# TD 07
# Réduction

## 1 Exercices classiques

### 1.1 Réductions concrètes

**Exercice 1.** ●○○ Soit $\varphi$ l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(A) = A + \mathrm{Tr}(A)J$ où $J$ désigne la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 . Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer ses éléments propres ainsi que son éventuelle diagonalisabilité.

**Exercice 2.** *Matrices vérifiant une certaine équation.* ●○○ Trouver les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}(M) = 3$.

**Exercice 3.** *Réduction concrète d'endomorphismes différentiels.* ●◐○ *Les questions de cet exercice sont indépendantes*

1. Donner la matrice de $\varphi : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto \left(X^2-1\right)P'' + (2X+1)P'$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ et montrer que $\varphi$ est diagonalisable.
2. Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : E \to E, P \mapsto X(X-1)P' - XP$. Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer ses éléments propres.
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto a(b-X)P' - nP$. Déterminer le spectre de $f$ via la décomposition en éléments simples de $P'/P$.

**Exercice 4.** *Matrice compagnon et endomorphismes cycliques.* ●◐○

1. Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ un polynôme unitaire. La matrice compagnon de $P$ est

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Montrer que le polynôme caractéristique de $C_P$ est $P$.
2. Soit $M$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $f_M$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à $M$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   - il existe $x_0$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\left(x_0, f_M(x_0), \ldots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$,
   - $M$ est semblable à une matrice compagnon.

**Exercice 5.** *Réduction de matrices par blocs.* ●●○ *Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.* Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si, et seulement si $A$ et $B$ le sont.
2. On suppose que $AB = BA$. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $M^k$.
   (b) En déduire, pour tout $P$ dans $\mathbb{K}[X]$, une expression de $P(M)$.
   (c) Conclure que $M$ est diagonalisable si, et seulement si $A$ est diagonalisable et $B$ est nulle.

*Cf. exercices 84 et 85 pour des prolongements.*

### 1.2 Deux endomorphismes : commutation, produits uv et vu

**Exercice 6.** *Commutation et codiagonalisation (1).* ●○○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, possédant $n$ valeurs propres distinctes, et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Démontrer que $f$ est diagonalisable. On note $\mathscr{B}$ une base de diagonalisation de $f$.
2. Démontrer que la matrice de $g$ dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale. On a donc **codiagonalisé** $f$ et $g$.

**3.** Reformuler matriciellement le résultat précédent.

**Exercice 7.** *Valeurs propres de $u \circ v$ et $v \circ u$.* ●◐○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**1.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $u \circ v$. Démontrer que, si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda$ est une valeur propre de $v \circ u$.

**2.** Démontrer que, si $\lambda = 0$ est une valeur propre de $u \circ v$ et $E$ est de dimension finie, alors $\lambda$ est une valeur propre de $v \circ u$.

**3.** En considérant $E = \mathbb{R}[X]$, $u : P \mapsto P'$ et $v$ qui à $P$ associe l'unique primitive de $P$ qui s'annule en 0, démontrer que le résultat de la question précédente est faux en dimension infinie.

**Exercice 8.** *Commutation et codiagonalisation (2).* ●●○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$, diagonalisables, tels que $f \circ g = g \circ f$.

**1.** Démontrer que pour toute valeur propre $\lambda$ de $f$, $g$ stabilise $E_\lambda(f)$.

**2.** Démontrer que l'induit par $g$ sur $E_\lambda(f)$ est diagonalisable.

**3.** En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ dans laquelle les matrices de $f$ et de $g$ sont diagonales.

**4.** Traduire matriciellement le résultat précédent.

**Exercice 9.** *Cotrigonalisation (1).* ●●○ Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes trigonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie, tels que $u \circ v = v \circ u$.

**1.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. En considérant l'endomorphisme induit par $v$ sur $E_\lambda(u)$, démontrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre en commun.

**2.** En déduire, par récurrence sur $n$, qu'il existe une base de $E$ dans laquelle les matrices de $u$ et $v$ sont triangulaires supérieures. On dit que $u$ et $v$ sont cotrigonalisables.

**Exercice 10.** ●●○ Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $\mathscr{L}(E)$, vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$. Notre but est de montrer que $u$ est nilpotent.

**1.** Démontrer que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.

**2.** Méthode 1. En déduire, en considérant les valeurs propres de l'endomorphisme $\varphi : w \mapsto w \circ v - v \circ w$, que $u$ est nilpotente.

**3.** Méthode 2.

(a) Démontrer que pour tout $P$ dans $\mathbb{K}[X]$, on a $P(u) \circ v - v \circ P(u) = uP'(u)$.

(b) En déduire que $\pi_u$ divise $X\pi'_u$, puis que $u$ est nilpotent.

**Exercice 11.** *Commutant d'un endomorphisme diagonalisable.* ●●◐ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. On définit le commutant de $f$ par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$$

**1.** Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$.

**2.** Montrer : $g \in \mathscr{C}(f) \iff \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f) \quad E_\lambda(f)$ stable par $g$

**3.** Déterminer $\dim \mathscr{C}(f)$.

**4.** Si les valeurs propres de $f$ sont simples, montrer que $\mathscr{C}(f) = \mathbb{K}[f]$.

## 1.3 Endomorphismes d'espaces de matrices, traces

**Exercice 12.** *Endomorphisme de multiplication.* ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $g_A : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{array} \right.$.

**1.** Démontrer que pour tout polynôme $P$, $P(g_A) = g_{P(A)}$.

**2.** En déduire que $\pi_{g_A} = \pi_A$, que $\mathrm{Sp}(g_A) = \mathrm{Sp}(A)$, et que $A$ est diagonalisable si, et seulement si $g_A$ est diagonalisable.

**3.** Démontrer que $\chi_{g_A} = \chi_A^n$.

**4.** Démontrer que $E_\lambda(g_A) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Im}(M) \subset E_\lambda(A)\}$.

**Exercice 13.** *Une CNS de nilpotence.* ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A$ est nilpotente si, et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$.

**Correction.** Déjà, comme $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $A$ est trigonalisable. Si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de $A$, $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités, alors, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k$.
Ainsi, si $A$ est nilpotente, comme son unique valeur propre est 0, on a directement que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.
Réciproquement, si $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^n) = 0$, alors on a, pour tout $k$ dans $[\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k = 0$, d'où

$$B \times \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0, \text{ où } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_r \\ \lambda_1^2 & \dots & \dots & \lambda_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}.$$

On a envie de dire que $B$ est inversible. Mais ce n'est pas exactement une matrice de Vandemonde : par multilinéarité, $\det(B) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i \times \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} (\lambda_j - \lambda_i)$. Ce déterminant est non nul si on suppose que $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont non nulles.
Qu'à cela ne tienne, on pose $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres **non nulles** de $A$ (en supposant, par l'absurde, qu'il y en a). La matrice $B$ est alors inversible, ce qui impose que $m_1 = \cdots = m_r = 0$, d'où une absurdité. Donc la seule valeur propre de $A$ est 0, ce qui signifie que $A$ est nilpotente.

**Exercice 14.** *L'endomorphisme $M \mapsto AMB$, Mines-Ponts PSI 2015.* ●●○ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$ : $M \mapsto AMB$.

1. Montrer que $\varphi = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.
2. Montrer que $\varphi$ est nilpotente si et seulement si $A$ ou $B$ est nilpotente.
3. Montrer que $\varphi$ est diagonalisable si $A$ et $B$ le sont. Réciproque ?

**Correction.**

1. Si $A, B$ non nulles, soient $u$ tel que $Bu \neq 0$ et $v$ tel que $Av \neq 0$. Soit $M$ telle que $M(Bu) = v$. Alors $\varphi(M)u = AMBu = Av \neq 0$, donc $\varphi \neq 0$.
2. $\varphi^k(M) = A^k M B^k$, donc $\varphi^k = 0$ ssi pour tout $M$, $A^k M B^k = 0$ ssi (par 1) $A^k = 0$ ou $B^k = 0$.
3. Si $A, B$ diagonalisables, $A = PD_AP^{-1}$, $B = QD_BQ^{-1}$ avec $D_A, D_B$ diagonales. Soit $W_{ij} = U_i V_j^\top$ où $(U_i)$ base propre de $A$, $(V_j)$ base propre de $B$. Alors $\varphi(W_{ij}) = \lambda_i \mu_j W_{ij}$, et $(W_{ij})_{i,j}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Donc $\varphi$ diagonalisable. Réciproque fausse : $A = 0$, $B$ non diagonalisable donne $\varphi = 0$ diagonalisable.

**Exercice 15.** *Équation de Sylvester $AX - XB = C$.* ●●◐ Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

1. pour tout $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$ ;
2. pour tout $X$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $AX = XB \Rightarrow X = 0$ ;
3. $\chi_B(A)$ est inversible (où $\chi_B$ désigne le polynôme caractéristique de $B$) ;
4. $A$ et $B$ n'ont pas de valeur propre commune.

# 2 Aspects géométriques : vecteurs propres, valeurs propres, polynôme caractéristique, réduction concrète

## 2.1 Calculs de réduction

**Exercice 16.** *Diagonalisabilité de matrices triangulaires.* ◐○○ Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 17.** *CCINP 24.* ●○○ Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $M$.

**Correction.** Soit $x \in \mathbb{C}$. Alors

$$\begin{aligned}\chi_M(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -4 & 2 \\ 0 & x-6 & 3 \\ 1 & -4 & x \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x-6 & 3 \\ -4 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ x-6 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x^2-6x+12) + (-12-2(x-6)) \\ &= x^3 - 6x\hat{}2 + 12x - x^2 + 6x - 12 - 2x \\ &= x^3 - 7x^2 + 16x - 12.\end{aligned}$$

On voit que 2 est racine de ce polynôme, donc

$$\chi_M(x) = (x-2)(x^2-5x+6) = (x-2)^2(x-3).$$

Donc $M$ possède deux valeurs propres, 2 et 3.

**2.** Donner les valeurs propres et les vecteurs propres de $M$.

**Correction.** On a vu que 2 et 3 étaient valeurs propres.

- **pour la valeur propre** 2, on peut résoudre un système linéaire ou regarder une matrice :

$$M - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

  matrice qui est clairement de rang 2 (deux lignes identiques, la troisième qui n'est pas proportionnelle). Donc $\dim(E_2(M)) = 1$. De plus, on voit que $4C_1 + 3C_2 + 4C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in E_2(M)$. Donc $E_2(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$.

- **pour la valeur propre** 3, on remarque que

$$M - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

  et on remarque que $C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3(M)$. Comme $\dim(E_3(M)) \leqslant 1$, on en déduit que $E_3(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

**3.** $M$ est-elle diagonalisable ?

**Correction.** Comme $\dim(E_2(M)) = 1 < 2$, $M$ n'est pas diagonalisable.

**4.** $M$ est-elle trigonalisable ? Si oui, trouver une matrice triangulaire supérieure à laquelle $M$ est semblable.

**Correction.** Le polynôme caractéristique de $M$ est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $M$ est trigonalisable. On a déjà une famille $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ de vecteurs propres. Dans une base complétée $(e_1, e_2, e_3)$, la matrice sera donc

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

**MAIS**, comme $\chi_M(X) = (X-3)(X-2)^2$, le coefficient en bas à droite sera nécessairement un 2, et ce quel que soit le troisième vecteur. On va prendre un vecteur de la base canonique, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. On remarque qu'il n'appartient pas à $\text{Vect}(e_1, e_2)$ car ces deux vecteurs sont dans le plan d'équation $x = z$.
On calcule

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 2e_3 + 3e_1 - e_2$$

Ainsi, si $P = \begin{pmatrix}1&4&1\\1&3&0\\1&4&0\end{pmatrix}$, $M = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix}3&0&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

**5.** Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x' &= x + 4y - 2z \\ y' &= 6y - 3z \\ z' &= -x + 4y \end{cases}$

**Correction.** **Analyse.** Soit $X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$ une solution du système. Alors le système est $X'(t) = MX(t)$, i.e.

$$X'(t) = PTP^{-1}X(t) \text{ ou encore } P^{-1}X'(t) = TP^{-1}X(t),$$

donc, en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, $Y'(t) = TY(t)$. On note $Y(t) = \begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}$, et alors

$$\begin{cases} u'(t) = 3u(t) + 3w(t) \\ v'(t) = 2v(t) - w(t) \\ w'(t) = 2w(t). \end{cases}$$

Donc on dispose de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $w(t) = \gamma e^{2t}$. Mais alors

$$v'(t) = 2v(t) + \gamma e^{2t}.$$

Une solution particulière de l'équation est $t \mapsto \gamma t e^{2t}$ (on l'a trouvée par une variation de la constante), donc on dispose de $\beta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t$, $v(t) = \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t}$.
Enfin,

$$u'(t) - 3u(t) = 3\gamma e^{2t}$$

Une solution particulière de l'équation est $t \mapsto -3\gamma e^{2t}$ donc on dispose de $\alpha$ tel que

$$u(t) = \alpha e^{3t} - 3\gamma e^{2t}.$$

Ainsi

$$Y(t) = \begin{pmatrix}\alpha e^{3t} - 3\gamma e^{2t}\\ \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t}\\ \gamma e^{2t}\end{pmatrix},$$

donc

$$\begin{aligned} X(t) &= PY(t) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} - 3\gamma e^{2t} \\ \beta e^{2t} + \gamma t e^{2t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha e^{3t} + 4\beta e^{2t} + \gamma(t-2)e^{2t} \\ \alpha e^{3t} - 3\beta e^{2t} + \gamma(t-3)e^{2t} \\ \alpha e^{3t} + 4\beta e^{2t} + \gamma(t-3)e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous ne ferons pas la **synthèse...**

**Exercice 18.** *Diagonalisation explicite*. ●○○ Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 19.** *Diagonalisation explicite (2)*. ●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Déterminer le polynôme minimal de $A$.

**Exercice 20.** *Réduction concrète d'une matrice* $3 \times 3$. ●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c$ sont réels.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de $A$.
2. La matrice $A$ est-elle inversible ? diagonalisable ?
3. Démontrer que les valeurs propres de $A^2$ sont (réelles et) négatives ou nulles.

**Exercice 21.** *Mines-Telecom 24*. ●○○ Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On note $\mathrm{I}$ et $S$ ses valeurs propres avec $\mathrm{I} \leqslant S$.

1. Donner les expressions de $\mathrm{I}$ et $S$.

**Correction.** On calcule le polynôme caractéristique de $M$ (qui est aussi une variable aléatoire !) Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \chi_M(t) &= \begin{vmatrix} t-X & -Y \\ -Y & t-X \end{vmatrix} \\ &= (t-X)^2 - Y^2 \\ &= (t-X-Y)(t-X+Y), \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{I} = X - Y \text{ et } S = X + Y}$.

2. Calculer la probabilité que $M$ soit inversible.

**Correction.** La probabilité que $M$ soit inversible est la probabilité que ses valeurs propres ne soient jamais nulles, i.e. que $\mathrm{I} \neq 0$ et $S \neq 0$. Déjà, comme $X$ et $Y$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on sait que $S$ ne s'annule jamais.

Donc la probabilité que $M$ soit inversible est

$$\begin{aligned}
1-\mathbb{P}(\mathrm{I}=0) &= 1-\mathbb{P}(X=Y)\\
&= 1-\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X=Y,Y=n) \text{ car } (Y=n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est un système complet d'événements}\\
&= 1-\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X=n,Y=n)\\
&= 1-\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n) \text{ par indépendance}\\
&= 1-\sum_{n\geqslant 1}(pq^{n-1})^2 \text{ en posant } q=1-p\\
&= 1-p^2\sum_{n\geqslant 1}(q^2)^{n-1}\\
&= 1-p^2\frac{1}{1-q^2}\\
&= \boxed{1-\frac{p}{1+q}=\frac{2p}{1+q}.}
\end{aligned}$$

**3.** Calculer la covariance de $\mathrm{I}$ et de $S$. Les variables $\mathrm{I}$ et $S$ sont-elles indépendantes ?

**Correction.** On calcule

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(\mathrm{I},S)\\
&\qquad= \mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)\\
&\qquad= \mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y) \text{ par bilinéarité}\\
&\qquad= \mathbb{V}(X)-V(Y) \text{ par symétrie}\\
&\qquad= 0,
\end{aligned}$$

car $X$ et $Y$ suivent la même loi. Donc $\mathrm{I}$ et $S$ sont non corrélées. Cependant, elles ne sont pas indépendantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{I}=1,S=2) &= \mathbb{P}(X-Y=1,X+Y=2)\\
&= \mathbb{P}(X-Y=1,X=Y=1) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont à valeurs dans } \mathbb{N}^*, \text{ donc } (X+Y=2)=(X=1,Y=1)\\
&= 0\neq\mathbb{P}(\mathrm{I}=1)\mathbb{P}(S=2).
\end{aligned}$$

**Exercice 22.** *Un type de matrices simple à diagonaliser*. ●◐○ Pour chacune des matrices, déterminer le polynôme caractéristique, les valeurs propres, les sous-espaces propres associés, une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telle que cette matrice s'écrive $PDP^{-1}$ :

**1.** la matrice $J$ ne contenant que des 1.

**2.** la matrice $A$ avec des 1 partout, sauf la diagonale qui est nulle.

**3.** la matrice $B=\begin{pmatrix}\alpha & & (\beta)\\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exercice 23.** *Mines PSI 22*. ●◐○ Diagonaliser $M=\begin{pmatrix}&&1\\ &(0)&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}$.

