infty$.

Exercice 28. *Sommation de relations de comparaison.* ●●○ Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels non nuls. On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$, et on suppose que

$$a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
2. Montrer que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis donner un équivalent simple de $S_n^3 - S_{n-1}^3$.
3. En déduire un équivalent simple de S_n , puis montrer que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}.$$

4. Énoncer et démontrer le résultat général de sommation de relations de comparaison utilisé à la question 3.

Correction. *Une autre preuve, par comparaison série-intégrale.* De $a_n S_n \rightarrow 1$ on tire $a_n^2 S_n^2 \rightarrow 1$, c'est-à-dire $(S_n - S_{n-1}) S_n^2 \rightarrow 1$. On pense alors naturellement à une comparaison série-intégrale :

$$(S_n - S_{n-1}) S_{n-1}^2 \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \leq (S_n - S_{n-1}) S_n^2,$$

c'est-à-dire $a_n^2 S_{n-1}^2 \leq \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} \leq a_n^2 S_n^2$, ou encore

$$a_n^2 S_n^2 + a_n^2 (S_{n-1}^2 - S_n^2) \leq \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} \leq a_n^2 S_n^2.$$

Or $S_n^2 - S_{n-1}^2 = a_n^2 (2S_n - a_n^2)$, quantité bornée, donc $a_n^2 (S_{n-1}^2 - S_n^2) = O(a_n^2) = o(a_n^2 S_n^2)$. Comme $a_n^2 S_n^2 \rightarrow 1$, la sommation des relations de comparaison, l'encadrement et le télescopage donnent $\frac{S_n^3}{3} \sim n$, d'où $S_n^3 \sim 3n$ et $a_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Exercice 29. *Théorèmes d'Abel-Dini.* ●●○ Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs et $\alpha > 0$.

Partie A — Le cas divergent. On suppose ici que $\sum u_n$ diverge et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n}$ diverge.
2. Montrer que pour $\alpha > 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
3. Que se passe-t-il pour $0 < \alpha < 1$?

Partie B — Le cas convergent. On suppose ici que $\sum u_n$ converge et on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

4. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{R_n}$ diverge.
5. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge.

Partie C — Moralité.

6. En déduire qu'il n'existe pas de série à termes strictement positifs qui soit « frontière » : pour toute série divergente, il en existe une qui diverge « plus lentement », et pour toute série convergente, il en existe une qui converge « plus lentement ».

Exercice 30. Lemme de Kronecker. ●●○

1. Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On suppose que $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{a_n}$ converge. Montrer que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Application : soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum_{k=1}^n k u_k = o(n)$.
3. Application : soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum u_n^2$ converge. Montrer que $\sum_{k=1}^n u_k = o(\sqrt{n})$, puis que

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\sqrt{k}} = o(\ln n).$$

4. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{u_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4 Familles sommables

Exercice 31. Le contre-exemple des sommes itérées. ●●○ Pour (n, p) dans $\mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2} \text{ si } n \neq p, \quad u_{n,n} = 0.$$

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et calculer cette somme.
2. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$.
3. Que peut-on en conclure sur la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$?
4. Retrouver directement ce résultat en minorant $\sum_{(n,p) \in F} |u_{n,p}|$ pour des parties finies F bien choisies.

Exercice 32. Familles sommables de référence. ●●○ Étudier la sommabilité des familles suivantes, en discutant selon les paramètres.

- $\left(\frac{1}{1+mn} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ et $\left(\frac{1}{1+m^2n^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$
- $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{m^\alpha + n^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{a^m + b^n} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $a > 1$ et $b > 1$
- $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 33. Sommation par paquets et exponentielle. ●●○

- Justifier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{p! q! (p+q+1)}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, puis calculer sa somme.
- Soit $a > 0$. Pour (n, k) dans $\mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,k} = \frac{a^k}{(n+k)!}$. Justifier la sommabilité de $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ et calculer sa somme.
- Soient a et b deux complexes distincts de module < 1 . Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{1 - a - b + ab}.$$

- Soit z dans $\mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Montrer que la famille $(z^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme. En déduire, pour $r \in [0, 1[$ et θ réel, la valeur de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$.

Exercice 34. Intersion et fonction ζ . ●●○ Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

- Justifier l'existence puis calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$.
- Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\zeta(n) - 1)$ et calculer sa somme.
- Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$ et calculer sa somme.
- Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p \geq 2, q \geq 2}$ et calculer sa somme de deux façons.

Exercice 35. Autour de la partie entière de la racine carrée. ●●○ On admet dans cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Justifier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$.
- Calculer sa somme en sommant d'abord par rapport à p .
- En sommant par paquets « à $p + q^2$ constant », en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{n(n+1)}.$$

- Par une méthode analogue, établir l'égalité $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{2^n}$.

Exercice 36. Coprimalité et fonction ζ . ●●○ On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

- Justifier l'existence de $S = \sum_{\substack{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ m \wedge n = 1}} \frac{1}{m^2 n^2}$.
- En partitionnant $(\mathbb{N}^*)^2$ suivant la valeur de $d = m \wedge n$, montrer que $S = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}$, puis calculer S .
- Généraliser : pour $\alpha > 1$, exprimer $\sum_{m \wedge n = 1} \frac{1}{m^\alpha n^\alpha}$ à l'aide de ζ .
- Interpréter le résultat en termes de « probabilité que deux entiers tirés au hasard soient premiers entre eux ».

Exercice 37. *Sommabilité sur $\mathbb{Z}^n$ et normes.* ●●○ Soient n dans $\mathbb{N}^*$, α un réel et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}}.$$

- Justifier que la réponse ne dépend pas de la norme choisie ; on pourra donc supposer $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.
- Pour p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $I_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \|x\|_\infty = p\}$. Montrer que $(I_p)_{p \geq 1}$ est une partition de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ et calculer $\text{Card}(I_p)$.
- En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille soit sommable.
- Retrouver, dans le cas $n = 2$, la nature de la famille $\left(\frac{1}{(p^2 + q^2)^\beta} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

5 Du côté des concours

Exercice 38. CCINP 24. 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$. On note S_p la valeur de la somme.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\frac{\frac{(n+1)^p}{2^{n+1}}}{\frac{n^p}{2^n}} = \frac{(n+1)^p}{2n^p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Par le critère de D'Alembert, la série de terme général $\left(\frac{n^p}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

- En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$.

Correction. On remarque que

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^p}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{2^n}, \end{aligned}$$

ce par linéarité de la somme d'une série et car toutes les $\sum \frac{n^k}{2^n}$ sont convergentes. Ainsi,

$$S_p = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} S_k.$$

Le dernier terme de la somme est $\frac{1}{2} S_p$, on en déduit donc que

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k.$$

- En déduire que $S_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Correction. On démontre ce résultat, notons-le $\mathcal{H}_p$, par récurrence forte.

Déjà, $\mathcal{H}_0$ est clairement vrai car $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = 2 \in \mathbb{N}$.

Ensuite, soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_{p-1}$ vraies. Alors, comme $S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} S_k$ et comme les coefficients binomiaux $\binom{p}{k}$ sont tous entiers, on en déduit que $S_p \in \mathbb{N}$.

Exercice 39. CCINP 24. Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ puis celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^n e^{-n^2 t^2} dt$.
(on vérifiera d'abord que chacun des deux termes généraux est bien défini)

Correction. Chouette, un exercice qui mêle intégrales et séries!

Première série Déjà, la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[n^2, +\infty[$ et $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(1/t^2)$, qui est intégrable. La fonction étant positive, on sait que le reste $\int_y^{+\infty} e^{-t^2} dt$ tend en décroissant vers 0 lorsque y tend vers $+\infty$.
Ainsi, $\int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est positive, décroissante, tend vers 0 ; a fortiori, $\frac{1}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ aussi. Donc, par le critère des séries alternées, la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

Deuxième série Pour mieux comprendre le terme général de cette série, on effectue le changement de variables linéaire $u = nt$. Ainsi,

$$\int_0^n e^{-n^2 t^2} dt = \frac{1}{n} \int_0^{n^2} e^{-n^2 t^2} dt.$$

En notant $v_n = (-1)^n \int_0^n e^{-n^2 t^2} dt$, on remarque, par le calcul qu'on vient de faire, que

$$u_n + v_n = (-1)^n \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Mais $\frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est positive, décroissante, tend vers 0 donc la série de terme général $(-1)^n \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge par le critère des séries alternées.

Ainsi, $\sum u_n$ converge, $\sum u_n + v_n$ aussi, donc $\sum v_n$ converge.

Exercice 40. Centrale 24. Nature de la série de terme général $z_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

Correction. Méthode plus rapide mais avec un résultat hors-programme. On essaie de faire une règle de D'Alembert, mais qui ne fonctionne pas. On écrit quand même :

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On va ensuite utiliser la règle de Raabe-Duhamel. L'idée est de trouver une série (convergente ou divergente) de terme général (v_n) telle que $\frac{z_{n+1}}{z_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ou $\frac{z_{n+1}}{z_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Ensuite, c'est assez classique de démontrer qu'on en déduit le comportement de la série de terme général (z_n) .

Posons $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha > 0$. Alors

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En prenant $\frac{1}{6} < \alpha < 1$, on remarque que, asymptotiquement (i.e. à partir d'un certain rang N), on a $\frac{z_{n+1}}{z_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. On en déduit alors que pour $n > N$,

$$\prod_{k=N}^{n-1} \frac{z_{k+1}}{z_k} \geq \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k},$$

soit $\frac{z_n}{z_N} \geq \frac{v_n}{v_N}$. Par comparaison de séries à termes positifs, et comme la série de terme général v_n diverge, la série de terme général z_n diverge.

Méthode piétonne, mais pour moi davantage dans l'esprit du cours. Même si z_n est défini à l'aide d'un produit, la règle de D'Alembert ne fonctionne malheureusement pas. Remarquons que $z_n = \prod_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ où f est la fonction sinus cardinal, $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Regardons $\ln(z_n)$.

$$\ln(z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right).$$

Or, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, donc

$$\ln\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{6k}.$$

Par comparaison à une série à termes positifs, on en déduit que la série de terme général $\ln\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)$ diverge (vers $-\infty$) et donc que $\ln(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Maintenant, on voudrait dire que $\ln(z_n) \sim -\frac{1}{6} \ln(n)$ (comme la somme partielle de la série harmonique), et que « donc » $z_n \sim e^{-\frac{1}{6} \ln(n)}$. Problème, on ne sait pas en quoi un équivalent du terme général permet un équivalent des sommes partielles et, pire encore, on ne peut pas passer les équivalents à l'exponentielle. Cependant, on va reprendre l'idée que l'on a eue en cours pour trouver un équivalent de H_n .