**Correction.** Notons $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déjà, la matrice $M$ est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable. Ensuite, on voit aisément que $\mathrm{rg}(M)=2$, une base de son noyau est $(e_1-e_2,e_1-e_3,\dots,e_1-e_{n-1})$.

Il reste donc deux valeurs propres de $M$ à trouver. Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, alors

$$MX = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 + \cdots + x_n \end{pmatrix}$$

*Je n'ai pas envie de calculer le polynôme caractéristique et vais montrer comment faire sans.*
**Analyse.** Supposons que l'on ait une valeur propre $\lambda \neq 0$ et un vecteur propre associé $X$. Alors

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

Ainsi, comme $\lambda \neq 0$, $x_1 = \cdots = x_{n-1} = \dfrac{x_n}{\lambda}$. En particulier, comme $X \neq 0_{n,1}$, $x_n \neq 0$. On a ensuite l'équivalence

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_n = \lambda x_n &\Leftrightarrow \frac{n-1}{\lambda} x_n + x_n = \lambda x_n \\ &\Leftrightarrow \frac{n-1}{\lambda} + 1 = \lambda \\ &\Leftrightarrow n - 1 + \lambda = \lambda^2 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - (n-1) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation du second degré, de discriminant $1 + 4n - 4 = 4n - 3 > 0$ possède deux solutions

$$\frac{1 - \sqrt{4n-3}}{2} \text{ et } \frac{1 + \sqrt{4n-3}}{2}.$$

On trouve pour chaque $\lambda$ un vecteur propre correspondant, de la forme $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \\ \vdots \\ \frac{1}{\lambda} \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a ainsi diagonalisé $M$ !

**Exercice 24.** *CCINP MP 2026*. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice définie par : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et 0 sinon.

**1.** Déterminer le spectre de $M$.

**Correction.** On remarque que $M = J - \mathrm{I}_n$ où $J$ est la matrice avec que des 1. Mais $J^2 = nJ$, donc $X(X-n)$ annule $J$, ce qui assure que $\mathrm{sp}(J) \subset \{0, n\}$. Comme

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } J \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1},$$

on en déduit que $\mathrm{sp}(J) = \{0, n\}$. Donc $\mathrm{sp}(M) = \{-1, n-1\}$.

**2.** Montrer qu'il n'existe pas de forme linéaire $\phi$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute $A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\phi(A) \in \mathrm{sp}(A)$.

**Correction.** Par l'absurde, on suppose qu'il existe une telle forme linéaire $\phi$.
Alors, si $(E_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a, pour $i \neq j$, $\mathrm{sp}(E_{ij}) = \{0\}$, donc $\phi(E_{ij}) = 0$.
Ainsi, $\phi(M) = \sum_{i\neq j} \phi(E_{ij}) = 0 \notin \mathrm{sp}(M)$, absurde !
Donc une telle forme linéaire $\phi$ n'existe pas.

**Exercice 25.** *Valeurs propres d'une matrice tridiagonale.* ●●○ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $D_n(\theta) = \det(A + 2\cos(\theta)\mathrm{I}_n)$ et en déduire les valeurs propres de $A$.

## 2.2 Endomorphismes d'espaces de polynômes ou de matrices

**Exercice 26.** *CCINP 24.* ●○○ Soit $\varphi$ l'application qui au polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $X^2P$ par $X^4 - 1$.

**1.** Prouver que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

**Correction.**

- Déjà, comme $\varphi$ associe un reste de division euclidienne par $X^4 - 1$, pour tout $P$ de $\mathbb{R}_3[X]$, $\varphi(P)$ est de degré $< 4$, i.e. dans $\mathbb{R}_3[X]$.
- Ensuite, soient $P_1$ et $P_2$ deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Écrivons

$$X^2P_1 = (X^4-1)Q_1 + \varphi(P_1) \text{ et } X^2P_2 = (X^4-1)Q_2 + \varphi(P_2)$$

Alors

$$X^2(\lambda P_1 + \mu P_2) = (X^4-1)(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + (\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)).$$

Mais comme $\deg(\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2)) \leqslant 3 < 4$, l'unicité du reste de la division euclidienne assure que $(\lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2))$ est le reste de la division euclidienne de $X^2(\lambda P_1 + \mu P_2)$ par $X^4 - 1$. Ainsi,

$$\varphi(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda\varphi(P_1) + \mu\varphi(P_2),$$

donc $\varphi$ est bien linéaire.

**2.** Donnez $A$ la matrice de $\varphi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. $A$ est-elle diagonalisable ? (on pourra calculer $A^2$)

**Correction.** On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique par $\varphi$ :

- $X^2.1 = 0.(X^4-1) + X^2$ donc $\varphi(1) = X^2$
- $X^2.X = 0.(X^4-1) + X^3$ donc $\varphi(X) = X^3$
- $X^2.X^2 = 1.(X^4-1) + 1$ donc $\varphi(X^2) = 1$
- $X^2.X^3 = X(X^4-1) + X$ donc $\varphi(X^3) = X$

En notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, on en déduit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $A^2 = \mathrm{I}_4$ donc $A$ est la matrice d'une symétrie, donc elle est diagonalisable.

**3.** Donner le spectre de $\varphi$.

**Correction.** Comme $A^2 = \mathrm{I}_4$, on en déduit que le spectre de $\varphi$ est inclus dans les racines de $X^2 - 1$, i.e. $\{-1, 1\}$. Or, $A \neq \mathrm{I}_4$ et $A \neq -\mathrm{I}_4$ donc le spectre de $A$ ne peut pas être seulement $\{1\}$ ou seulement $\{-1\}$ : si c'était le cas, $A$ serait directement égale à $\mathrm{I}_4$ ou $-\mathrm{I}_4$ (car une matrice semblable à une homothétie est nécessairement cette homothétie).

**4.** Donnez les sous-espaces propres de $\varphi$.

**Correction.** On raisonne matriciellement. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$.

Alors on a les équivalences

$$P \in E_1(\varphi) \Leftrightarrow AU = U \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = b \\ a = c \\ b = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ d = b. \end{cases}$$

Donc $AU = U \Leftrightarrow U \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donc $E_1(\varphi) = \text{Vect}(1 + X^2, X + X^3)$.

Un calcul presque identique assure que $E_{-1}(\varphi) = \text{Vect}(1 - X^2, X - X^3)$.

**5.** La matrice $A$ est-elle inversible ? Si oui, donnez son inverse.

**Correction.** Étant donné le calcul qu'on a fait, $A$ est inversible, d'inverse elle-même.

**6.** L'application $\varphi$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ ?

**Correction.** L'application $\varphi$ est un endomorphisme représenté par une matrice inversible, donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

**7.** Que représente la matrice $A$ géométriquement ?

**Exercice 27.** *Mines-Telecom 24*. ●○○ Soit $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A + \text{tr}(A)\text{I}_n$.

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Correction.** Déjà, $f$ est bien à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soient ensuite $A$ et $B$ deux matrices, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu B) &= (\lambda A + \mu B) + \text{tr}(\lambda A + \mu B)\text{I}_n \\ &= \lambda A + \mu B + (\lambda \text{Tr}(A) + \mu \text{Tr}(B))\text{I}_n \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \lambda(A + \text{Tr}(A)\text{I}_n) + \mu(B + \text{Tr}(B)\text{I}_n) \\ &= \lambda f(A) + \mu f(B), \end{aligned}$$

donc $f$ est bien linéaire.

**2.** Trouver les valeurs propres de $f$.

**Correction.** **Analyse.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $f$, $A$ un vecteur propre associé. Alors $f(A) = \lambda A$. Donc

$$A + \text{Tr}(A)\text{I}_n = \lambda A,$$

d'où

$$(\lambda - 1)A = \text{Tr}(A)\text{I}_n.$$

On disjoint les cas

- si $\lambda = 1$, alors $\text{Tr}(A)\text{I}_n = 0_n$, donc $\text{Tr}(A) = 0$, i.e. $A$ est de trace nulle.
- si $\lambda \neq 1$, alors $A = \mu \text{I}_n$, $\mu \in \mathbb{R}$. Donc, comme $\mu \neq 0$,

$$(\lambda - 1)\mu\text{I}_n = n\mu\text{I}_n, \text{ donc } \lambda - 1 = n, \text{ i.e. } \lambda = n + 1.$$

**Synthèse.** On vérifie que les deux valeurs de $\lambda$ trouvées sont bien des valeurs propres :

- 1 est valeur propre : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a les équivalences

$$A + \text{Tr}(A)\text{I}_n = A \Leftrightarrow \text{Tr}(A) = 0,$$

d'où 1 est valeur propre, de sous-espace propre associé égal à $\ker(\text{Tr})$, de dimension $n^2 - 1$,

- $n+1$ est valeur propre : soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On refait une petite analyse-synthèse :
  - si $A$ est vecteur propre associé à la valeur propre $n+1$, $A+\mathrm{Tr}(A)\mathrm{I}_n = (n+1)A$, donc $nA = \mathrm{Tr}(A)\mathrm{I}_n$, i.e. $A \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$,
  - si $A \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, alors on dispose de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $A = \mu \mathrm{I}_n$, donc
$$f(A) = \mu f(\mathrm{I}_n) = \mu(\mathrm{I}_n + \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n)\mathrm{I}_n) = \mu(n+1)\mathrm{I}_n = (n+1)A,$$
  donc $A$ est vecteur propre de $f$ associé à $n+1$.

**3.** $f$ est-elle diagonalisable ?

**Correction.** On a vu que $f$ possédait deux valeurs propres :
- 1 associée au sous-espace propre $\ker(\mathrm{Tr})$, de dimension $n^2-1$,
- $n+1$ associée au sous-espace propre $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n)$, de dimension 1,

donc, comme $n^2-1+1=n^2$, $f$ est bien diagonalisable.

**4.** Donner $\mathrm{tr}(f)$ et $\det(f)$.

**Correction.** Par définition, $\mathrm{Tr}(f)$ est la somme des valeurs propres de $f$, donc $\mathrm{Tr}(f) = n^2-1+n+1 = n(n+1)$, et $\det(f)$ est leur produit, donc $\det(f) = n+1$.

**5.** $f$ est-elle un automorphisme ?

**Correction.** Le déterminant de $f$ est non nul, donc $f$ est un automorphisme.

**6.** Lien entre $\mathrm{Id}_E$, $f$ et $f^2$ ?

**Correction.** On calcule $f^2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} f(f(A)) &= f(A + \mathrm{Tr}(A)\mathrm{I}_n) \\ &= f(A) + \mathrm{Tr}(A)(n+1)\mathrm{I}_n \\ &= A + \mathrm{Tr}(A)\mathrm{I}_n + \mathrm{Tr}(A)(n+1)\mathrm{I}_n \\ &= (n+2)(A+\mathrm{Tr}(A))\mathrm{I}_n - (n+1)A, \end{aligned}$$
donc
$$f^2 - (n+2)f + (n+1)\mathrm{Id}_E = 0_E,$$
ce qui est cohérent avec les valeurs propres déjà trouvées !

**7.** Donner $f^{-1}$.

**Correction.** Par la question précédente,
$$f \circ (f - (n+2)\mathrm{Id}_E) = -(n+1)\mathrm{Id}_E,$$
donc
$$f^{-1} = \frac{n+2}{n+1}\mathrm{Id}_E - \frac{1}{n+1}f.$$

**Exercice 28.** *Mines-Télécom MP 2016*. ●○○ Soit $A$ une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = (\mathrm{Tr}(A))M + (\mathrm{Tr}(M))A.$$

**1.** Démontrer que $\varphi$ est un endomorphisme.

**2.** Déterminer $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{rg}(\varphi)$ (on distinguera selon les valeurs de $\mathrm{Tr}(A)$).

**3.** Diagonaliser $\varphi$ (quand cela est possible).

**Correction.**

**1.** Deja $\varphi$ est clairement à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, si $M$ et $N$ sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda, \mu$ dans $\mathbb{R}^2$, alors
$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + \mu N) &= (\mathrm{Tr}(A))(\lambda M + \mu N) + (\mathrm{Tr}(\lambda M + \mu N))A \\ &= \lambda(\mathrm{Tr}(A))M + \mu(\mathrm{Tr}(A))N + (\lambda \mathrm{Tr}(M) + \mu \mathrm{Tr}(N))A \text{ par linéarité de la trace} \\ &= \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N). \end{aligned}$$

Donc $\varphi$ est linéaire, donc c'est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**2.** Déterminons déjà $\ker(\varphi)$. Soit $M$ dans $\ker(\varphi)$. Alors $(\mathrm{Tr}(A))M = -(\mathrm{Tr}(M))A$. Donc

- Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $(\mathrm{Tr}(M))A = 0$, donc, comme $A \neq 0$, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. La réciproque étant évidente, on en déduit que $\ker(\varphi) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = 0\}$.
- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors $M$ est colinéaire à $A$. Donc on dispose de $\lambda$ tel que $M = \lambda A$. Mais alors

$$\varphi(M) = 2\lambda \mathrm{Tr}(A)A,$$

donc, pour que $\varphi(M) = 0$, il faut $\lambda = 0$, i.e. $M = 0$. Donc si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Ensuite, pour l'image, on effectue la même disjonction :

- Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $\varphi(M) = \mathrm{Tr}(M)A \in \mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Im}(M) = \{0\}$ ou $\mathrm{Vect}(A)$. Comme $\varphi$ n'est pas nulle, $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(A)$.
- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors $\varphi$ est injective, et donc bijective car c'est un endomorphisme en dimension finie.

**3.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$. Alors on dispose de $M$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\varphi(M) = \lambda M$, i.e. $(\mathrm{Tr}(A))M + (\mathrm{Tr}(M))A = \lambda M$, i.e. $(\lambda - \mathrm{Tr}(A))M = (\mathrm{Tr}(M))A$.

- **Si** $\mathrm{Tr}(A) = 0$**,** déjà le sous-espace propre associé à la valeur propre nulle est l'hyperplan $\{\mathrm{Tr}(M) = 0\}$. Si $\lambda \neq 0$, alors l'équation aux valeurs propres s'écrit $\lambda M = (\mathrm{Tr}(M))A$, i.e. $M = \dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{\lambda}A$, i.e. $M$ est proportionnelle à $A$. Mais alors $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(A) = 0$ donc $\varphi(M) = 0$, absurde. Donc $\varphi$ n'a pas de valeur propre non nulle et, comme $\varphi$ n'est pas l'application nulle, $\varphi$ n'est pas diagonalisable.
- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, on repart de $(\lambda - \mathrm{Tr}(A))M = (\mathrm{Tr}(M))A$.
  - Si $\lambda \neq \mathrm{Tr}(A)$, alors $M$ est colinéaire à $A$, i.e. $M = \mu A$, donc l'équation se réécrit $(\lambda - \mathrm{Tr}(A))\mu A = \mu \mathrm{Tr}(A)A$, i.e., comme $\mu$ est non nul ($M$ est un vecteur popre) et $A$ non nul, $\lambda - \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A)$, i.e. $\lambda = 2\mathrm{Tr}(A)$. Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, alors $2\mathrm{Tr}(A)$ est bien une valeur propre de $\varphi$, de sous-espace propre $\mathrm{Vect}(A)$.
  - Si $\lambda = \mathrm{Tr}(A)$, alors $M$ satisfait $(\mathrm{Tr}(M))A = 0$, i.e., comme $A \neq 0$, le sous-espace propre associé est l'hyperplan $\{\mathrm{Tr}(M) = 0\}$.

  Comme $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, on a bien $\mathrm{Vect}(A) \oplus \{\mathrm{Tr}(M) = 0\} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc on a bien diagonalisé $\varphi$.

**Exercice 29.** *Application de transposition.* ●○○ Montrer que les endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$

$$\tau : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto M^\top \end{array} \right. \quad \text{et } \tau : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ M \mapsto M + M^\top \end{array} \right.$$

sont diagonalisables, et préciser les espaces propres correspondants.