Montrons que $u_n = \ln(z_n) + \frac{1}{6} \ln(n)$ converge. Pour ce faire, on étudie $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) + \frac{1}{6} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) + \frac{1}{6} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{6n} + \frac{1}{120n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{1}{6n} + \frac{1}{120n^2} + \frac{1}{36n^2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc, par comparaison à une série absolument convergente, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, donc la suite (u_n) converge vers un réel c . Ainsi, $e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^c$, d'où

$$n^{1/6} z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^c, \text{ i.e. } \boxed{z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n^{1/6}}}.$$

Par comparaison à une série à termes positifs, la série de terme général z_n diverge.

Exercice 41. X 24. Étudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$ (convergence, convergence absolue).

Correction.

Convergence On a envie de sauter à pieds joints dans un critère des séries alternées. Malheureusement, je n'ai pas réussi à démontrer de monotonie... on va essayer de faire autrement !

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{2n} + u_{2n+1} &= \frac{\sin(\ln(2n))}{2n} - \frac{\sin(\ln(2n+1))}{2n+1} \\ &= \frac{(2n+1)\sin(\ln(2n)) - 2n\sin(\ln(2n+1))}{2n(2n+1)} \\ &= \frac{\sin(\ln(2n))}{2n(2n+1)} - \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n))}{2n+1}. \end{aligned}$$

Le premier terme correspond au terme général d'une série absolument convergente. Pour le second, on utilise un théorème des accroissements finis avec $f : x \mapsto \sin(\ln(x))$, donc la dérivée est $\frac{\cos(\ln(x))}{x}$: on dispose de c_n dans $[2n, 2n+1]$ tel que

$$\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n)) = \frac{\cos(\ln(c_n))}{c_n},$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n))}{2n+1} \right| &= \frac{|\cos(\ln(c_n))|}{(2n+1)c_n} \\ &\leq \frac{1}{(2n+1)2n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente, donc la série de terme général $\frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln(2n))}{2n+1}$ converge, donc

$\sum_{k=1}^{2n} u_k$ converge, tout comme $\sum_{k=1}^{2n+1} u_k$ (car la différence des deux tend vers 0). Donc la série de terme général u_n converge.

Convergence absolue On n'a toujours pas de monotonie, mais en même temps, avoir une intégrale nous aiderait peut-être.

On note

$$v_n = u_n - \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx = \int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx.$$

Un théorème des accroissements finis entre x et n assure qu'il existe $c_x \in [n, x]$ vérifiant

$$\frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} = \frac{\cos(\ln(c_x)) - \sin(\ln(c_x))}{c_x^2}$$

(on a dérivé la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(\ln(x))}{x}$). Ainsi,

$$\left| \frac{\sin(\ln(n))}{n} - \frac{\sin(\ln(x))}{x} \right| \leq \frac{2}{c_x^2} \leq \frac{2}{n^2},$$

donc $|v_n| \leq \frac{2}{n^2}$. Ainsi, la série de terme général v_n converge absolument, donc converge. Donc la série de terme

général u_n est de même nature que la série de terme général $\int_n^{n+1} \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$, qui est de même nature que la

suite de terme général $\cos(\ln(n))$.

Il reste donc à montrer que cette suite diverge.

C'est vrai, mais cela dépasse quand même **un peu** le cadre de la PSI... L'idée est que $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ mais $\ln(n+1) - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, on peut construire une suite d'entiers k_n telle que $\ln(k_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0[2\pi]$ et une suite d'entiers ℓ_n telle que $\ln(\ell_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Me demander si vous avez cherché cela et que vous bloquez encore !

Exercice 42. CCINP 24. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

1. Justifier la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge vers 0.

Correction. On remarque que la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et qu'elle tend vers 0 donc, par le critère des séries alternées, la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ converge. Ainsi, son reste d'ordre n , u_n , est défini et tend vers 0 en $+\infty$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

Correction. Il s'agit là d'étudier un peu plus finement le reste d'une série alternée. Par le cours, on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$, u_n est du signe de $(-1)^{n+1+1} = (-1)^n$ et que $|u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ainsi, on a l'inégalité

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann), on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que la série de terme général v_n converge.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général w_n ?

Correction. Notons $z_n = v_n + w_n$. Alors

$$z_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} = \frac{(-1)^n}{n} \times C,$$

où C est une constante ne dépendant pas de n (c'est la valeur de la somme de la série alternée de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$), positive.

Ainsi, comme la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, la série de terme général z_n converge. Mais $w_n = z_n - v_n$ donc la série de terme général w_n converge.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général x_n ?

Correction. Avec les notations de la question précédente, on sait que

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} C > 0,$$

donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{n},$$

terme général d'une série divergente. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général x_n diverge.

Exercice 43. Centrale 24. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n v_k &= \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1+u_k-1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1+u_k}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_{k-1})} - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_k)} \\ &= \boxed{1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)}} \text{ par télescopage.} \end{aligned}$$

2. Montrer que si (u_n) est à termes positifs, alors la série de terme général v_n est convergente.

Correction. Si (u_n) est à termes positifs, on remarque que la suite $\left(\frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, et décroissante car $1+u_n \geq 1$ pour tout n . Par le théorème de la limite monotone, elle converge, donc $\sum_{k=0}^n v_k$ converge. aussi, c'est-à-dire que la série est convergente.

3. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général v_n est absolument convergente.

Correction. On suppose ici que $\sum |u_n|$ converge. On aimerait pouvoir dire quelque chose comme $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{C}$, mais, pour ce faire, il faut démontrer que le dénominateur converge !