**Exercice 30.** ●◐○ Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A \in E$ avec $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$. On pose

$$\forall M \in E \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}(M)A - \mathrm{Tr}(A)M$$

**1.** Justifier que $\varphi \in \mathscr{L}(E)$.

**2.** Montrer que $\varphi$ est diagonalisable puis calculer $\mathrm{Tr}\,\varphi$ et $\det\varphi$.

**Exercice 31.** *X MP 23.* ●●● Pour une matrice de projecteur $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $R_P = \det(\mathrm{I}_n + (X-1)P)$.

**1.** Calculer $R_P$ en fonction de $P$.

**Correction.** On sait que $P$ est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{I}_n + (X-1)P$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} X\mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X^r,$$

où $r = \mathrm{rg}(P)$.

**2.** Soient $P, Q$ des matrices de projecteur dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $PQ = QP = 0$. Montrer que $R_P R_Q = R_{P+Q}$.

**Correction.** On note $f_P$ et $f_Q$ les applications linéaires canoniquement associées à $P$ et à $Q$. On sait que $f_Q$ stabilise $\ker(f_P)$ et $\mathrm{Im}(f_P)$ et que, sur $\mathrm{Im}(f_P)$, $f_Q$ est nulle. De plus, si l'on considère

$$g : \left| \begin{array}{c} \ker(f_P) \to \ker(f_P) \\ x \mapsto f_Q(x) \end{array} \right. ,$$

$g$ est un projecteur, et on a une décomposition de $\ker(f_P)$ en $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$. De plus, comme $f_Q$ est nulle sur $\mathrm{Im}(f_P)$, on en déduit que $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(g)$. Ainsi, si l'on note $r = \mathrm{rg}(P)$ et $s = \mathrm{rg}(Q)$, on a, dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la décomposition $\ker(g) \oplus \mathrm{Im}(g) \oplus \mathrm{Im}(f_P)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_P) = \begin{pmatrix} 0_{n-s-r} & & \\ & 0_s & 0 \\ & & \mathrm{I}_r \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_Q) = \begin{pmatrix} 0_{n-s-r} & & \\ & \mathrm{I}_s & 0 \\ & & 0_r \end{pmatrix}$$

On en déduit que $P$ et $Q$ sont semblables aux matrices ci-dessus, et donc que

$$\mathrm{I}_n + (X-1)(P+Q) \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-s-r} & & \\ & X\mathrm{I}_s & 0 \\ & & X\mathrm{I}_r \end{pmatrix},$$

d'où

$$R_{P+Q} = X^{s+r} = R_Q R_P$$

**3.** Soit $\varphi$ un automorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Montrer que $\varphi(E_{i,i})$ est un projecteur de rang 1 , pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

**Correction.** On sait que

$$\varphi(E_{ii})^2 = \varphi(E_{ii}^2) = \varphi(E_{ii}),$$

donc $\varphi(E_{ii})$ est un projecteur. De plus, pour tout $j$, $E_{jj}$ est semblable à $E_{ii}$ donc $\varphi(E_{jj})$ est semblable à $\varphi(E_{ii})$. En particulier, ces matrices ont toutes même rang. Mais de plus, comme $E_{ii}E_{jj} = E_{jj}E_{ii} = 0$, on a le même résultat pour $\varphi$. Mais la question précédente nous dit (par récurrence) que si $P_1, \dots, P_k$ sont $k$ projecteurs de rangs $r_1, \dots, r_k$, tels que $P_i \circ P_j = 0$ si $i \neq j$, alors

$$R_{P_1+\cdots+P_k} = X^{r_1+\cdots+r_k}$$

Dans notre cas, si $P_i = \varphi(E_{ii})$, alors on a $n$ projecteurs, non nuls, tels que $P_iP_j = P_jP_i = 0$ si $i \neq j$ et tels que $P_1 + \cdots + P_n = \varphi(\mathrm{I}_n) = \mathrm{I}_n$. On a

$$R_{\mathrm{I}_n} = X^n,$$

don $r_1 + \cdots + r_n = n$ et $r_i \geqslant 1$ pour tout $i$. On en déduit ainsi que tous ces projecteurs sont de rang 1.

(b) Que dire du rang de $\varphi(E_{i,j})$, pour $i, j$ dans $[\![1, n]\!]$ ?

**Correction.** On sait que $E_{ij}$ est équivalente à $E_{ii}$, donc $\varphi(E_{ij})$ est aussi équivalente à $\varphi(E_{ii})$ d'où $\varphi(E_{ij})$ est de rang 1.

(c) Montrer que $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,\varphi(E_{i,1})$.

**Correction.** On sait que pour tout $i$, $E_{i,1} = E_{i,i}E_{i,1}$ donc, par la même égalité avec $\varphi$, on peut dire que $\mathrm{Im}(\varphi(E_{i,1})) \subset \mathrm{Im}(\varphi(E_{ii}))$. Mais comme ces matrices sont de rang 1, on en déduit que $\mathrm{Im}(\varphi(E_{i,1})) = \mathrm{Im}(\varphi(E_{i,i}))$. Or, par le caractère direct de la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(\varphi(E_{ii})$ établi avant, et l'égalité des dimensions, $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(\varphi(E_{ii}) = \mathbb{K}^n$, donc

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(\varphi(E_{i,1}) = \mathbb{K}^n.$$

## 2.3 Dimension infinie

**Exercice 32.** *Liberté par la réduction.* ●○○ Démontrer, à l'aide d'arguments de réduction, que les familles suivantes sont libres dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ :

1. les $(x \mapsto \mathrm{e}^{ax})_{a\in\mathbb{R}}$.
2. les $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. les $(t \mapsto t^a)_{a>0}$, dans $\mathscr{C}^\infty(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

**Exercice 33.** *Mines-Telecom 24.* ●◐○ Soit $E$, espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout réel $x$ non nul, on définit

$$\varphi(f)(x) = \int_0^x \frac{1}{x} f(t)\,dt.$$

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme.

**Correction.**

- déjà, $\varphi$ est à valeurs dans $E$. En effet,
  - $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$,
  - $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$,

  donc $\varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
  De plus, si $F$ est une primitive de $f$,

$$\varphi(f)(x) = \frac{F(x)-F(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} F'(0) = f(0),$$

  donc $\varphi(f)$ est prolongeable par continuité en 0. Donc $\varphi$ est à valeurs dans $E$.
- linéarité. Soient $f$ et $g$ dans $E$, $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{R}$. Alors pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f+\mu g)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \lambda f(t)+\mu g(t)dt\\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \lambda f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^x \mu g(t)dt\\ &= \lambda\varphi(f)(x)+\mu\varphi(g)(x),\end{aligned}$$

  d'où la linéarité.

2. Montrer que $\varphi$ est injectif.

**Correction.** Soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors $\varphi(f)=0$, ce qui implique que pour tout $x\neq 0$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = 0,$$

donc que pour tout $x\neq 0$ (et, en fait pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$),

$$\int_0^x f(t)dt = 0,$$

soit, en dérivant l'expression par rapport à $x$, pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$, $f(x)=0$.
D'où l'injectivité de $\varphi$.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\varphi$.

**Correction.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $\varphi$ ($\lambda\neq 0$ par la question précédente) et $f$ un vecteur propre associé. Alors pour tout $x\neq 0$,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x),$$

Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour tout $x\neq 0$,

$$\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x),$$

soit, en dérivant par rapport à $x$,
$$f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x),$$
d'où, pour $x \neq 0$,
$$f'(x) + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} f(x) = 0.$$
Résolvons cette équation différentielle sur les **intervalles** $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

- sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{\lambda-1}{\lambda x}$ est $x \mapsto \dfrac{\lambda-1}{\lambda}\ln(x)$, donc on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0<$
$$f(x) = Ce^{-\frac{\lambda-1}{\lambda}\ln(x)} = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$
- sur $]-\infty, 0[$, on trouve $f(x) = D(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, où $D \in \mathbb{R}$.

Pour qu'une telle fonction soit prolongeable par continuité en 0, il faut que la puissance de $x$ soit positive, donc $0 < \lambda < 1$.
Réciproquement, si $0 < \lambda < 1$, les vecteurs propres sont de la formes
$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} D|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ C|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ si } x > 0, \end{cases} \end{array} \right.$$
il s'agit donc d'un sous-espace de dimension 2.salu

**Exercice 34.** *Quelques exemples en dimension infinie.* ●◐○

1. Montrer que $S : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ admet tout élément de $\mathbb{K}$ comme valeur propre.
2. Montrer que $D : \left| \begin{array}{c} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto f' \end{array} \right.$ admet tout réel comme valeur propre, et n'admet aucun polynôme annulateur.
3. Montrer que $\Delta : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$ admet 0 pour seule valeur propre.

**Exercice 35.** ●●○ Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et pour $f \in E$,
$$L(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que $L \in \mathscr{L}(E)$ puis que pour tout $f \in E$, $L(f)$ est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer, pour $f \in E$, $L(f)(0)$ et $L(f)'(1)$.
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $L$.

## 2.4 Applications : systèmes différentiels, suites récurrentes

**Exercice 36.** *Suite récurrente linéaire par diagonalisation.* ●○○ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de $a$ la matrice $A$ est-elle diagonalisable ?
2. On définit la suite $(u_n)$ par $u_0$ et $u_1$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$. Exprimer $u_n$ pour tout $n$.

**Exercice 37.** *Un système différentiel, CCINP 24.* ●◐○ Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $(S)$ le système différentiel $X' = AX$.

1. Montrer que $A$ est diagonalisable.

**Correction.** Calculons le polynôme caractéristique de $A$ :

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 0 \\ -2 & x-3 & 0 \\ -1 & 0 & x-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} (x-3) \text{ en développant selon la dernière colonne} \\ &= ((x+2)(x-3)+4)(x-3) \\ &= (x^2-x-2)(x-3) \\ &= (x+1)(x-2)(x-3),\end{aligned}$$

donc $\chi_A$ est scindé à racines simples, donc $A$ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont des droites.

**2.** Expliciter $P$ et $D$ telles que $A = PDP^{-1}$.

**Correction.** Il s'agit de trouver, pour chaque sous-espace propre, un vecteur propre :

- détermination de $E_{-1}(A)$. On sait que

$$A + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $4C_1 - 2C_2 - C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_{-1}(A)$. Donc

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

- ensuite,

$$A - 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 - 2C_2 - C_3 = 0$. Donc

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

- enfin,

$$A - 3\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_3 = 0$, donc

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En posant

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

On sait que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**3.** On note $U = P^{-1}X$. Déterminer le système différentiel vérifié par $U$ et le résoudre. Déterminer alors les solutions de $(S)$.

**Correction.** On note $U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$. Alors, par linéarité de $X \mapsto P^{-1}X$,

$$U'(t) = P^{-1}X'(t) = P^{-1}AX(t) = DP^{-1}X(t) = DU(t),$$

donc

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t) \\ 2v(t) \\ 3w(t) \end{pmatrix},$$

donc on dispose de $(\alpha, \beta, \gamma)$ tels que pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$,

$$u(t) = \alpha e^{-t},\ v(t) = \beta e^{2t},\ w(t) = \gamma e^{3t}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\alpha e^{-t} + \beta e^{2t} \\ -2\alpha e^{-t} - 2\beta e^{2t} \\ -\alpha e^{-t} - \beta e^{2t} + \gamma e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**4.** Soit $(S')$ le système différentiel $X'' = AX$. Déterminer les solutions réelles de ( $S'$ ).

**Correction.** En posant $U$ de la même manière, on a

$$\begin{pmatrix} u''(t) \\ v''(t) \\ w''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u(t) \\ 2v(t) \\ 3w(t) \end{pmatrix},$$

donc on dispose de $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$ tels que

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \sin(t) + \alpha_2 \cos(t) \\ \beta_1 e^{\sqrt{2}t} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ \gamma_1 e^{3t} + \gamma_2 e^{-3t} \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \sin(t) + 4\alpha_2 \cos(t) + \beta_1 e^{\sqrt{2}t} + \beta_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ -2\alpha_1 \sin(t) - 2\alpha_2 \cos(t) - 2\beta_1 e^{\sqrt{2}t} - 2\beta_2 e^{-\sqrt{2}t} \\ -\alpha_1 \sin(t) - \alpha_2 \cos(t) - \beta_1 e^{\sqrt{2}t} - \beta_2 e^{-\sqrt{2}t} + \gamma_1 e^{3t} + \gamma_2 e^{-3t} \end{pmatrix}$$

**5.** Soit $E$ l'ensemble des solutions réelles bornées de $(S')$. Montrer que $E$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

**Correction.** En faisant des équivalents de la solution trouvée en $\pm\infty$, on trouve que $\gamma_1 = \gamma_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$. Ainsi, l'ensemble des solutions bornées de $(S')$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4\alpha_1 \sin(t) + 4\alpha_2 \cos(t) \\ -2\alpha_1 \sin(t) - 2\alpha_2 \cos(t) \\ -\alpha_1 \sin(t) - \alpha_2 \cos(t) \end{pmatrix},\ (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(X_1, X_2),$$

où

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 4\sin(t) \\ -2\sin(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \text{ et } X_2(t) = \begin{pmatrix} 4\cos(t) \\ -2\cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 2.

**Exercice 38.** *Mines-Ponts MP 2026*. ●◐○ Résoudre :

$$\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$$

**Correction.** On écrit le système sous la forme $X' = AX + b$, où $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $b(t) = \begin{pmatrix} te^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$. On commence en diagonalisant $A$. On sait que le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\chi_A(X) = (X-1)^2 - 16 = (X+3)(X-5),$$

donc $A$ est diagonalisable : on dispose de $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. On détermine $P$. Pour ce faire, on remarque que $A + 3\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ et que $C_1 = 2C_2$, ce qui assure que $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \ker(A + 3\mathrm{I}_2)$.
De même, $A - 5\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$. On a $C_1 = -2C_2$, ce qui assure que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \ker(A - 5\mathrm{I}_2)$. Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ convient. On a d'ailleurs $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
On pose ensuite $W = P^{-1}X$, on note $W(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. L'équation $X'(t) = AX(t) + b(t)$ se réécrit $X'(t) = PDP^{-1}X(t) + b(t)$, ou encore

$$P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}b(t),$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3u(t) \\ 5v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{2te^t - e^{-t}}{4} \\ \dfrac{2te^t + e^{-t}}{4} \end{pmatrix}$$

On obtient donc deux équations différentielles linéaires d'ordre 1 complètement découplées :

$$u'(t) + 3u(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{4}e^{-t}$$
$$v'(t) - 5v(t) = \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{-t}$$

On résout ces deux équations de manière classique. Les solutions des équations homogènes sont respectivement $t \mapsto C_1e^{-3t}$ et $t \mapsto C_2e^{5t}$, avec $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.
Pour les solutions particulières, le principe de superposition invite à chercher des solutions de la forme $(at+b)e^t$ et $ce^{-t}$. Après calculs, on obtient :

$$u(t) = C_1e^{-3t} + \left(\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\right)e^t - \frac{1}{8}e^{-t}$$
$$v(t) = C_2e^{5t} - \left(\frac{1}{8}t + \frac{1}{32}\right)e^t - \frac{1}{24}e^{-t}$$

Il ne reste plus qu'à revenir aux variables initiales. Puisque $X = PW$, on a $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) + v(t) \\ -2u(t) + 2v(t) \end{pmatrix}$.
En effectuant les sommes et en regroupant les termes, on conclut :

$$x(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{5t} - \frac{1}{16}e^t - \frac{1}{6}e^{-t}$$
$$y(t) = -2C_1e^{-3t} + 2C_2e^{5t} - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{6}e^{-t}$$

où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$.