Notons, pour n dans $\mathbb{N}$, $p_n = \prod_{k=0}^n (1+u_k)$. Comme $\sum |u_n|$ converge, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $1+u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc, à partir d'un certain rang, $1+u_k > 0$. Quitte à sauter les premiers indices, on suppose que ce rang est 0. Ainsi, on obtient

$$\ln(p_n) = \sum_{k=0}^n \ln(1+u_k).$$

Or, comme $u_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, $\ln(1+u_k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} u_k$, qui est le terme général d'une série absolument convergente. On en déduit que la série de terme général $\ln(1+u_k)$ converge absolument, donc on dispose de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(p_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$.

Ainsi,

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{\ell},$$

et comme $\sum u_n$ converge absolument, $\sum v_n$ aussi.

Exercice 44. Mines-Telecom 23. Nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$?

Correction. Déjà, on remarque que comme $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$, on a bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ensuite, on va utiliser le théorème des accroissements finis : on dispose de $c_n \in \left] 1, \frac{n+1}{n-1} \right[$ tel que

$$\begin{aligned} u_n &\leq \operatorname{Arctan}'(c_n) \left(\frac{n+1}{n-1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{1+c_n^2} \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

Or, $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente, donc, par comparaison à une série

à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 45. Mines 23. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Étudier la série de terme général $a_n = \sin\left(\frac{2n^2 + pn - 1}{2n + 1}\pi\right)$.

Correction. Quand on regarde (a_n) , on se dit que ça a une tête de série alternée. Or, qu'est-ce qui fait alterner le sinus : c'est $n\pi$! On fait donc apparaître artificiellement $n\pi$ dans le sinus.

On écrit

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{2n^2 + pn - 1}{2n + 1}\pi\right) \\ &= \sin\left(n\pi - n\pi + \frac{2n^2 + pn - 1}{2n + 1}\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{-2n^2 - n + 2n^2 + pn - 1}{2n + 1}\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{(p-1)n - 1}{2n + 1}\pi\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{(p-1)n - 1}{2n + 1}\pi\right). \end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que

$$\sin\left(\frac{(p-1)n - 1}{2n + 1}\pi\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{p-1}{2}\pi\right).$$

Ainsi,

- si $p - 1$ est impair, a_n ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.
- si $p - 1$ est pair, a_n tend vers 0. Il reste à démontrer que $|a_n|$ est bien monotone. Pour ce faire, on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)n - 1}{2n + 1} &= \frac{(p-1)\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{p-1}{2} - 1}{2n + 1} \\ &= \frac{p-1}{2} - \frac{1 + \frac{p-1}{2}}{2n + 1}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\frac{(p-1)n - 1}{2n + 1}\pi$ tend en croissant vers $\frac{p-1}{2}\pi$, donc que $\sin\left(\frac{(p-1)n - 1}{2n + 1}\pi\right)$ est négative et tend en croissant vers 0. Donc $|a_n|$ tend en décroissant vers 0. Par le critère des séries alternées, on en déduit que la série de terme général a_n converge.

Exercice 46. Centrale 24. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n + 1}.$$

1. Montrer la convergence de la somme de la suite et donner une approximation à 10^{-6} près.
2. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \ln(2).$$

3. On veut réorganiser la suite sous le nom de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant à la suite deux termes positifs et un terme négatif :

$$V : \left\{1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

4. Écrire la fonction $V(n)$ et donner $V(250)$, $V(251)$, et $V(252)$.
5. Soit t_n la somme partielle des suites (V_n) . Donner une valeur approchée de t_{250} , t_{251} , et t_{252} .
6. Faire le rapport $\frac{s_n}{t_n}$ et trouver une conjecture.

7. Prouver la conjecture.
8. Considérons une généralisation de la suite (V_n) sous la forme suivante : on prend p termes positifs et q termes négatifs dans la suite. Trouver la limite de cette suite généralisée.

Correction. C'est le DM1... exercice non corrigé!

Exercice 47. Centrale PSI 24. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose

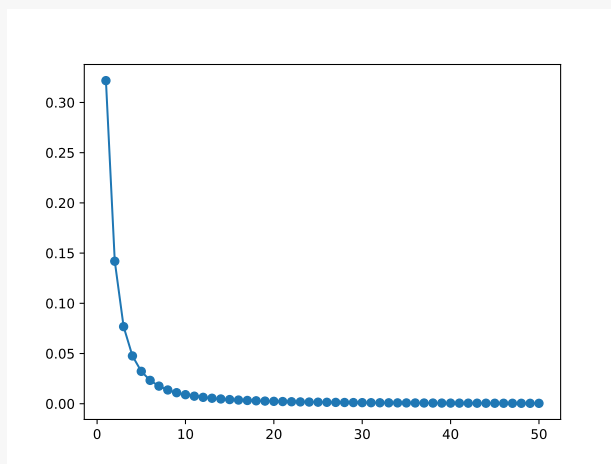
$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi/4[\\ 1 & \text{si } x \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases} \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(x) u_k + u_n > x \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Écrire une fonction Python traçant une ligne polygonale reliant les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$. Conjecture?

Correction. On propose

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 ##Calcul de un
5
6 def u(n):
7     return np.arctan(n+1) - np.arctan(n)
8
9 X = list(range(1,51))
10 Y = [u(n) for n in X]
11 plt.plot(X,Y, 'o-')
12 plt.show()
```

On obtient



- (b) Écrire une fonction Python d'argument x et N renvoyant $(\varepsilon_0(x), \dots, \varepsilon_N(x))$ et $\sum_{k=0}^N \varepsilon_k(x) u_k$. Tester cette fonction pour $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \pi$ et, à chaque fois, $N = 20$. Observations et conjecture?

Correction. On propose

```
13 def approx(x,N):
14     if x>np.pi/4:
15         res = u(0)
16     else:
17         res = 0
18     for k in range(1,N-1):
19         if res + u(k)<x:
20             res += u(k)
21     return res
```

On obtient

```

22 >>> approx(0,20)
23 0
24
25 >>> approx(0.5,20)
26 0.49955747871629486
27
28 >>> approx(1,20)
29 0.9981299440890583
30
31 >>> approx(2,20)
32 1.5182132651839548
33
34 >>> approx(np.pi,20)
35 1.5182132651839548

```

On remarque que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors la série semble tendre vers x .

2. (a) Étudier la monotonie de (u_n) et sa convergence éventuelle.

Correction. Par le théorème des accroissements finis, on dispose de $x_n \in [n, n+1]$ tel que

$$u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n) = \frac{1}{1+x_n^2}(n+1-n) = \frac{1}{x_n^2}.$$

On a alors

$$\frac{1}{1+x_{n+1}^2} \leq \frac{1}{1+x_n^2},$$

d'où la décroissance de (u_n) .

- (b) Donner un équivalent de u_n .

Correction. On en déduit, comme $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

3. (a) Étudier la convergence de la série $\sum \varepsilon_n(x) u_n$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \varepsilon_n u_n \leq u_n$. Or, $\sum u_n$ converge par transformation suite-série car $(\text{Arctan}(n))$ converge vers $\frac{\pi}{2}$, et sa somme vaut $\frac{\pi}{2} - 0$, i.e. $\frac{\pi}{2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. On a, par ce qui précède, $0 \leq S \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, i.e. $0 \leq S \leq \frac{\pi}{2}$.

- (b) Démontrer la conjecture de la question 1.b

Correction. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$S_n \leq x \leq S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Pour $n = 0$, si $x \leq \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon_0 = 0$ et donc $S_0 = 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - u_0 = \frac{\pi}{4}$. On a bien l'encadrement voulu ;

si $x > \frac{\pi}{4}$, alors $\varepsilon_0 = 1$ et $S_0 = \frac{\pi}{4}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{4}$ donc, là encore, on a bien l'encadrement voulu. Soit

$n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \leq x \leq S_n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors ou bien $x \leq S_n + u_{n+1}$ et alors $\varepsilon_{n+1} = 0$ et donc $S_{n+1} = S_n$ d'où $S_{n+1} \leq x$ par hypothèse de récurrence. Par ailleurs comme $x \leq S_n + u_{n+1}$, on a $x \leq S_{n+1} + u_{n+1}$.

Montrons donc que $u_{n+1} \leq \sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k$. On a $\sum_{k=n+2}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n+2)$, donc il reste à montrer

$$\text{Arctan}(n+2) - \text{Arctan}(n+1) \leq \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n+2)$$

tan étant strictement croissante, il suffit de montrer (on applique tan) :

$$\frac{(n+2) - (n+1)}{1 + (n+2)(n+1)} \leq \frac{1}{n+2}$$

ce qui équivaut à $n+2 \leq 1 + (n+1)(n+2)$ et donc la propriété voulue est vraie et on a bien finalement $S_{n+1} \leq x \leq S_{n+1} + R_{n+1}$. Il reste à étudier le cas où $x > S_n + u_{n+1}$. Dans ce cas, $\varepsilon_{n+1} = 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. On a bien $S_{n+1} \leq x$ et par hypothèse de récurrence, $x \leq S_n + R_n$ or $S_n + R_n = S_n + u_{n+1} + R_{n+1} = S_{n+1} + R_{n+1}$ et donc $x \leq S_{n+1} + R_{n+1}$. Dans tous les cas on a bien vérifié l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$. On a vu (1.a.) que (S_n) converge et (R_n) converge vers 0. En passant à la limite dans les inégalités prouvées par récurrence, x est la limite de (S_n) i.e. $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

4. Généralisation. Soit (u_n) une suite vérifiant l'hypothèse (H) suivante : $\sum u_n$ est convergente et (u_n) est décroissante positive. On note λ la somme de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $S \in [0, \lambda]$.

Correction. $\sum u_n$ est une série à termes positifs. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq \varepsilon_n u_n \leq u_n$. Or $\sum u_n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. En sommant les inégalités précédentes, on obtient $0 \leq S \leq \lambda$.

On cherche à savoir à quelle condition la propriété (P) suivante est vraie :

$$\forall x \in [0, \lambda], \exists (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Donner la condition nécessaire et suffisante cherchée en fonction de (R_n) .