**Exercice 39.** *Système différentiel, Mines-Telecom 22*. ●◐○ Diagonaliser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ puis résoudre le système

différentiel $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$

**Correction.** Déjà, on calcule le polynôme caractéristique de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\chi_M(x) &= \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & x-1 & -1 \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \\
&=_{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -2 & x-1 & -1 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} \\
&=_{C_2 \leftarrow C_2 - C_3} \begin{vmatrix} & -1 & \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} \\
&= x \begin{vmatrix} x & -2 \\ -2 & x \end{vmatrix} \text{ en développant selon la dernière ligne.} \\
&= x(x^2 - 4) \\
&= x(x-2)(x+2),
\end{aligned}$$

donc $\chi_M$ est scindé à racines simples, donc $M$ est diagonalisable.
On cherche alors les sous-espaces propres associés :

- pour la valeur propre 0 : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned}
MX = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = \alpha \\ x = -\alpha \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

- pour la valeur propre 2 : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} MX = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = 2x \\ 2x + y + z = 2y \\ -2x - y - z = 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = -\alpha \\ x = -\alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

- pour la valeur propre $-2$ : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} MX = 2X &\Leftrightarrow \begin{cases} y - z = -2x \\ 2x + y + z = -2y \\ -2x - y - z = -2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -2x - y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow_{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}, \\ y = -\alpha \\ x = \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

On sait donc que si $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$MP = PD,\ \text{où}\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel s'écrit $X'(t) = MX(t)$ où $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, i.e.

$$P^{-1}X' = DP^{-1}X.$$

On pose alors

$$Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

Alors $u, v, w$ sont solutions de

$$\begin{cases} u'(t) = 0 \\ v'(t) = 2v(t) \\ w'(t) = -2w(t) \end{cases}$$

Donc on dispose de $(\lambda, \mu, \nu)$ réels tels que

$$\begin{cases} u(t) = \lambda \\ v(t) = \mu \mathrm{e}^{2t} \\ w(t) = \nu \mathrm{e}^{-2t} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\lambda + \mu \mathrm{e}^{2t} + \nu \mathrm{e}^{-2t} \\ \lambda + \mu \mathrm{e}^{2t} - \nu \mathrm{e}^{-2t} \\ \lambda - \mu \mathrm{e}^{2t} + \nu \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Réciproquement, de telles fonctions sont solutions : on ne le vérifie pas pour un tel exercice.

**Exercice 40.** *Centrale PC 2023*. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite réelle vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}.$$

On introduit le polynôme $P_p = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

**1.** Trouver une matrice $A_p$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = A_p U_n.$$

**2.** Montrer que $P_p$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A_p$.

**3.** Écrire une fonction en Python qui détermine les racines complexes de $P_p$ en fonction de $p$.
Appliquer cette fonction pour quelques valeurs de $p$ et émettre des conjectures sur le nombre de racines distinctes de $P_p$ ainsi que les modules de ces racines.

**4.** Si $p \geqslant 2$, vérifier que $P_p$ admet une unique racine dans $]1, 2[$. On la note $x_p$.

**5.** Montrer que toutes les autres racines de $P_p$ ont un module strictement inférieur à $x_p$.

**6.** Montrer que $P_p$ est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples. Qu'en déduit-on sur la matrice $A_p$ ?

**7.** Représenter graphiquement les points $(p, x_p)$ pour $p$ variant de 2 à 20 . Émettre des conjectures quant au comportement de la suite $(x_p)_{p \geqslant 2}$.

**8.** Démontrer ces conjectures.

**Correction.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite réelle vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} u_{n+k}.$$

On introduit le polynôme $P_p = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit le vecteur colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

**1.** Trouver une matrice $A_p$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = A_p U_n.$$

**2.** Montrer que $P_p$ est le polynôme caractéristique de la matrice $A_p$.

**3.** Écrire une fonction en Python qui détermine les racines complexes de $P_p$ en fonction de $p$.
Appliquer cette fonction pour quelques valeurs de $p$ et émettre des conjectures sur le nombre de racines distinctes de $P_p$ ainsi que les modules de ces racines.

**4.** Si $p \geqslant 2$, vérifier que $P_p$ admet une unique racine dans $]1, 2[$. On la note $x_p$.

**5.** Montrer que toutes les autres racines de $P_p$ ont un module strictement inférieur à $x_p$.

**6.** Montrer que $P_p$ est scindé sur $\mathbb{C}$, à racines simples. Qu'en déduit-on sur la matrice $A_p$ ?

**7.** Représenter graphiquement les points $(p, x_p)$ pour $p$ variant de 2 à 20 . Émettre des conjectures quant au comportement de la suite $(x_p)_{p \geqslant 2}$.

**8.** Démontrer ces conjectures.

## 2.5 Équations matricielles, similitude

**Exercice 41.** *CCINP 24*. ◐○○ Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille $n$ et de même polynôme caractéristique $P$.

**1.** Montrer que si $P$ admet n racines distinctes alors $A$ et $B$ sont semblables.

**Correction.** Si $P$ admet $n$ racines distinctes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $P$ est scindé à racines simples et donc $A$ et $B$ sont diagonalisables, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Donc $A$ et $B$ sont toutes deux semblables à $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, donc $A$ et $B$ sont semblables.

**2.** Donner un exemple de deux matrices de même polynôme caractéristique mais qui ne sont pas semblables.

**Correction.** Il suffit de prendre la matrice nulle et une matrice nilpotente qui n'est pas nulle.

**Exercice 42.** ●○○ Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser $A$ et résoudre l'équation $M^2 + M = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Exercice 43.** *CCINP PSI 2025*. ●◐○

**1.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$ ?

**2.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer $\det(A)$. En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

**3.** Désormais $a \geqslant 0$. Déterminer les éléments propres de $A$ puis donner une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

**4.** Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si $M$ est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$. Déterminer les matrices $M$ telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices $B$ telles que $B^2 = A$.

**Exercice 44.** *TPE MP 2015*. ●◐○ Soient $A$ et $B$ deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère l'équation $(E)$ : $AM = MB$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**1.** On suppose qu'il existe une solution $M$ non nulle de $(E)$.

(i) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)M = MP(B)$.

(ii) Montrer que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) \neq \emptyset$.

**2.** On suppose que $\mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) \neq \emptyset$.

(i) Montrer que $\forall X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $XY^\top \neq 0$.

(ii) Prouver l'existence de $M$ vérifiant $(E)$.

**Correction.**

**1.** (i) Par récurrence : $A^k M = MB^k$. Linéarité donne $P(A)M = MP(B)$.

(ii) Avec $P = \chi_A$ : $M\chi_A(B) = 0$. Comme $M \neq 0$, $\chi_A(B)$ n'est pas inversible, donc $B - \alpha \mathrm{I}$ non inversible pour une racine $\alpha$ de $\chi_A$, i.e. $\alpha \in \mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B)$.

**2.** (i) $XY^\top$ a pour coefficient $(i,j)$ : $x_i y_j$. Comme $X, Y \neq 0$, il existe $i_0, j_0$ avec $x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B) = \mathrm{sp}(A) \cap \mathrm{sp}(B^\top)$, $X$ vecteur propre de $A$ pour $\lambda$, $Y$ vecteur propre de $B^\top$ pour $\lambda$. Posons $M = XY^\top \neq 0$. Alors $AM = \lambda XY^\top = \lambda M$ et $MB = X(B^\top Y)^\top = X(\lambda Y)^\top = \lambda M$, donc $AM = MB$.

**Exercice 45.** *Matrices semblables ou non ?*. ●◐○

**1.** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

**2.** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

**Correction.** Corrigé : On trouve

$$\chi_A = \chi_B = (X-1)(X-2)^2$$

Clairement

$$\mathrm{rg}\,(A - 2I_3) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \dim E_2(\,A) = 2 = m_2(\,A)$$

Donc la matrice A est diagonalisable. Ensuite

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes étant échelonnées non nulles, on a $\mathrm{rg}\,(B - 2I_3) \geqslant 2$ (donc égal à 2) et par suite, la matrice B n'est pas diagonalisable et on conclut que les matrices A et B ne sont pas semblables.

**3.** Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

**Correction.** On trouve $\chi_A = \chi_B = X^3 - 3X^2 + 1$.
Posons $f(t) = t^3 - 3t^2 + 1$ pour $t$ réel. Par dérivation, il vient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) = 3t(t-2) \quad \text{et} \quad f(0) = 1 > 0 \quad f(2) = -3 < 0$$

Une étude de variations prouve alors que $f$ admet 3 racines réelles distinctes. Ainsi, les polynômes $\chi_A$ et $\chi_B$ sont scindés à racines simples donc A et B sont diagonalisables semblables à la même matrice diagonale, donc les matrices $A$ et $B$ sont semblables.

**Exercice 46.** *Équations du second degré matricielles*. ●●○

**1.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

**2.** Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Résoudre l'équation $M^2 + M = A$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

**Exercice 47.** *Matrices de carré nul et similitude, Mines-Ponts MP 2017.* ●●◐ Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$

**1.** Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\ker(A) = \mathrm{Im}(A)$ et $\ker(B) = \mathrm{Im}(B)$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables.

**2.** Soit $F = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ A^2 = 0\}$. Montrer que $F$ est une réunion finie de classes de similitude et dénombrer ces classes.

**Correction.** Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$

**1.** Déjà, dans cette question, par le théorème du rang, $n$ est pair. On note $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.
Ensuite, soit $u$ l'endomorphisme canoniquement associé à $A$. Alors si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$, on prend, pour tout $i$ dans $[\![1, p]\!]$, $e_i$ un antécédent de $f_i$ par $u$.
Alors la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est libre (clairement, car si on a $\sum \lambda_i e_i = 0$, on obtient, en composant par $u$, $\sum \lambda_i f_i = 0$, donc $\lambda_i = 0$ pour tout $i$), et $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ est en somme directe avec $\ker(fu$ (par le même argument : si $\sum \lambda_i e_i \in \ker(u)$, alors en composant par $u$, on a $\lambda_i = 0$ pour tout $i$).
Donc $(f_1, \dots, f_n, e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 0_p & \mathrm{I}_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}$. Donc $A$ est semblable à cette matrice, et de même pour $B$.

**2.** On fait de même. Soit $A$ dans $F$, et $r = \mathrm{rg}(A)$. Soit $u$ canoniquement associé à $A$.
Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, $(e_1, \dots, e_r)$ des antécédents des $f_i$. Alors de même que précédemment, $(e_1, \dots, e_r)$ est libre, et est en somme directe avec $\ker(u)$ donc, par théorème du rang, supplémentaire avec $\ker(u)$. Dans une base adaptée à cette décomposition $(f_1, \dots, f_r, \dots, f_{n-r}, e_1, \dots, e_r)$, où $(f_{r+1}, \dots, f_{n-r})$ complète $(f_1, \dots, f_r)$ en une base de $\ker(u)$, la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & \mathrm{I}_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$. Donc $F$ est la réunion de $r+1$ classes de similitudes (si $r \neq r'$, $\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & \mathrm{I}_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} 0_{r',n-r'} & \mathrm{I}_{r'} \\ 0_{n-r',n-r'} & 0_{n-r',r'} \end{pmatrix}$ car ces deux matrices n'ont pas même rang !)

## 2.6 Spectre : rang, trace, existence et localisation des valeurs propres

**Exercice 48.** *CCINP MP 2018.* ●○○ On note $A^T$ la transposée d'une matrice $A$.
Soit $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, toutes deux non nulles. Considérons la matrice $M = X.Y^T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

**1.** Démontrer que le rang de $f$ est égal à 1. En déduire l'image de $f$.

**2.** Démontrer que si $\mathrm{Im}(f) \not\subset \ker(f)$ alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = \mathbb{R}^n$.

**3.** Démontrer que si $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$ alors $M$ est semblable à $E_{1,n}$ où $E_{1,n}$ est la matrice ayant un 1 à la première ligne, $n$-ième colonne et des zéros partout ailleurs.

**4.** En déduire que les assertions suivantes sont équivalentes :
(a) $f$ est diagonalisable
(b) $\mathrm{Im}(f) \not\subset \ker(f)$
(c) $X^T.Y \neq 0$.

**Correction.** On note $A^T$ la transposée d'une matrice $A$.
Soit $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, toutes deux non nulles. Considérons la matrice $M = X.Y^T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

**1.** Si on écrit $Y^T = (y_1 \ \cdots \ y_n)$, alors les colonnes de la matrice $M$ sont $y_1X, \dots, y_nX$, i.e. les colonnes sont toutes proportionnelles. Donc $\boxed{\mathrm{rg}(M) \leqslant 1}$.
Mais $X$ et $Y$ sont non nuls, donc on dispose de $j$ tel que $y_j \neq 0$, et donc $y_jX \neq 0$, donc $M \neq 0$ donc $\boxed{\mathrm{rg}(M) \geqslant 1}$.
Donc $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 1.}$
On remarque que si $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $MU = XY^TU = (Y^TU)X$, avec $Y^TU \in \mathbb{R}$, donc $MU \in \mathrm{Vect}(X)$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{rg}(X)$, donc, par égalité de dimensions, $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X)}$.

**2.** Comme par le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$, il suffit de montrer que si $\mathrm{Im}(f) \not\subset \ker(f)$,

alors $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f) = \{0\}$.
Soit alors $U$ dans $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(f)$. Alors $U \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X)$, i.e. $U = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Mais $U \in \ker(f)$, donc $f(U) = 0$, donc $\lambda f(X) = 0$. Mais $X \notin \ker(f)$ car sinon on aurai $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. DOnc $\lambda = 0$, donc $U = 0$.
Donc la somme $\mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ est directe, donc, comme $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f)) = \dim(E)$, $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.
**Autre argument.** $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(X)$, et $X \notin \ker(f)$. Or, comme $f$ est de rang 1, $\ker(f)$ est un hyperplan. Mais $X \notin \ker(f)$ donc $\ker(f) \oplus \mathrm{Vect}(X) = \mathbb{R}^n$.

**3.** Si $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, on prend $X$, base de $\mathrm{Im}(f)$, que l'on complète en $(X, Y_2, \dots, Y_{n-1})$ base de $\ker(f)$. On prend enfin un antécédent de $X$ par $f$, $W$, qui n'est donc pas dans $\ker(f)$.
Alors dans la base $(X, Y_2, \dots, Y_{n-1}, W)$, la matrice a la forme désirée.

**4.** On montre par implications circulaires :

- si $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$, $f$ est nilpotente, donc n'a que 0 comme valeur propre, donc n'est diagonalisable que si elle est nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc $f$ n'est pas diagonalisable. D'où, par contraposée, la première implication.
- si $\mathrm{Im}(f) \not\subset \ker(f)$, alors $f(X) \neq 0$, donc $(Y^T X)X \neq 0$, donc, comme $X \neq 0$ et que $Y^T X \in \mathbb{R}$, $Y^T X \neq 0$, i.e., en passant à la transposée, $X^T Y \neq 0$.
- si $X^T.Y \neq 0$, alors $f(X) = (X^T.Y)X$, donc $(X^T.Y)$ est une valeur propre de $f$, non nulle, dont le sous-espace propre est de dimension $\geqslant 1$. Comme $\dim(\ker(f)) = n - 1$, on a décomposé l'espace en deux sous-espaces propres, donc $f$ est diagonalisable.

**Exercice 49.** *Endomorphismes simples.* ●◐○ Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geqslant 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que E est le seul sev non nul stable par $u$.

**1.** L'endomorphisme $u$ possède-t-il des valeurs propres ?

**2.** Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $\mathscr{L}_x = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de $E$.

**3.** Déterminer $\mathrm{mat}_{\mathscr{L}_x} u$. Cette matrice dépend-elle du choix de $x \in E \setminus \{0_E\}$ ?

**Exercice 50.** *Réduction d'une matrice de rang 1.* ●●○ Soit $A$ une matrice de rang 1.

**1.** Démontrer que $\chi_A = X^{n-1}(X - \mathrm{Tr}(A))$.

**2.** Démontrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

**Exercice 51.** *Mines-Ponts 24.* ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 2, \mathrm{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0_n$. Montrer que $A$ est diagonalisable.

**Correction.** On sait que $A$ possède 0 comme valeur propre, et que $E_0(A)$ est de dimension $n - 2$.
Le polynôme caractéristique de $A$ s'écrit donc $\chi_A(X) = X^{n-2}(X - a)(X - b)$ avec $a$ et $b$ à déterminer.
Si on avait $a = b = 0$, comme, par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$, on aurait $A^n = 0$.
Donc $a$ ou $b$ est non nul. Mais comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $0 + 0 + \dots + 0 + a + b = 0$ donc $b = -a$. Donc $a$ **et** $b$ sont non nuls et sont distincts.
Donc $a$ et $b$ sont deux valeurs propres distinctes de $A$, et leurs espaces propres associés sont des droites. Donc, comme $n - 2 + 1 + 1 = n$, on en déduit que $A$ est diagonalisable.