Correction. Pour espérer que tout $x \in [0, \lambda]$ s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$, il ne faut pas qu'un terme de la série u_n soit plus grand que le reste de la série R_n . La condition nécessaire et suffisante cherchée s'écrit donc $u_n \leq R_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons le. On suppose que tout $x \in [0, \lambda]$ s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$ avec $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > R_{n_0}$. On choisit $x \in]R_{n_0}, u_{n_0}]$. On peut écrire $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$, avec $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. S'il existe $n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket$ tel que $\varepsilon_n = 1$, alors $x \geq u_n \geq u_{n_0}$ (décroissance de (u_n)) : contradiction. Donc, pour tout $n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket$, $\varepsilon_n = 0$.

$$x = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n \leq R_{n_0} : \text{ contradiction.}$$

Réciproquement, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq R_n$. Soit $x \in [0, \lambda]$. On construit (ε_n) par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, avec l'algorithme donné au début.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$S_n \leq x \leq S_n + R_n$$

Pour $n = 0$: ou bien $x \leq u_0$ et alors $\varepsilon_0 = 0$ et donc $S_0 = 0$, or $0 \leq x \leq u_0$ et donc $S_0 \leq x \leq$

$S_0 + R_0 (u_0 \leq R_0)$. Ou bien $x > u_0$ et alors $\varepsilon_0 = 1, S_0 = u_0$. On a alors $S_0 \leq x \leq S_0 + R_0$ car $S_0 + R_0 = \lambda$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n \leq x \leq S_n + R_n$. Ou bien $x \leq S_n + u_{n+1}$ et alors $\varepsilon_{n+1} = 0$. On a $S_{n+1} = S_n$ et donc par hypothèse de récurrence $S_{n+1} \leq x$. Mais on a aussi $x \leq S_n + u_{n+1} \leq S_n + R_{n+1} = S_{n+1} + R_{n+1}$. Ou bien $x > S_n + u_{n+1}$ et alors $\varepsilon_{n+1} = 1$, d'où $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$. Mais on a bien dans ce cas $S_{n+1} \leq x$ et comme par hypothèse de récurrence $x \leq S_n + R_n$, i.e. $x \leq S_n + u_{n+1} + R_{n+1}$, on a bien $x \leq S_{n+1} + R_{n+1}$. On a donc bien ce qu'on veut.

Comme S_n converge et comme R_n converge vers 0, par passage à la limite dans les inégalités précédemment trouvées, x est la limite de S_n i.e. $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$.

Exercice 48. X MP 2024. Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Correction. Comme $f^{-1}(n) \rightarrow +\infty$, on a $\lfloor f^{-1}(n) \rfloor \sim f^{-1}(n)$. La nature de la deuxième série est donc la même que celle de la série $\sum \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n^2}$ ou encore de $\sum \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n(n+1)}$. Or, comme tout est positif, on peut écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor f^{-1}(n) \rfloor}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{\substack{n \geq 1 \\ \lfloor f^{-1}(n) \rfloor = k}} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{f(k) \leq n < f(k+1)} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{\lceil f(k) \rceil} - \frac{1}{\lceil f(k+1) \rceil} \right).$$

On a enfin, par transformation d'Abel,

$$\sum_{k=1}^K k \left(\frac{1}{\lceil f(k) \rceil} - \frac{1}{\lceil f(k+1) \rceil} \right) = \frac{1}{\lceil f(1) \rceil} + \sum_{k=2}^K \frac{1}{\lceil f(k) \rceil} - \frac{K}{\lceil f(K+1) \rceil}.$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\frac{x}{f(x)} \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors les deux séries divergent. Pour la première, c'est clair puisque $\frac{1}{f(n)} \geq \frac{1}{n}$, à partir d'un certain rang. Pour la deuxième, on a aussi $\frac{f^{-1}(n)}{n} \rightarrow +\infty$ et donc $\frac{f^{-1}(n)}{n^2} \geq \frac{1}{n}$, à partir d'un certain rang.
- Sinon, on peut trouver une suite (x_n) de réels positifs tels que $\frac{x_n}{f(x_n)}$ est bornée. C'est aussi le cas de $\frac{K_n}{\lceil f(K_n+1) \rceil}$, avec $K_n = \lfloor x_n \rfloor - 1$ (utiliser la croissance de f). En utilisant K_n au lieu de K dans les transformations précédentes, on peut donc passer à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ et conclure que les deux séries ont même nature.

Exercice 49. Centrale MP 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le nombre de 1 dans la représentation binaire de n , et on pose $\varepsilon_n = (-1)^{b_n}$.

- (a) Écrire une fonction Python `epsilon(n)` qui renvoie les n premiers termes de la suite ε .
(b) Vérifier avec Python que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$$

et le démontrer. En déduire une fonction `epsilon2` qui renvoie les n premiers termes de la suite ε en utilisant cette propriété.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k$$

Grâce à la fonction précédente, donner les premiers termes de la suite (S_n) . Quelle conjecture peut-on faire sur ses valeurs ? Le démontrer.

- On pose, pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que cette série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = (1-x)f(x^2)$.
- (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - x^{2^k})$$

3. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.
- (b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n \ln \frac{n}{n+1}$ converge.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n = \prod_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{\varepsilon_k}$$

À l'aide de Python, calculer P_n^2 pour quelques valeurs de $n > 1000$. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la nature de la suite (P_n) ?

- (d) Démontrer cette conjecture.

On pourra introduire $R_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\varepsilon_k}$.

Correction.

1. (a) On peut écrire un truc comme ça :