**Exercice 52.** *Mines-Ponts 24, réduction et équation séculière.* ●●○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $0 < a_1 < \dots < a_n$ tel que la $i^{\text{ième}}$ ligne de $A$ est :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & 0 & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

**1.** Montrer que $\lambda \in \mathrm{sp}(A) \iff \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1$.

**Correction.** Calculons le polynôme caractéristique de $A$. Soit $x \in \mathbb{K}$. Alors

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & x & -a_3 & \cdots & -a_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_1 & \cdots & \cdots & x & -a_n \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

On fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_n$ pour tout $i$ et on obtient

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x+a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ 0 & x+a_2 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x+a_{n-1} & -a_n - x \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & x \end{vmatrix}$$

On appelle ce déterminant $D(a_1, \ldots, a_n)$. Un développement selon la première colonne assure que

$$\begin{aligned} D(a_1, \ldots, a_n) &= (x+a_1)D(a_2, \ldots, a_n) + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ x+a_2 & 0 & \cdots & -a_n - x \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & x+a_{n-1} & -a_n - x \end{vmatrix} \\ &= (x+a_1)D(a_2, \ldots, a_n) + (-1)^n a_1 \times (-1)^{n-1+1}(-a_n - x) \times \prod_{k=2}^{n-1}(x+a_k) \\ &= (x+a_1)D(a_2, \ldots, a_n) - a_1 \prod_{k=2}^{n}(x+a_k) \\ &= (x+a_1)(x+a_2)D(a_3, \ldots, a_n) - a_2(x+a_1)\prod_{k=3}^{n}(x+a_k) - a_1\prod_{k=2}^{n}(x+a_k) \\ &= \ldots \\ &= x\prod_{k=1}^{n-1}(x+a_k) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \prod_{k\neq i}(x+a_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(x+a_k) - \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k\neq i}(x+a_k) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \chi_A(x) = 0 &\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}(x+a_k) - \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k\neq i}(x+a_k) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k\neq i}(x+a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(x+a_k)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + x} = 0, \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'équation demandée.

**2.** En déduire que $A$ est diagonalisable.

**Correction.** On considère la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i + x}.$$

Alors $f$ est définie sur

$$]-\infty, -a_n[ \cup ]-a_n, -a_{n-1}[ \cup \cdots \cup ]-a_2, -a_1[ \cup ]-a_1, +\infty[.$$

Elle y est dérivable de dérivée

$$f' : x \mapsto -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(a_i + x)}$$

Comme tous les $a_i$ sont strictement positifs, $f'$ est strictement négative, donc est strictement décroissante sur chaque intervalle sur lequel elle est définie. En particulier, sur $]-a_{i+1}, -a_i[$,

- $f$ est strictement décroissante,
- $f(x) \underset{x\to -a_{i+1}^+}{\longrightarrow} +\infty$,
- $f(x) \underset{x\to -a_i^-}{\longrightarrow} -\infty$,

donc, par le théorème des valeurs intermédiaires (et sa version strictement monotone), $f$ prend la valeur 1 en exactement un point sur $]-a_{i+1}, -a_i[$, donc $A$ admet exactement une valeur propre dans cet intervalle. Ceci nous donne déjà $n-1$ valeurs propres de $A$.
Enfin, sur $]-a_1, +\infty[$,

- $f$ est strictement décroissante,
- $f(x) \underset{x\to -a_1^+}{\longrightarrow} +\infty$,
- $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc, par le théorème des valeurs intermédiaires (et sa version strictement monotone), $f$ prend la valeur 1 en exactement un point sur $]-a_1, +\infty[$.
On a donc trouvé $n$ valeurs propres distinctes pour $f$, donc $f$ est diagonalisable.

**Exercice 53.** *Condition de nilpotence ?*. ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(A^{n-1}) = 0$. Montrer que $A$ est nilpotente ou diagonalisable.

**Exercice 54.** *Centrale 22*. ●●◐ On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients sont positifs et vérifient : $\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} = 1$. Elle est dite *stochastique stricte* si, de plus, tous ses coefficients sont strictement positifs.

**1.** Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par multiplication.

**Correction.** Soient $M$ et $N$ deux matrices stochastiques. Soit $j$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}[MN]_{ij} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[M]_{ik}[N]_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}[M]_{ik}\sum_{j=1}^{n}[N]_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}[M]_{ik}\times 1\\ &= 1,\end{aligned}$$

donc $MN$ est une matrice stochastique.

**2.** Montrer que 1 est valeur propre de toute matrice stochastique.

**Correction.** Soit $U$ le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Alors

$$[MU]_i, 1 = \sum_{k=1}^{n}[M]_{ik}[U]_{k,1} = \sum_{k=1}^{n}[M]_{ik} = 1,$$

donc $MU = U$, donc $U$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

**3.** Montrer que toute valeur propre d'une matrice stochastique est de module inférieur ou égal à 1.

**Correction.** Soit $M$ une matrice stochastique. Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de $M$, $V$ un vecteur propre associé. Alors $MV = \lambda V$, et pour tout $i$, en notant $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$,

$$[MV]_i = \sum_{k=1}^{n}[M]_{ik}v_k,$$

donc

$$\lambda v_i = \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} v_k.$$

On prend en particulier $i$ tel que $|v_i| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |v_k|$, on a

$$\begin{aligned} |\lambda|.|v_i| &= \left|\sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} v_k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} |v_k| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} |v_i| = |v_i|. \end{aligned}$$

Mais $|v_i| \neq 0$ car $V \neq 0_{n,1}$, donc $|\lambda| \leqslant 1$.

**4.** Montrer que si $X$ est propre pour une matrice stochastique stricte, pour une valeur propre de module 1, alors le vecteur dont les coordonnées sont les modules de celles de $X$ est propre pour 1 .

**Correction.** Soit $X = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour $\lambda$, une valeur propre de module 1. Soit $i$ tel que $|v_i|$ soit maximal. Avec le même raisonnement que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} |v_i| = |\lambda|.|v_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} v_k\right| \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} |v_k| \\ \leqslant \sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} |v_i| = |v_i|, \end{aligned}$$

donc il y a égalité dans toutes les inégalités, donc

$$\sum_{k=1}^{n} [M]_{ik} \big(|v_i| - |v_k|\big) = 0.$$

C'est une somme de termes positifs, et $[M]_{ik} > 0$ pour tout $k$ : donc $|v_k| = |v_i|$ pour tout $k$. Ainsi $\begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_n| \end{pmatrix} = |v_i|\, U$ est vecteur propre de $M$ pour la valeur propre 1.

**5.** On rappelle qu'une matrice $C = (c_{ij})$ est dite *à diagonale strictement dominante* lorsque $|c_{ii}| > \sum_{j\neq i} |c_{ij}|$ pour tout $i$, et qu'une telle matrice est inversible. Montrer que si $M$ est stochastique stricte, alors $\ker(M - \mathrm{I}_n)$ est de dimension 1.

**Correction.** Soit $B = M - \mathrm{I}_n$ et soit $C$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de $B$ en ôtant la dernière ligne et la dernière colonne :

$$C = \begin{pmatrix} m_{11}-1 & m_{12} & \dots & m_{1,n-1} \\ m_{21} & m_{22}-1 & \dots & m_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n-1,1} & m_{n-1,2} & \dots & m_{n-1,n-1}-1 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $C$ est à diagonale strictement dominante. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $0 < m_{ii} < 1$ (les coefficients

sont strictement positifs et de somme 1 sur une ligne, avec $n \geqslant 2$), on a $|c_{ii}| = 1 - m_{ii} = \sum_{j \neq i} m_{ij}$, la somme portant sur $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}$. En isolant le terme $m_{in}$, qui est strictement positif,

$$|c_{ii}| = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \neq i}} m_{ij} + m_{in} > \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \neq i}} m_{ij} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \neq i}} |c_{ij}|.$$

Donc $C$ est à diagonale strictement dominante, donc inversible : $B$ possède une sous-matrice carrée inversible d'ordre $n-1$, donc $\mathrm{rg}(B) \geqslant n-1$ et $\dim\ker(B) \leqslant 1$. Or 1 est valeur propre de $M$ d'après la question 2, donc $\ker(B) \neq \{0\}$ et finalement $\dim\ker(M - \mathrm{I}_n) = 1$.

**6.** Montrer que les valeurs propres autres que 1 d'une matrice stochastique stricte sont de module strictement inférieur à 1.

**Correction.** Soient $M$ stochastique stricte et $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$. Montrons que $B = M - \lambda \mathrm{I}_n = (b_{ij})$ est à diagonale strictement dominante :

$$|b_{ii}| = |m_{ii} - \lambda| > \big||m_{ii}| - |\lambda|\big| = 1 - m_{ii} = \sum_{j \neq i} m_{ij} = \sum_{j \neq i} |b_{ij}|.$$

L'inégalité est stricte car l'égalité $\big||u| - |v|\big| = |u - v|$ n'a lieu que si $u$ et $v$ sont positivement colinéaires, ce qui n'est pas le cas ici puisque $\lambda \notin \mathbb{R}_+$. La matrice $B$ est donc inversible et $\lambda$ n'est pas valeur propre de $M$.

**7.** Soit $M$ stochastique et $\lambda$ une valeur propre de $M$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $|\lambda - m_{ii}| \leqslant 1 - m_{ii}$. Qu'en déduit-on sur la localisation du spectre de $M$ ?

**Correction.** Par contraposition, c'est toujours le même raisonnement : si on avait $|\lambda - m_{ii}| > 1 - m_{ii}$ pour tout $i$, la matrice $M - \lambda \mathrm{I}_n$ serait à diagonale strictement dominante, donc inversible, et $\lambda$ ne serait pas valeur propre de $M$.
On obtient ainsi une localisation du spectre : si $M$ est stochastique,

$$\mathrm{Sp}(M) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(m_{ii}, 1 - m_{ii}),$$

où $D$ désigne le disque fermé. *Cette question se généralise à une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque : en posant $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{ii}, r_i)$. Ce sont les disques de Gershgorin.*

**8.** Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de module 1 d'une matrice stochastique $M$, alors $\lambda$ est une racine $m$-ième de l'unité pour un certain $m \leqslant n$.

## 2.7 Commutation et commutant

**Exercice 55.** *Mines-Telecom PSI 24, 25.* ●◐○ Soit $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.
Soit $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto XB - BX$.

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Correction.** Déjà, $f$ est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite, soient $A, A'$ deux matrices, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda A + \mu A') &= (\lambda A + \mu A')B - B(\lambda A + \mu A') \\ &= \lambda AB + \mu A'B - \lambda BA - \mu BA' \\ &= \lambda(AB - BA) + \mu(A'B - B'A) = \lambda f(A) + \mu f(A'), \end{aligned}$$

donc $f$ est linéaire.

**2.** Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f(A^k) = kA^k$.

**Correction.** Démontrons le résultat par récurrence sur $k$ dans $\mathbb{N}^*$.
L'**initialisation** vient du fait que $AB - BA = A$.
Soit maintenant $k$ dans $\mathbb{N}^*$ tel que $f(A^k) = kA^k$, i.e. $A^kB - BA^k = kA^k$.

On remarque alors que l'on a
$$\begin{cases} A^k B - BA^k = kA^k \\ AB - BA = A \end{cases}$$
En multipliant la première ligne par $A$ à **gauche** et la deuxième ligne par $A^k$ à **droite**, on obtient
$$\begin{cases} A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1} \\ ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1} \end{cases}$$
D'où, en sommant les deux lignes, $A^{k+1}B - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$.
D'où l'hérédité, et le résultat par le principe de récurrence.

**3.** En déduire que $A$ est nilpotente.

**Correction.** Si $A$ n'était pas nilpotente, alors on aurait, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $k$ qui serait une valeur propre de $f$. Mais alors $f$ admettrait une infinité de valeurs propres, ce qui est absurde.
Donc on dispose de $k$ dans $\mathbb{N}$ tel que $A^k = 0_n$, i.e. $A$ est nilpotente.

**Exercice 56.** ●◐○ Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Trouver un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que son commutant (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes de $E$ qui commutent avec $f$) est de dimension 5.

**Correction.** Si on prend $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$, et $f$ définie par $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = 0$. *L'idée importante est qu'il y ait deux sous-espaces propres,*

**Exercice 57.** *Endomorphismes stabilisant toutes les droites*. ●●○

**1.** Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ qui commutent. Montrer que tout sous-espace propre de $v$ est stable par $u$.

**2.** Quels sont les endomorphismes de $E$ qui stabilisent toutes les droites vectorielles ?

**3.** On suppose $E$ de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de $E$ qui commutent avec tous les endomorphismes diagonalisables ?

**Exercice 58.** *Commutant d'un nilpotent, d'un trigonalisable*. ●●◐ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On définit le commutant de $f$ par
$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$$

**1.** Justifier que $\mathscr{C}(f)$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$.

**2.** On suppose $f$ nilpotent d'indice $n$. Déterminer $\mathscr{C}(f)$.

**3.** On suppose seulement $f$ trigonalisable. Montrer $\dim \mathscr{C}(f) \geqslant n$.

**Exercice 59.** *Vecteur propre commun sous une relation de commutation*. ●●● Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie tels qu'il existe $a$ et $b$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant
$$u \circ v - v \circ u = au + bv.$$
Montrer que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

**Correction.** Si $a = b = 0$, les endomorphismes $u$ et $v$ commutent et le résultat est classique.
Supposons $a \neq 0$ et $b = 0$. On montre par récurrence que $u^n \circ v - v \circ u^n = n a u^n$ pour tout $n$. Autrement dit, si $u^n \neq 0$, alors $na$ est valeur propre de l'endomorphisme $w \mapsto w \circ v - v \circ w$ de $\mathscr{L}(E)$. Comme cet endomorphisme n'a qu'un nombre fini de valeurs propres, $u$ est nilpotent. On montre alors que $\ker(u)$, qui est non nul, est stable par $v$ : l'endomorphisme induit par $v$ sur $\ker(u)$ admet un vecteur propre, qui est un vecteur propre commun à $u$ (pour la valeur propre 0) et à $v$. Le cas $a = 0$, $b \neq 0$ est symétrique.
Si $a$ et $b$ sont tous deux non nuls, on pose $w = au + bv$ et on calcule $w \circ v - v \circ w = a(u \circ v - v \circ u) = aw$ : on est ramené au cas précédent, appliqué au couple $(w, v)$. Un vecteur propre commun à $w$ et $v$ est alors un vecteur propre commun à $u$ et $v$.

# 3 Aspects algébriques : polynômes annulateurs, sous-espaces caractéristiques

## 3.1 Polynômes annulateurs, polynôme minimal

**Exercice 60.** *CCINP 24*. ●○○ Soient $A$ et $B$ deux matrices, et $P$ un polynôme.

**1.** Montrer que si $P(A) = 0$, alors toute valeur propre de $A$ est racine de $P$.

> **Correction.** C'est une question de cours.

**2.** Soit $U \neq 0$ telle que $AU = UB$. Montrer que $P(A)U = UP(B)$.

> **Correction.** On montre par récurrence sur $n$ que $A^nU = UB^n$.
> L'initialisation, pour $n = 1$, est claire.
> Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^nU = UB^n$. Alors
>
> $$A^{n+1}U = A^nAU = A^nUB = UB^nB = UB^{n+1},$$
>
> d'où l'hérédité et le résultat.
> Ensuite, si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on écrit que
>
> $$P(A)U = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k U = \sum_{k=0}^{n} a_k UB^k = U\sum_{k=0}^{n} a_k B^k = UP(B).$$

**3.** Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

> **Correction.** Si on avait $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$, alors on pourrait appliquer la question précédente à $P = \chi_A$. Alors
>
> $$\chi_A(A)U = U\chi_A(B).$$
>
> Mais, par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. De plus, si on écrit $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, l'hypothèse nous dit que les $\lambda_i$ ne sont pas valeurs propres de $B$. Mais alors
>
> $$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n}(B - \lambda_i \mathrm{I}_n),$$
>
> et pour tout $i$, $B - \lambda_i \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Donc $\chi_A(B)$ est inversible. Ainsi, comme $U\chi_A(B) = 0$, on en déduit que $U = 0$, ce qui est absurde.
> On conclut donc au fait que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \emptyset$.

**Exercice 61.** *CCINP 24.* ●○○ Soit $n \geqslant 2$. On considère $u : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto aM + bM^\top$.

**1.** Montrer que $u$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

> **Correction.** Pour vous !

**2.** Trouver un polynôme annulateur de degré 2 de $u$.

> **Correction.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors
>
> $$\begin{aligned} u^2(M) &= a.u(M) + b.u(M)^\top \\ &= a(aM + bM^\top) + b(aM^\top + bM) \\ &= (a^2 + b^2)M + 2abM^\top \\ &= 2a(aM + bM^\top) + (b^2 - a^2)M \\ &= 2au(M) + (b^2 - a^2)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}(M), \end{aligned}$$
>
> donc $X^2 - 2aX - (b^2 - a^2)$ est annulateur de $u$.

**3.** Trouver les valeurs propres de $u$.

> **Correction.** Par le cours, les racines de $u$ sont parmi les racines du polynôme trouvé précédemment. Or, le discriminant du polynôme est $4a^2 + 4(b^2 - a^2) = 4b^2$, d'où les racines $a + b$ et $a - b$.

**4.** $u$ est-il diagonalisable ?

**Correction.** Si $a+b \neq a-b$, i.e. $b \neq 0$, alors $u$ est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable.
Sinon, $b=0$, donc $u = a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $u$ est diagonalisable.

**Exercice 62.** ●○○ Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^2 = 3u + 3\mathrm{Id}_E$. Déterminer le polynôme minimal de $u$.

**Exercice 63.** ●○○ Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sont-elles diagonalisables ?

**Correction.** Réponses : $\pi_A = X(X-2)(X-4), \pi_B = X(X-4), \pi_C = (X-2)(X-1)^2$ et $\pi_D = (X-1)^3$.

**Exercice 64.** ●○○ Soit $A$ une matrice de rang 1. Déterminer $\pi_A$.

**Exercice 65.** *CCINP 24.* ●◐○ Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $M^3 - 4M = 0$.

1. Démontrer que les valeurs propres de $M$ sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X$.

   **Correction.** C'est une question de cours : $X^3 - 4X$ est un polynôme annulateur de $M$ donc les valeurs propres de $M$ sont des racines de ce polynôme.

2. Caractériser les matrices vérifiant les conditions de l'énoncé.

   **Correction.** Si $M$ est une telle matrice, alors les valeurs propres de $M$ sont à chercher parmi les racines de $X^3 - 4X = X(X-2)(X+2)$. Donc $M$ possède un polynôme annulateur scindé à racines simples, donc $M$ est diagonalisable.
   Comme $\mathrm{Tr}(M) = 0$, les multiplicités de 2 et celle de $-2$ doivent être égales. Ainsi, $M$ peut être semblable à l'une des trois matrices suivantes

   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Réciproquement, toute matrice semblable à l'une de ces trois matrices vérifie les conditions de l'énoncé.

**Exercice 66.** *Mines-Telecom 24.* ●◐○ On s'intéresse aux matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$(*) \quad \begin{cases} M^3 - 4M^2 + 4M = 0 \\ \mathrm{tr}(M) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que si $M$ vérifie (*), alors les valeurs propres de $M$ sont racines du polynôme $P = X^3 - 4X^2 + 4X$.

   **Correction.** C'est une question de cours. Soit $\lambda$ une valeur propre de $M$. Alors on dispose de $U$ non nul tel que $MU = \lambda U$. Alors $(M^3 - 4M^2 + 4M)U = 0$ donc $(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda)U = 0$. Comme $U$ est non nul, nécessairement, $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0$.

2. Exprimer les matrices $M$ vérifiant (*).

   **Correction.** Soit $M$ une matrice vérifiant (*). On factorise le polynôme

   $$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X^2 - 4X + 4) = X(X-2)^2.$$

   Donc les valeurs propres de $M$ sont dans $\{0, 2\}$. Or, $\mathrm{Tr}(M) = 0$, mais $\mathrm{Tr}(M)$ est la somme des valeurs propres (complexes) comptées avec multiplicité. Donc, 2 ne peut pas être valeur propre de $M$.
   Ainsi, la seule valeur propre de $M$ est 0 : $M$ est nilpotente (elle est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ donc est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc est nilpotente). Si $M$ ou $M^2$ est nulle, alors $M$ est nulle car $P(M) = 0$. Sinon, soit $p$ le plus petit entier $\geqslant 3$ tel que $M^p = 0$ (et $M^{p-1} \neq 0_n$). Alors

   $$M^{p-2}P(M) = M^{p+1} - 4M^p + 4M^{p-1} = 0_n,$$

   donc $M^{p-1} = 0_n$, absurde ! Donc $M = 0_n$.

**Exercice 67.** *Polynôme minimal et puissances.* ●◐○ Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver le polynôme minimal de $A$. En déduire que $\mathbb{R}[A] = \text{Vect}\,(\mathrm{I}_n, A)$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer $A^k$ en fonction de $\mathrm{I}_3$ et $A$.
3. Trouver la dimension du commutant de $A$, c'est-à-dire de l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$.

**Exercice 68.** ●●○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = \mathrm{I}_n - A$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ puis établir $\det(A) > 0$.

**Exercice 69.** *Réduction et inverse.* ●●○ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $A^{-1} \in \mathbb{K}[A]$.
2. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ à l'aide de $\chi_A$.

**Exercice 70.** *Dimension multiple de 3 par un annulateur, Mines-Ponts PSI 2016.* ●●○ Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^3 + f^2 - \mathrm{Id}_E = 0$ et $\mathrm{Tr}(f) \in \mathbb{Q}$ . Montrer que $n$ est un multiple de 3.

**Correction.** $f$ est un endomorphisme admettant $x^3 + x^2 - 1$ comme polynôme annulateur. Étudions-le.
La fonction $x \mapsto x^3+x^2-1$. $f'(x) = 3x^2+2x$, elle s'annule en $-\dfrac{2}{3}$ et en 0, et on remarque que $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{23}{27} < 0$ et que $f(0) = -1 < 0$. Donc $f$ ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}$ (faire le tableau de variations !). Donc $f$ admet une racine réelle et deux racines complexes conjuguées, donc $f$ admet trois racines complexes distinctes $\alpha$, $\beta$ et $\overline{\beta}$. Donc $f$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Notons $a$, $b$ et $c$ les multiplicités respectives de $\alpha$, $\beta$ et $\overline{\beta}$.
Comme les deux racines complexes sont conjuguées, leurs multiplicités en tant que valeurs propres sont égales (car par exemple $\mathrm{Tr}(f) \in \mathbb{R}$, donc $b\beta + c\overline{\beta} \in \mathbb{R}$, donc $b = c$). Donc $\mathrm{Tr}(f) = a\alpha + 2b\mathfrak{Re}(\beta)$ Or, $\alpha + 2\mathfrak{Re}(\beta) = -1$ (relations coefficients-racines) donc $2\mathfrak{Re}(\beta) = -1 - \alpha$, donc $\mathrm{Tr}(f) = a\alpha - b - b\alpha = (a-b)\alpha - b$.
On montre alors que $\alpha$ est irrationnel, pour dire que $(a-b)\alpha - b \in Q$ si et seulement si $a = b$. Si $\alpha$ était rationnel, $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux, alors on aurait $\dfrac{p^3}{q^3} + \dfrac{p^2}{q^2} - 1 = 0$, donc $p^2 + p^2q - q^3 = 0$, donc $q$ diviserait $p^2$, ce qui contredirait $p \wedge q = 1$. Donc $\alpha$ n'est pas rationnel.
Donc, nécessairement, $a - b = 0$, donc $a = b = c$, donc $n = a + b + c = 3a$, donc $n$ est un multiple de 3.

## 3.2 Polynômes en u, projecteurs spectraux, commutant

**Exercice 71.** *CCINP 24.* ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n n$ valeurs propres distinctes de $f$.

1. Justifier que $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n \\ \qquad P \mapsto (P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

   **Correction.** Il s'agit d'une question de cours, sur le théorème d'interpolation de Lagrange : cf. votre cours de révisions d'algèbre linéaire !

2. Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h = P(f)$, avec $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $h$ et $f$ commutent.

**Correction.** C'est du cours aussi ! On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned} h \circ P(f) &= f \circ \left( \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f \circ f^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \circ f \\ &= \left( \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \right) \circ f \boxed{= h \circ f.} \end{aligned}$$

Donc $h$ et $f$ commutent.

**3.** Soit $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$.

(a) Montrer que tout sous-espace propre de $f$ est stable par $g$.

**Correction.** C'est encore du cours ! Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$, $x$ dans $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

donc $g(x) \in E_\lambda(f)$.

(b) Quelle est la dimension de chaque sous-espace propre de $f$ ? Montrer que tout vecteur propre de $f$ est vecteur propre de $g$.

**Correction.** Comme $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes, on sait que $f$ est diagonalisable et que chaque sous-espace propre est une droite : en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les $n$ valeurs propres de $f$, on sait que la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f)$ est directe et que

$$n \geqslant \dim \left( \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f) \right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

donc, finalement, $\dim \left( \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f) \right) = n$, donc

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(f),$$

ce qui est le résultat désiré.
Soit maintenant $\lambda$ une valeur propre de $f$, $x$ un vecteur propre associé. Comme $x$ est non nul, on en déduit que $E_\lambda(f) = \mathrm{Vect}(x)$.
Mais, par la question précédente, $g(x) \in \mathrm{Vect}(x)$ donc $g(x) = \mu x$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, donc $x$ est un vecteur propre de $g$.

(c) En déduire qu'il existe une base de vecteurs propres commune à $f$ et $g$.

**Correction.** En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres distinctes de $f$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres associée, on vient de démontrer que $\mathscr{B}$ était une base de $E$ constituée de vecteurs propres de $g$.

(d) En déduire qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.

**Correction.** On vient de démontrer que $f$ et $g$ étaient diagonalisables dans la même base $\mathscr{B}$. Écrivons alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, mais pas nécessairement $\mu_1, \dots, \mu_n$.
Par l'isomorphisme établi dans la question 1, il existe un unique polynôme $P$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i$, $P(\lambda_i) = \mu_i$. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g),$$

donc $P(f) = g$.

**4.** Montrer que l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec $f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ d'une dimension qu'on précisera.

**Correction.** On a vu dans les questions précédentes que pour tout $g$ dans $\mathscr{L}(E)$, on a l'équivalence

$$g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ P(f) = g.$$

Donc, si l'on note $\mathscr{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec $f$, on sait que

$$\mathscr{C}(f) = \{P(f),\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}.$$

Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ car c'est l'image de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par l'application linéaire

$$\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathscr{L}(E) \\ P \mapsto P(f) \end{array} \right. .$$

On a vu que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathscr{C}(f)$. Il nous suffit donc à déterminer le noyau de $\varphi$ pour déterminer la dimension de $\mathscr{C}(f)$.
Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $P(f) = 0$. Donc les valeurs propres de $f$ sont incluses dans les racines de $P$. Comme $f$ possède $n$ valeurs propres distinctes, on en déduit que $P$ possède (au moins) $n$ racines distinctes. Mais $\deg(P) \leqslant n-1$ donc $P$ est nul.
Finalement, $\varphi$ est injective donc, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathscr{C}(f)) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) - \dim(\ker(\varphi)) = n.$$

**Exercice 72.** *Mines-Telecom PSI.* ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable de $E$.
On considère le commutant de $f$, défini par

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E),\ g \circ f = f \circ g\}.$$

Démontrer que

$$g \in \mathscr{C}(f) \Leftrightarrow \text{ Tout sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g.$$

**Correction.** On raisonne par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $g \in \mathscr{C}(f)$, soit $\lambda$ une valeur propre de $f$, et $x \in E_\lambda(f)$. Alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

donc $g(x) \in E_\lambda(f)$ donc $g$ commute avec $f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si tout sous-espace propre de $f$ est stable par $g$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de $f$, associés aux valeurs propres (éventuellement répétées) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors si $i \in [\![1, n]\!]$,

$$g \circ f(e_i) = g(f(e_i)) = g(\lambda_i e_i) = \lambda_i g(e_i).$$

Mais comme $g$ stabilise $E_{\lambda_i}(f)$, $g(e_i) \in E_{\lambda_i}(f)$ donc

$$f \circ g(e_i) = f(g(e_i)) = \lambda_i g(e_i),$$

donc $f$ et $g$ commutent sur une base de $E$ donc sur tout $E$.

**Exercice 73.** *Mines-Télécom MP 2026*. ●◐○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant exactement $n$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

**1.** En supposant dans un premier temps que $A$ est diagonale, montrer que l'algèbre $\mathbb{R}[A]$ des polynômes en $A$ est égale à l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Correction.** Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, pour tout polynôme $P$, $P(A) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$, donc $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans l'ensemble des matrices diagonales. Réciproquement, pour toute matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, l'existence d'un polynôme $P$ interpolateur de Lagrange tel que $P(\lambda_i) = d_i$ (possible car les $\lambda_i$ sont distincts) assure que $D = P(A) \in \mathbb{R}[A]$.

**2.** Revenir au cas général. Montrer qu'il existe des matrices $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p M_i.$$

**Correction.** $A$ est diagonalisable car elle possède $n$ valeurs propres distinctes en dimension $n$. En notant $L_i$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $(\lambda_i)$, on pose $M_i = L_i(A)$. Le polynôme $P(X) = X^p$ se décompose dans la base des polynômes de Lagrange sous la forme $X^p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p L_i(X)$, ce qui donne immédiatement le résultat en évaluant en $A$.

**Exercice 74.** ●●○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres de $u$, $p_1, \dots, p_r$ les projecteurs associés à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$. Montrer que pour tout $i$ dans $[\![1, r]\!]$, $p_i \in \mathbb{K}[u]$.

**Exercice 75.** *Réciproque des projecteurs spectraux, Mines-Ponts MP 2016*. ●●○ Soient $n$ et $p$ dans $\mathbb{N}^*$, $A, B_1, \dots, B_p$ des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $b_1, \dots, b_p$ des nombres complexes distincts. On suppose : $\forall k \in \{0, \dots, p\}$, $A^k = \sum_{i=1}^{p} b_i^k B_i$

**1.** Montrer que, si $1 \leqslant i \leqslant p$, $B_i$ est dans $\mathbb{C}[A]$.

**2.** Montrer que $A$ est diagonalisable.

**3.** Pour $k$ dans $\mathbb{N}$, calculer $A^k$.

**Correction.**

**1.** Les matrices $B_1, \dots, B_p$ sont solutions du système

$$\begin{cases} B_1 + B_2 & + \dots + B_p = \mathrm{I}_n \\ b_1 B_1 + b_2 B_2 & + \dots + b_p B_p = A \\ b_1^2 B_1 + b_2^2 B_2 & + \dots + b_p^2 B_p = A^2 \\ \vdots & \\ b_1^{p-1} B_1 + b_2^{p-1} B_2 & + \dots + b_p^{p-1} B_p = A^{p-1} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de Vandermonde, inversible car les $b_i$ sont deux à deux distincts. Donc il admet des solutions, toutes combinaisons linéaires de $\mathrm{I}_n, \dots, A^{p-1}$, donc polynômes en $B_1, \dots, B_p$. Soyons plus précis : on peut facilement exprimer les polynômes recherchés. Si $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{p-1} X^{p-1}$, alors, en faisant $\alpha_0 L_0 + \alpha_1 L_1 + \dots + \alpha_{p-1} L_{p-1}$, on obtient

$$P(b_1)B_1 + P(b_2)B_2 + \dots + P(b_p)B_p = P(A).$$

Si on choisit $L_1, \dots, L_p$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $b_1, \dots, b_p$, alors en prenant $P = L_i$, on obtient $B_i = L_i(A)$.

**2.** Soit $P = \prod_{i=1}^{p}(X - b_i)$. Alors $P(A) = \sum_{i=1}^{p} P(b_i)B_i = 0$. Donc $P$ est un polynôme annulateur de $A$, avec $p$ racines distinctes, donc $A$ est diagonalisable !

**3.** On a alors, par la proposition précédente, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{i=1}^{p} b_i^n B_i.$$

## 3.3 Lemme des noyaux, sous-espaces caractéristiques

**Exercice 76.** ●○○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u) \in \mathrm{GL}(E)$ si, et seulement si $P \wedge \pi_u = 1$.

**Exercice 77.** *Sous-espaces caractéristiques : exemple concret.* ●○○ Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associée à $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

**1.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\left(f^2\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{id}_E\right)$.

**2.** Donner un élément de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) \setminus \mathrm{Ker}(f)$.

**3.** Démontrer que $M$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**4.** Soit $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tel que $g^2 = f$. Démontrer que $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ est stable par $g$. En déduire qu'un tel $g$ n'existe pas.

**Exercice 78.** ●◐○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$, $P$ et $Q$ deux polynômes premiers entre eux tels que $(PQ)(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Démontrer que $\ker(P(u)) \oplus \mathrm{Im}(P(u)) = E$.

**Correction.** Par le lemme des noyaux, comme $P$ et $Q$ sont premiers entre eux, on sait que $E = \ker(P(u)) \oplus \ker(Q(u))$. Ensuite, par l'égalité $Q(u) \circ P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a immédiatement $\mathrm{Im}(P(u)) \subset \ker(Q(u))$. Enfin, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(P(u))) = \dim(E) - \dim(\ker(P(u))) = \dim(\ker(Q(u)))$, ce qui assure que $\mathrm{Im}(P(u)) = \ker(Q(u))$. Le résultat est ainsi prouvé.

**Exercice 79.** *Quand a-t-on $P(A)$ nilpotente ?.* ●◐○ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres. On note $Q = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)$.

**1.** Démontrer que l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ est nilpotente est $Q\mathbb{C}[X]$.

**Correction.** Analyse. Soit $P$ un tel polynôme. Alors $P(A)^n = 0$, donc $\pi_A$ divise $P^n$. Mais, si on écrit

**2.** Démontrer que $A$ est diagonalisable si et seulement si : $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)$ est nilpotente $\Leftrightarrow P(A) = 0_n$.