```

36 def b(n):
37     s=0
38     while n!=0:
39         s=s+n%2
40         n=n//2
41     return s
42
43 def epsilon(n):
44     return [(-1)**b(k) for k in range(n)]

```

Voici ce que renvoie epsilon(20) :

```

45 [1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, 1, -1]

```

La fonction b a pour complexité $O(\log_2 n)$, donc la fonction epsilon a pour complexité $O(n \log_2 n)$.

- (b) On peut tester rapidement avec le code suivant, et écrire la fonction epsilon2 ainsi :

```

46 def test(n):
47     e=epsilon(2*n)
48     for i in range(n):
49         if e[2*i]!=e[i] or e[2*i+1]!=-e[i]:
50             return False
51     return True
52
53 def epsilon2(n):
54     L=[1]+(n+1)*[0]
55     for i in range(n//2+1):
56         L[2*i]=L[i]
57         L[2*i+1]=-L[i]
58     return L[:n]

```

Cette dernière fonction est bien de complexité linéaire, on peut la tester avec `epsilon(20)==epsilon2(20)`.

- (c) On code facilement la fonction S :

```

59 def S(n):
60     return sum(epsilon2(n+1))

```

Voici ce que renvoie [S(i) for i in range(20)] :

```

61 [1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0]

```

On s'aperçoit qu'elle vaut 0 pour tous les indices impairs et 1 ou -1 pour les pairs. Plus précisément, on peut remarquer que les termes d'indices pairs reproduisent la suite ε . On va donc démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n} = \varepsilon_n \quad \text{et} \quad S_{2n+1} = 0$$

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété précédente. $\mathcal{P}_0$ est vraie car $S_0 = 1 = \varepsilon_0$ et $S_1 = 0$.Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Alors :

$$S_{2n+2} = S_{2n+1} + \varepsilon_{2n+2} = S_{2n+1} + \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+1}$$

$$S_{2n+3} = S_{2n+2} + \varepsilon_{2n+3} = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1} = 0$$

La récurrence est donc démontrée.

On peut aussi calculer S_{2n} et S_{2n+1} en faisant des paquets de 2 et en remarquant que $\varepsilon_{2n} + \varepsilon_{2n+1} = 0$.

2. (a) Comme
- $|\varepsilon_n| = 1$
- , la série entière a le même rayon que
- $\sum x^n$
- , c'est à dire 1. Pour
- $x = 1$
- et
- $x = -1$
- , la série diverge grossièrement. Donc
- $\mathcal{D}_f =]-1; 1[$
- .

(b) Calculons $(1-x)f(x^2)$:

$$\begin{aligned}(1-x)f(x^2) &= (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} x^{2n+1} = f(x)\end{aligned}$$

(c) Posons :

$$Q_n(x) = \prod_{k=0}^n (1-x^{2^k}) \quad Q(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (1-x^{2^k})$$

Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = Q_n(x)f(x^{2^{n+1}})$$

La propriété est vraie pour $n=0$, car $Q_0(x) = 1-x$ et on a bien $f(x) = (1-x)f(x^2)$. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain $n \geq 0$. Alors :

$$f(x) = Q_n(x)f(x^{2^{n+1}}) \quad \text{donc} \quad f(x^2) = Q_n(x^2)f(x^{2^{n+2}})$$

On a donc :

$$f(x) = (1-x)f(x^2) = (1-x)Q_n(x^2)f(x^{2^{n+2}}) = Q_{n+1}(x)f(x^{2^{n+2}})$$

ce qui termine la récurrence.

En faisant maintenant tendre n vers l'infini, et f étant continue en 0 (car elle est DSE sur $] -1; 1[$) :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n(x)f(x^{2^{n+1}}) = Q(x)f(0) = Q(x)$$

On aurait pu aussi penser à une autre démonstration :

- On pose $h(x) = f(x) - Q(x)$ (sachant qu'il est facile de démontrer que le produit converge).
- h vérifie l'équation fonctionnelle $h(x) = (1-x)h(x^2)$ car f et Q la vérifient, et $h(0) = 0$.
- Pour $x \in [-a; a]$ avec $a < 1$, $|h(x)| = |1-x||h(x^2)| \leq |h(x^2)|$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|h(x)| \leq |h(x^{2^n})|$.
- On démontre que Q , donc h , est continue en 0 (en passant par les $\ln$ par exemple).
- En faisant tendre n vers l'infini, on arrive à $h(x) = 0$.

On peut démontrer de même que la convergence du produit est uniforme sur tout segment $[-a; a] \subset]-1; 1[$.

3. (a) Notons $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k}$. Comme $\varepsilon_n = S_n - S_{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{S_{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{k+1} \\ &= \frac{S_n}{n} - S_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{k(k+1)}\end{aligned}$$

La suite (S_n) étant bornée (par 1), $\frac{S_n}{n(n+1)} = O(1/n^2)$, d'où la convergence de la série $\sum \frac{S_n}{n(n+1)}$ et donc de la suite (T_n) .

(b) Comme :

$$\ln \frac{n}{n+1} = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + O(1/n^2)$$

alors :

$$\varepsilon_n \ln \frac{n}{n+1} = -\frac{\varepsilon_n}{n} + O(1/n^2)$$

et donc la série considérée converge (somme de deux séries convergentes).

(c) On peut faire une petite fonction :