## 3.4 Critères de diagonalisabilité

**Exercice 80.** *Centrale 24.* ●●○ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**1.** On suppose que $M^2$ est diagonalisable et M inversible. Montrer que M est diagonalisable.

**Correction.** Comme $M^2$ est diagonalisable, elle est annulée par le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i),$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ est le spectre de $M^2$. Comme $M$ est inversible, $M^2$ aussi, donc 0 n'est pas valeur propre de $M^2$. Donc $\prod_{i=1}^{r}(M^2 - \lambda_i \mathrm{I}_n) = 0_n$, donc le polynôme $\prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i)$ annule $M$. Notons, pour tout $i$, $\delta_i$ une racine

de $\lambda_i$. On sait que comme $\lambda_i \neq 0$, $\delta_i \neq -\delta_i$ et que si $i \neq j$, $\delta_i \neq \pm\delta_j$, donc

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r}(X^2 - \lambda_i) = \prod_{i=1}^{r}(X - \delta_i)(X + \delta_i)$$

est un polynôme scindé à racines simples qui annule $M$. Donc $M$ est diagonalisable.

**2.** On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)$ diagonalisable et $Q'(M)$ inversible. On se propose de montrer que $M$ est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P \circ Q(M) = 0_n$.

**Correction.** Comme $Q(M)$ est diagonalisable, elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples, donc il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(Q(M)) = 0_n$, i.e. $P \circ Q(M) = 0_n$.

(b) Soit $\beta_1, \dots, \beta_k$ les racines de $P$. En considérant les polynômes $(Q(X) - \beta_1), \dots, (Q(X) - \beta_k)$, montrer que toute valeur propre de $M$ est racine simple de $P \circ Q$. Conclure.

**Correction.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $M$. Comme $P \circ Q$ annule $M$, on en déduit que

$$\prod_{i=1}^{k}(Q(\lambda) - \beta_i) = 0,$$

donc on dispose de $j$ tel que $Q(\lambda) = \beta_j$. Ce $j$ est par ailleurs unique car $P$ est scindé à racines simples. Donc la multiplicité de $\lambda$ dans $P \circ Q$ est égale à la multiplicité de $\lambda$ dans $Q(X) - \beta_i$.
Or, $Q'(\lambda) \neq 0$. En effet, $Q'(A)$ est inversible, donc $\lambda$ n'est pas racine de $Q'$ (sinon on aurait $Q$ factorisable par $X - \lambda$ et donc $Q'(A) = (A - \lambda \mathrm{I}_n)B$, non inversible).
Donc $\lambda$ est racine simple de $Q(X) - \beta_j$, donc de $P \circ Q$.
On en déduit que

$$P \circ Q = R \times \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (X - \lambda),$$

où $R$ est un polynôme qui n'admet aucun $\lambda$ de $\mathrm{Sp}(M)$ comme racine. Donc $R(M)$ est inversible. Mais $P \circ Q(M) = 0_n$ donc

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} (M - \lambda \mathrm{I}_n) = 0_n, \text{ donc } M \text{ est diagonalisable.}$$

**Exercice 81.** *Mines-Ponts MP 2026*. ●●○ Soit $E$ un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n$, et $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 2$ tel que $f^k$ est un projecteur. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^k)$.

**Correction.** Déjà, si $f$ est diagonalisable, il est clair que $\mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f)$, d'où le résultat.
Réciproquement, si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^k)$, déjà, comme $\mathrm{Im}(f^k) \subset \mathrm{Im}(f)$, on a, par inclusion et égalité des dimensions, égalité des sev. Ensuite, comme $\ker(f) \subset \ker(f^k)$, par le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(f^k))$, et donc $\ker(f) = \ker(f^k)$.
Comme $\ker(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k) = E$, on en déduit que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
L'induit $g$ de $f$ sur son image est un automorphisme. Il vérifie $g^{2k} = g^k$, donc, par inversibilité de $g$, $g^k = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(f)}$.
Ainsi, $X^k - 1$ annule $g$, et $X^k - 1$ est scindé à racines simples, ce qui assure la diagonalisabilité de $g$, donc de $f$ (car $\ker(f)$ est déjà un espace propre).

**Exercice 82.** ●●◐ Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

**1.** Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, montrer que $u$ est diagonalisable si et seulement si $u^2$ est diagonalisable.

**2.** Dans le cas général, démontrer que si $u^2$ est diagonalisable, alors $u$ est diagonalisable ssi $\ker(u) = \ker(u^2)$.

**Exercice 83.** *Centrale 24*. ●●○ On se donne $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et l'on considère $U = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

**1.** Soit $R \in \mathbf{R}[X]$. Calculer $R(V)$ et $R(U)$.

**Correction.** On note $R(X) = \sum_{k=0}^{d} r_k X^k$. Or, par produit par blocs, on remarque que pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$,

$$V^k = \begin{pmatrix} A^k & 0_n \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}, \text{ donc } R(V) = \sum_{k=0}^{d} r_k V^k = \begin{pmatrix} R(A) & 0_n \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix}.$$

Ensuite, par produit par blocs,

$$U^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 2A^2 \\ 0_n & A^2 \end{pmatrix}, \ U^3 = \begin{pmatrix} A^3 & 3A^3 \\ 0_n & A^3 \end{pmatrix}, \text{ donc (rec. immédiate) } U^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$$

Donc

$$R(U) = \begin{pmatrix} R(A) & \sum_{k=0}^{d} kA^k \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(A) & AR'(A) \\ 0_n & R(A) \end{pmatrix}.$$

**2.** On suppose que $U$ et $V$ sont semblables et que $A$ est diagonalisable.

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $P$ scindé à racines simples vérifiant $AP'(A) = 0_n$.

**Correction.** On sait que $A$ est diagonalisable, donc elle est annulée par un polynôme scindé à racines simples $P$. Donc $P(A) = 0_n$, donc $P(U) = 0_{2n}$. Mais comme on a supposé $U$ et $V$ semblables, on en déduit que $P(V) = 0_{2n}$, d'où $AP'(A) = 0_n$.

(b) Montrer que $A = 0_n$.

**Correction.** Comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de $A$ sont incluses dans les racines du polynôme $P$. On écrit $P(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

Mais si on écrit $P'(X) = \prod_{i=1}^{d-1}(X - \mu_i)$ (avec les $\mu_i$ **éventuellement** complexes ; un peu d'analyse et de théorème de Rolle nous permettent de nous convaincre que les racines de $P'$ sont en fait réelles), on sait, comme les racines de $P$ sont simples, que les racines de $P'$ ne sont pas racines de $P$ donc ne sont pas valeurs propres de $A$. Ainsi, pour tout $i$, $A - \mu_i \mathrm{I}_n$ est inversible, donc

$$P'(A) = \prod_{i=1}^{d-1}(A - \mu_i \mathrm{I}_n) \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Donc, comme $P'(A)$ est inversible et $AP'(A) = 0_n$, on en déduit que $A = 0_n$.

**Exercice 84.** *Réduction d'une matrice par blocs (2).* ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On considère la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix}$.

**1.** Exprimer le déterminant de $M$ en fonction de celui de $A$.

**2.** Démontrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $N = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

**3.** Démontrer que $M$ est diagonalisable si et seulement si $A$ est diagonalisable.

**Exercice 85.** ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$. Démontrer que $A$ est diagonalisable si, et seulement si $B$ est diagonalisable.

## 3.5 Sous-espaces stables

**Exercice 86.** *Nombre fini de sous-espaces stables, Mines-Ponts MP 2026.* ●●○ Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

**1.** On suppose que le polynôme caractéristique de $f$ est scindé, noté :

$$\chi_f = \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{n_k}$$

On pose, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $E_k = \ker(f - \lambda_k \, \mathrm{id}_E)^{n_k}$. Montrer que :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$$

> **Correction.** C'est une question de cours, c'est le lemme de décomposition des noyaux. À savoir s'il fallait le redémontrer ou pas.

**2.** Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $p$ ($\dim V = p$) et soit $u \in \mathcal{L}(V)$ un endomorphisme nilpotent tel que $u^{p-1} \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $V$ telle que :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

> **Correction.** On sait que $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. On montre alors facilement (par récurrence) que $\mathscr{B} = (u^{p-1}(x), u^{p-2}(x), \dots, u(x), x)$ est une famille libre de $V$, de cardinal $p = \dim(V)$ donc $\mathscr{B}$ est une base de $V$. Dans cette base, la matrice de $u$ est exactement la matrice demandée.

(b) En déduire que le nombre de sous-espaces vectoriels de $V$ stables par $u$ est fini.

> **Correction.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $V$ stable par $u$, de dimension $q$. Alors $u_F$, l'induit de $u$ sur $V$, est nilpotent. Donc $u_F^q = 0_{\mathscr{L}(F)}$, donc $F \subset \ker(u^q)$. Mais en représentant la matrice de $u^q$ dans la base précédente, on lit immédiatement que $\ker(u^q) = \mathrm{Vect}(u^{p-1}(x), \dots, u^{p-q}(x))$, donc $\ker(u^q)$ est de dimension $q$. Ainsi, par inclusion et égalité des dimensions, $F = \ker(u^q)$.
> Les seuls sous-espaces stables par $u$ sont donc les $\ker(u^q)$, pour $q$ dans $[\![0, p]\!]$.

**3.** On suppose que pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $\dim E_k = 1$ (chaque $E_k$ est une droite vectorielle).
Montrer que le nombre de sous-espaces vectoriels de $E$ stables par $f$ est fini.

> **Correction.** Déjà, l'hypothèse de la question assure que $f$ est diagonalisable en droites.
> Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$. Alors $f_F$ est aussi diagonalisable (l'induit d'un diagonalisable est diagonalisable), de spectre inclus dans le spectre de $f$. Si $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ est le spectre de $f$ et $\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_q}\}$ est le spectre de $f_F$, alors nécessairement, comme tous les $E_k$ sont de dimension 1, $F = \bigoplus_{\ell=1}^{q} E_{i_\ell}$.
> Donc tous les sous-espaces stables par $F$ sont les sous-espaces de la forme $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} E_i$, où $\mathrm{I} \subset [\![1, n]\!]$. Il y en a donc $2^n$.

**Exercice 87.** *Endomorphismes semi-simples.* ●●○ Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit semi-simple si tout sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$ admet un supplémentaire stable par $u$.
Montrer que $u$ est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

**Exercice 88.** *Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.* ●●◐ Soit $u$ un endomorphisme diagonalisable, $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ ses valeurs propres, $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ les sous-espaces propres associés.

**1.** Démontrer qu'un sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est stable par $u$ si, et seulement s'il existe $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_r}(u)$ tels que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$.

**2.** Si $u$ possède $n$ valeurs propres distinctes, combien possède-t-il de sous-espaces stables ?

**Exercice 89.** *Polynôme minimal et sous-espaces stables.* ●●◐ Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $F$ et $G$ sont des supplémentaires de $E$ stables par $u$. On note $v = u_F$ et $w = u_G$ et $\pi$ le polynôme minimal d'un endomorphisme.

1. Justifier que $\chi_v$ et $\chi_w$ divisent $\chi_u$. Faire de même avec $\pi_v, \pi_w$ et $\pi_u$.
2. Montrer que $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_v, \pi_w)$.

**Exercice 90.** *Hyperplans stables et diagonalisabilité, Mines-Ponts MP 2018.* ●●◐ Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f$ un endomorphisme de $E$. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement s'il existe $n$ hyperplans $H_1, \dots, H_n$ de $E$ stables par $f$ tels que $H_1 \cap \cdots \cap H_n = \{0\}$.

**Correction.** Démontrons-le par double implications :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $f$ est diagonalisable, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres, associée aux valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors pour tout $\mathrm{I} \subset [\![1, n]\!]$, $\text{Vect}(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est clairement stable par $f$ : si $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i e_i$, $f(x) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \alpha_i \lambda_i e_i \in \text{Vect}(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$.

En particulier, si $H_k = \text{Vect}(e_i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}}$, $H_k$ est un hyperplan stable par $f$, et si $x \in \bigcap_{k=1}^{n} H_k$, $x$ a une coordonnée nulle selon chacun des $e_k$ donc est nul.

$\boxed{\Leftarrow}$ S'il existe $n$ hyperplans $H_1, \dots, H_n$ de $E$ stables par $f$ tels que $H_1 \cap \cdots \cap H_n = \{0\}$, montrons que $f$ est diagonalisable.

— $\boxed{\text{Construction d'une famille } (e_1, \dots, e_n) \text{ candidate.}}$ On sait par le cours de sup qu'une intersection de $p$ hyperplans en dimension $n$ est de dimension au moins $n - p$.
Soit alors $k$ dans $[\![1, n]\!]$. On a alors $\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} H_i$ est de dimension au moins 1. Si cet espace était de dimension au moins 2, alors $H_k \cap \bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} H_i$ serait de dimension au moins 1, donc cet espace est de dimension 1.
Donc $\bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} H_i = \text{Vect}(e_k)$ avec $e_k \in E$, non nul. Reste à montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres.

— $\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est constituée de vecteurs propres de } f.}$ Soit $k$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors pour tout $i \neq k$, $e_k \in H_i$. Donc, par stabilité par $f$, pour tout $i \neq k$, $f(e_k) \in H_i$. Donc $f(e_k) \in \bigcap_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} H_i = \text{Vect}(e_k)$, donc $f(e_k)$ est colinéaire à $e_k$, i.e. $e_k$ est un vecteur propre de $f$.

— $\boxed{(e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E.}$ Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$. Supposons qu'il existe $k$ tel que $\alpha_k \neq 0$. Alors

$$e_k = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq k}} \alpha_i e_i,$$

mais pour tout $i \neq k$, $e_i \in H_k$, donc $e_k \in H_k$, absurde ! Donc pour tout $k$, $\alpha_k = 0$, donc $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, de cardinal $n$, donc une base de $E$.

## 3.6 Familles qui commutent

**Exercice 91.** *Perturbation nilpotente.* ●●○ Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $u$, $v$ dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, avec $v$ nilpotent.

1. Montrer que $\chi_{u+v} = \chi_u$. En déduire que $\det(u + v) = \det(u)$.
2. Ce résultat subsiste-t-il si l'on ne suppose plus que $u$ et $v$ commutent ?

**Exercice 92.** *Commutation et codiagonalisation (3).* ●●◐ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ dans laquelle la matrice de chaque $u_i$ est diagonale.

**Exercice 93.** *Cotrigonalisation (cas général).* ●●◐ Soit $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille d'endomorphismes de $E$, de dimension $n$, trigonalisables et commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que pour tout $i$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$ soit triangulaire supérieure.

**Exercice 94.** *Endomorphismes de multiplication à droite, à gauche.* ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $g_A : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \end{array} \right.$ et $d_A : \left| \begin{array}{c} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto MA \end{array} \right.$.

1. Reprendre l'exercice 12, mais avec $d_A$.
2. Démontrer que, si $A$ et $B$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ et $M \mapsto AM + MB$ le sont.
3. ●●● Démontrer que, pour $A$ et $B$ quelconques, si $\varphi : M \mapsto AM + MB$, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A) + \mathrm{Sp}(B)$.

## 3.7 Spectre et puissances

**Exercice 95.** ●●○ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, i.e. qui vérifie :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad m_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1$$

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.
2. Montrer que 1 est valeur propre de $M$.
3. Prouver que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $|\lambda| \leqslant 1$, et qu'en cas d'égalité, $\lambda = 1$ si de plus les coefficients diagonaux de $M$ sont strictement positifs.

**Exercice 96.** *Disques de Gershgörin.* ●●○ Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On dit que $A$ est à diagonale strictement dominante si $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{i,j}|$.
   (a) Démontrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
2. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $D_i(A)$ le disque de $\mathbb{C}$ défini par la condition $|z - a_{i,i}| \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq i} |a_{i,j}|$. Démontrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset D_1(A) \cup \cdots \cup D_n(A)$.

**Exercice 97.** *Convergence des puissances et des moyennes de Cesàro.* ●●● Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite $P$ est un projecteur sur $\ker(A - \mathrm{I}_n)$ qui commute avec $A$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

   **Correction.** Dans le cas où $A$ est diagonalisable, il y a convergence si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset D \cup \{1\}$ où $D = \{z,\ |z| < 1\}$. Dans le cas général, on passe par la décomposition de Dunford : il faut de plus que la partie nilpotente soit nulle sur le sous-espace caractéristique associé à 1.

3. On pose $M_k = \dfrac{1}{k}(\mathrm{I}_n + A + \cdots + A^{k-1})$. Démontrer que si $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite $P$ est un projecteur sur $\ker(A - \mathrm{I}_n)$ qui commute avec $A$.
4. Démontrer que si $(A^k)$ converge, alors $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge aussi. La réciproque est-elle vraie ?

   **Correction.** Non : si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, la suite $(A^k)$ diverge alors que $(M_k)$ converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

   **Correction.** Il faut et il suffit que la suite $(A^k)$ soit bornée, c'est-à-dire que le rayon spectral de $A$ soit inférieur ou égal à 1 et que, pour toute valeur propre de module 1, le sous-espace propre coïncide avec le sous-espace caractéristique.

## 3.8 Groupes finis de matrices

**Exercice 98.** *Centrale MP 24.* ●●◐ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p$ un entier premier impair. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $M$ et $M^{-1}$ sont à coefficients entiers.

1. (a) Rappeler la définition de la comatrice.
   (b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont le déterminant vaut $\pm 1$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = \mathrm{I}_n$ et que $A = \dfrac{1}{p}(M - \mathrm{I}_n)$ soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $M = \mathrm{I}_n$.
3. Déterminer un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

**Correction.**

1. Si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, alors $M^{-1}$ est à coefficients entiers et alors $\det(M)$ et $\det\left(M^{-1}\right)$ sont des entiers inverses l'un de l'autre et donc $\det(M) = \pm 1$. Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, on a $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \mathrm{com}(M)^T = \pm \mathrm{com}(M)^T$ qui est à coefficients entiers car $M$ l'est. D'où le résultat.
2. Comme $X^k - 1$ est un polynôme annulateur de $M$, scindé à racines simples, $M$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donc $A$ également. Soit $\mu$ une valeur propre de $A$, comme $M = pA + I_n$, $p\mu + 1$ est valeur propre de $M$, et donc une racine $k$-ème de l'unité, et en particulier de module 1 . Ainsi, $|p\mu + 1| = 1$ et $|\mu| \leqslant \dfrac{2}{p} < 1$. On écrit donc $A = P \,\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $|\mu_i| < 1$, alors $A^k \xrightarrow[k\to 0]{} 0$. Or, la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est à coefficients matriciels entiers et elle donc est stationnaire. Finalement, $A$ est nilpotente ; étant diagonalisable, on a $A = 0$ et donc $M = I_n$.
3. Soit $G$ un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Le résultat précédent montre que le morphisme $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ donné par la réduction modulo $p$ est injectif. En effet, si $M \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors tous les coefficients de $M - I_n$ sont divisibles par $p$ par définition et donc, la matrice $A := \dfrac{1}{p}(M - I_n)$ est à coefficients entiers. De plus, comme $G$ est d'ordre fini, $M$ est d'ordre fini ; il existe donc bien $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = I_n$. Et la question précédente s'applique.
   Comme $\varphi$ est injectif, on en déduit en particulier que $\mathrm{Card}(G) \leqslant \mathrm{Card}\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)$. Or, il est bien connu que

$$\mathrm{Card}\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right) = (p^n - 1)(p^n - p)\ldots\left(p^n - p^{n-1}\right).$$

   En effet, pour construire une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on la construit colonne par colonne de sorte que la colonne $C_i$ ne soit pas dans l'espace vectoriel engendré par $C_1, \ldots, C_{i-1}$. Pour $i = 1$, on prend $C_1$ une colonne non nulle de $(\mathbb{Z}/p'\mathbb{Z})^n$ : il y a $p^n - 1$ choix. Pour $i = 2$, on prend $C_2$ une colonne qui n'est pas dans $\mathrm{Vect}(C_1) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'où $p^n - p$ choix, etc. L'inégalité précédente étant valable pour tous les nombres premiers impairs $p$, on peut prendre le plus petit d'entre eux 3 et obtenir la majoration

$$\mathrm{Card}(G) \leqslant (3^n - 1)(3^n - 3)\ldots\left(3^n - 3^{n-1}\right).$$

   Remarque : On se demande si cette borne est optimale. Pour $n = 2$, on obtiendrait $\mathrm{Card}(G) \leqslant 48$ et on se demande s'il existe un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 48 . Autrement dit, grâce au morphisme $\varphi$, est-ce que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ ? La réponse est non. En effet, le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ contient un élément d'ordre 8 qui est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ - il s'agit de la matrice compagne du polynôme $X^2 + X - 1$ qui est son polynôme minimal. Alors qu'un exercice classique montre que les éléments d'ordre fini de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ ne peuvent être que d'ordre $1, 2, 3, 4$ ou $6$ . On en déduit donc une meilleure borne pour le cardinal de $G$ qui est le plus grand diviseur strict de 48 :

$$\mathrm{Card}(G) \leqslant 24.$$

   En fait cette borne n'est encore pas optimale. On peut montrer que les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ sont exactement isomorphes à

$$\{1\}, \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \quad D_2, \quad D_3, \quad D_4, \quad D_6$$

   où $D_n$ désigne le groupe diédral d'ordre $2n$, c'est-à-dire le groupe des isométries du $n$-gone régulier. En particulier, on voit que $\mathrm{Card}(G) \leqslant 12$ est la meilleure borne possible.

Le cas général est encore une question ouverte à ma connaissance. La détermination et l'estimation de l'ordre maximal d'un élément d'ordre fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ fait l'objet d'un article de recherche Finite groups of matrices whose entries are integers de J. Kuzmanovich et A. Pavlichenkov Am. Math. Monthly, 2002.

**Exercice 99.** *Centrale MP 2015*. ●●● Soit $G$ un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Si $G$ est fini, montrer que $\forall g \in G,\ \exists N_g \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{N_g} = \mathrm{I}_n$.
2. On considère les deux assertions suivantes :
   (a) $G$ est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (b) $T_n(G) = \{\mathrm{Tr}(g),\ g \in G\}$ est fini et tous les éléments de $G$ sont diagonalisables.

   Montrer que (a) implique (b).
3. Montrer la réciproque (on pourra s'aider de la fonction $f : X \mapsto (\mathrm{Tr}(A_1X), \dots, \mathrm{Tr}(A_pX))$ avec $(A_1, \dots, A_p)$ une base de $\mathrm{Vect}(G)$).

**Correction.**

1. Soit $g \in G$. L'ensemble $\{g^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans $G$ fini, donc par le principe des tiroirs, il existe $a < b$ tels que $g^a = g^b$, donc $g^{b-a} = \mathrm{I}_n$.
2. Supposons (a). $T_n(G)$ est fini car $G$ fini. De plus, si $g \in G$, $g^{N_g} = \mathrm{I}_n$, donc $g$ annule $X^{N_g} - 1$, polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc $g$ est diagonalisable.
3. Supposons (b). Montrons que $G$ est fini. L'image de $f$ est finie car $T_n(G)$ est fini. Montrons que $f$ est injective. Soient $X, Y \in G$ avec $f(X) = f(Y)$. Pour tout $g \in \mathrm{Vect}(G)$, $\mathrm{Tr}(gX) = \mathrm{Tr}(gY)$. Posons $Z = XY^{-1} - \mathrm{I}_n \in \mathrm{Vect}(G)$. Alors pour tout $g \in \mathrm{Vect}(G)$, $\mathrm{Tr}(gZ) = 0$. Comme $Z, Z^2, \dots \in \mathrm{Vect}(G)$, $\mathrm{Tr}(Z^k) = 0$ pour tout $k$. Or $Z$ est combinaison linéaire d'éléments diagonalisables qui commutent (à vérifier), donc $Z$ est diagonalisable, et $\sum \lambda_i^k = 0$ pour tout $k$, donc les $\lambda_i$ sont tous nuls. Donc $Z = 0$ et $X = Y$. Donc $f$ est injective et $G$ est fini.

**Exercice 100.** *Théorème de Kronecker*. ●●●

1. Soit $P$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Existe-t-il une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de polynôme caractéristique $\pm P$ ?

   **Correction.** Oui : la matrice compagnon de $P$ convient, et elle est à coefficients entiers puisque $P$ est unitaire à coefficients entiers.
2. Soit $P$ dans $\mathbb{Z}[X]$ unitaire dont toutes les racines complexes sont de module inférieur ou égal à 1. Montrer que les racines non nulles de $P$ sont des racines de l'unité.

   **Correction.** On considère la matrice compagnon $A$ de $P$, dont les valeurs propres sont les racines de $P$. Quitte à factoriser par une puissance de $X$, on suppose $P(0) \neq 0$ : le produit des racines vaut alors $\pm P(0)$, entier non nul, donc de module $\geqslant 1$. Comme toutes les racines sont de module $\leqslant 1$, elles sont toutes de module exactement 1.
   Les puissances $A^k$ sont à coefficients entiers, et leurs valeurs propres sont de module 1 : après trigonalisation, on voit que la suite $(A^k)$ prend ses valeurs dans un ensemble borné de matrices à coefficients entiers, donc fini. Il existe donc $k < \ell$ avec $A^k = A^\ell$, d'où $A^{\ell-k} = \mathrm{I}_n$ puisque $A$ est inversible : toutes les racines de $P$ sont des racines $(\ell - k)$-ièmes de l'unité.

# Indications

**Ex 5.** **2.b.** On doit trouver une expression avec $B$ et $P'(A)$ en haut à droite.

**Ex 13.** Pour le sens réciproque, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres non nulles de $A$ et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités, on montrera que $m_1, \dots, m_r$ sont solution d'un système linéaire avec une matrice presque de Vandermonde.

**Ex 14.** **1.** Supposer $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
**2.** Calculer $\varphi^{n^2}$ et utiliser la question 1.
**3.** Utiliser que si $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$, alors $\psi : M \mapsto P^{-1}MQ$ est un isomorphisme.

**Ex 22.** Pour les questions 2 et 3, exprimer ces matrices à l'aide de la matrice $J$.

**Ex 23.** Résoudre une équation aux valuers propres $MX = \lambda X$.

**Ex 24.** **2.** Que vaut $\phi(E_{ij})$ ?

**Ex 25.** Remarquer que $\mathscr{D}_n(\theta)$ est un déterminant tridiagonal classique, la récurrence est relativement simple et nous permet de trouver facilement $n$ valeurs de $\theta$ différentes pour lesquelles $D_n(\theta) = 0$.

**Ex 26.** **2.** Remarquer que c'est la matrice d'une symétrieu.

**Ex 28.** **2.** Distinguer $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

**Ex 29.** Écrire $\tau$ dans une bonne base adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{C})$.

**Ex 31.** **1.** Diagonaliser $P$.
**2.** Coréduire $P$ et $Q$.
**3.a.** Calculer $\varphi(E_{i,i})^2$.
**3.c.** Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi(E_{i,1})) = \mathrm{Im}(\varphi(E_{i,i}))$.

**Ex 32.** À chaque fois, remarquer que la famille en question est une famille de vecteurs propres d'un certain endomorphisme.

**Ex 33.** **3.** Faire une équaiton aux valeurs propres et résoudre une équation différentielle.

**Ex 35.** **1.** Découper l'intégrale en deux.
**3.** Résoudre une équation aux valeurs propres, et dériver l'équation obtenue.

**Ex 36.** **2.** Exprimer matriciellement la relation de récurrence et utiliser la matrice diagonalisée.

**Ex 39.** Remarque : on n'a pas besoin de déterminer $P^{-1}$.

**Ex 45.** Regarder déjà si les polynômes caractéristiques sont les mêmes : s'ils sont différents, la conclusion est immédiate. Sinon, regarder les sous-espaces propres : deux matices diagonalisables avec les mêmes valeurs propres (et la même multiplicité) sont semblables.

**Ex 46.** Diagonaliser les matrices, et remarquer qu'une solution $M$ de l'équation commute avec $A$ : elle stabilise les sous-espaces propres de $A$.

**Ex 47.** **1.** Considérer les endomorphismes canoniquement associés à $A$ et $B$ et les écrire simplement dans une bonne base.
**2.** Comme la 1, mais on distingue selon la valeur de $\mathrm{rg}(A)$.

**Ex 49.** **1.** Se rappeler le lien entre valeur propre et droite stable.

**Ex 51.** Analyser les valeurs propres de $A$, et remarquer que $E$ est la somme de trois sous-espaces propres de $A$.

**Ex 52.** **1.** Calculer explicitement le polynôme caractéristique. On trouve $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(x + a_k) - \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k\neq i}(x + a_k)$.

**2.** Étudier la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda + a_i}$.

**Ex 53.** Raisonner comme à l'exercice 13, distinguer le cas $n$ vp distinctes et $r < n$ vp distinctes.

**Ex 54.** **3.** Considérer, pour $V$ un vecteur propre, $i$ tel que $|v_i| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |v_k|$.
**6.** Si $\lambda \neq 1$, montrer que $M - \lambda \mathrm{I}_n$ est à diagonale strictement dominante.
**7.** Raisonner par contraposée et se ramener à une matrice à diagonale strictement dominante.

**Ex 55.** **3.** On montrera que si $A$ n'est nilpotente, $f$ admet une infinité de valeurs propres, alors que $f$ est un endomorphisme en dimension finie.

**Ex 56.** On doit penser au fait que si $f \circ g = g \circ f$, alors $g$ doit stabiliser les sous-espaces propres de $f$.

**Ex 58.** **2.** Utiliser $x_0$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$, et que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$. Décomposer $g(x_0)$ sur cette base.

**3.** Considérer $T$ une matrice triangulaire représentant $f$, et l'endomorphisme $\varphi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \to \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \\ M \mapsto TM - MT \end{array} \right.$ et faire un théorème du rang sur $\varphi$.

**Ex 59.** Commencer avec $a = b = 0$ (déjà fait, commutation et vecteur propre commun), puis $a \neq 0$ et $b = 0$ pour montrer que $u$ est nilpotente et que $v$ stabilise $\ker(u)$. Enfin, sinon, poser $w = au + bv$ et calculer $w \circ v - v \circ w$.

**Ex 60.** C'est quasiment l'exercice 15, en plus simple.

**Ex 61.** La difficulté dans cet exo est le type des objets.

**Ex 64.** On a intérêt à utiliser l'exercice 50.

**Ex 65.** **2.** Remarquer que $M$ est diagonalisable, et regarder toutes les possibilités en termes de valeurs propres.

**Ex 66.** **2.** Remarquer que $M$ doit être nilpotente.

**Ex 70.** On s'intéressera aux valeurs propres de $f$, et à l'irationnalité des solutions de $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

**Ex 73.** **1.** Utiliser l'interpolation de Lagrange.

**2.** Diagonaliser $A$ et utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux valeurs propres de $A$.

**Ex 74.** On aura intérêt à utiliser la famille $(L_1, \dots, L_r)$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

**Ex 78.** On utilisera le lemme des noyaux et on montrera que $\mathrm{Im}(P(u)) = \ker(Q(u))$.

**Ex 79.** **1.** Remarquer que $P^n$ est alors annulateur de $A$.

**2.** Considérer le polynôme $Q$.

**Ex 80.** **1.** Exercice classique !

**2.b.** Remarquer que si $\lambda$ est une valeur propre de $M$, la multiplicité de $\lambda$ dans $P \circ Q$ est égale à la multiplicité de $\lambda$ dans $Q(X) - \beta_i$.

**Ex 81.** Montrer que l'induit de $f$ sur son image est diagonaliable sur $\mathbb{C}$.

**Ex 82.** **1.** On utilisera, pour le sens réciproque, un polynôme annulateur de $u^2$ scindé à racines simples, ne possédant pas 0 comme racine.

**2.** En notant $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ les valeurs propres non nulles de $u^2$, et $F = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u^2)$, on utilise que $E = F \oplus \ker(u^2) = F \oplus \ker(u)$. On démontre alors que $u_F$ (l'induit de $u$ sur $F$) est diagonalisable.

**Ex 83.** Cf. exercice 5, les méthodes sont les mêmes.

**Ex 87.** Deux possibilités : ou bien une récurrence (mais alors, il faut montrer que l'induit d'un semi-simple est semi-simple), ou bien considérer $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

**Ex 88.** **1.** Le sens réciproque est le plus simple. Pour le sens direct, montrer que $F = \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap E_{\lambda_i}(u))$.

**Ex 89.** **1.** Utiliser une représentation matricielle.

**2.** Remarquer que l'ensemble des polynômes annulateurs de $u$ doivent annuler $v$ et $w$.

**Ex 91.** **1.** Cotrigonaliser

**Ex 94.** **2.** Utiliser l'exercice 12 et la codiagonalisation.

**Ex 95.** **3.** On écrira l'équation $MX = \lambda X$, et majorer $|[MX]_i|$.

**Ex 98.** **2.** Montrer que $A$ diagonalisable et nilpotente, en regardant les valeurs propres de $M$ et, donc, celles de $A$.

**Ex 99.** **2.a.** Utiliser que $G$ est fini.

**2.** Le premier point est évident, le deuxième se fait avec un polynôme annulateur.

**3.** Monter que $f$ est d'image finie et est injective.