```
62 def Prod(n):
63     P=1
64     E=epsilon2(n+1)
65     for k in range(n+1):
66         P=P*((2*k+1)/(2*k+2))*(2*E[k])
67     return P
```

On s'aperçoit que le produit semble converger vers $1/2$ (Prod(1000) renvoie 0.49950062427515446).

(d) Les quantités sont toutes strictement positives, on peut prendre le logarithme des produits partiels. Avec des notations évidentes :

$$\ln R_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \ln \frac{k}{k+1} = T_n$$

Comme (T_n) converge, alors (R_n) converge aussi.

$$\ln P_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k \ln \frac{2k+1}{2k+2}$$

Or, comme dans la question 3.b. :

$$\ln \frac{2n+1}{2n+2} = -\frac{1}{2n+2} + O(1/n^2)$$

On en déduit la convergence de (P_n) . Il faut alors bien sûr séparer les termes pairs des termes impairs de R_n . On a :

$$R_{2n+1} = \prod_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{\varepsilon_{2k+1}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^{\varepsilon_{2k}}$$

et donc :

$$\begin{aligned} R_{2n+1} &= \prod_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{-\varepsilon_k} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^{\varepsilon_k} \\ &= \prod_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{-\varepsilon_k} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k+2}{2k+1} \right)^{\varepsilon_k} \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2k+2} \right)^{\varepsilon_k} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$R_{2n+1} = \frac{R_n}{2P_n^2}$$

Toutes les quantités convergent, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = R > 0$, donc :

$$R = \frac{R}{2P^2} \iff P^2 = 1/2$$

On retrouve la conjecture faite à la question précédente, et on arrive à $P = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 50. Mines-Ponts MP 2026. On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 > 0$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sum_{k=0}^n x_k}$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

1. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et que $x_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$.

Correction. On sait déjà que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît strictement (car $x_n > 0$ par récurrence immédiate). Par le théorème de la limite monotone, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Si (x_n) convergeait vers $\ell > 0$, alors, par le théorème de Cesàro, on aurait $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\ell$. Mais alors, on aurait

$x_{n+1} - x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell n}$, terme général d'une série divergente. Ceci assure que la série de terme général $(x_{n+1} - x_n)$

diverge, donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, absurde !

Donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{1}{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{1}{S_n} = o(x_n)$.

Ceci assure donc que $x_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$.

2. En utilisant la suite $\frac{S_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{S_n}{x_n}$, démontrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx_n$.

Correction. Comme indiqué par l'énoncé, soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{S_n}{x_n} &= \frac{S_n + x_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{S_n}{x_n} \\ &= 1 + S_n \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &= 1 + S_n \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{x_n x_{n+1}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \end{aligned}$$

donc, par sommation des relations de comparaison,

$$\frac{S_n}{x_n} = \frac{S_0}{x_0} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_{k+1}}{x_{k+1}} - \frac{S_k}{x_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n,$$

ce qui assure l'équivalent attendu.

3. Déterminer un équivalent de $x_{n+1}^2 - x_n^2$, puis en déduire un équivalent de x_n .

Correction. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - x_n^2 &= \left(x_n + \frac{1}{S_n} \right)^2 - x_n^2 \\ &= \left(2x_n + \frac{1}{S_n} \right) \frac{1}{S_n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x_n}{S_n} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série divergente. Ceci assure, par sommation des relations de comparaison, que $x_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln(n)$

$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \ln(n)$ (équivalent de la série harmonique).

On en déduit que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n)}$.

Indications

Ex 1. 1. Poser $u_n = H_n - \ln(n)$ et utiliser le lien suites-séries.

Ex 10. Si $a \neq 1$, se ramener à une série de Riemann. Sinon, faire une comparaison série-intégrale.

Ex 11. 1. Étudier la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$.
 4. Montrer que $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ et que $W_n \sim W_{n+1}$.

Ex 13. On pourra utiliser une transformation d'Abel.

Ex 14. Dans presque tous les cas, écrire $u_n = e^{\ln(u_n)}$ et comparer $\ln(u_n)$ à $-\alpha \ln(n)$.

Ex 15. Commencer systématiquement par un équivalent (ou un développement asymptotique) de la somme figurant dans l'expression. Attention, on ne passe pas les équivalents à l'exponentielle !

Ex 16. 3. Démontrer que les sommes de Newton $p_n = \theta^n + z_2^n + \dots + z_d^n$ d'un polynôme unitaire à coefficients entiers sont des entiers.

Ex 17. 1.c. On distinguera les cas $\alpha \leq \frac{1}{2}$, $\alpha > 1$ et on fera très très attention à l'asymptotique pour le cas $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$.
 2. Les paquets sont ici de longueur géométrique : $\lfloor \ln n \rfloor = p$ pour $n \in [\lfloor e^p \rfloor + 1, \lfloor e^{p+1} \rfloor]$.

Ex 18. Regrouper les entiers par nombre de chiffres.

Ex 19. 1.a. Passer au logarithme et utiliser $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

Ex 20. 2. Minorer $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ en remarquant que les $\sigma(k)$, pour $k \in [n+1, 2n]$, sont n entiers distincts.

Ex 22. On pourra considérer $v_n = \frac{u_n}{n^a}$ et se rappeler que, pour l'étude d'un produit infini, c'est bien de prendre le $\ln \dots$

Ex 26. 3. Considérer S_{2n} et séparer les indices pairs des indices impairs ; faire apparaître $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k}$.

Ex 27. 3. Encadrer $H_{\varphi(p)}$ et $H_{\varphi(p)-1}$ par définition de $\varphi(p)$, puis utiliser le développement de la question 2.

Ex 29. 1. Utiliser une tranche de Cauchy $\sum_{k=n+1}^N \frac{u_k}{S_k}$.
 2. Comparer $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ à $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$.

Ex 30. 1. Poser $R_n = \sum_{k>n} \frac{x_k}{a_k}$ et effectuer une transformation d'Abel.
 3. Utiliser Cauchy-Schwarz.

Ex 31. 1. Décomposer $\frac{1}{n^2 - p^2}$ en éléments simples en p et télescoper.

Ex 32. Sommer par paquets le long des « diagonales » $m+n=c$, ou le long des « couronnes » $\max(m, n) = p$.

Ex 33. 1. Utiliser les paquets $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}$ et la formule du binôme.

Ex 34. On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et que $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ pour $|x| < 1$.

Ex 35. 3. Pour n fixé, dénombrer les couples (p, q) tels que $p+q^2=n$.