

DM 01 à rendre le lundi 7 septembre

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules

1. **Bases.** Problème 1 (séries). Temps conseillé : 2h max.
2. **Intermédiaire.** Problèmes 1 et 2 (séries et révisions de sup). Temps conseillé : 4h max.
3. **Plus difficile.** Problèmes 1 et 3 (séries et révisions de sup + dures). Temps conseillé : 5h max.

Problème 1. Séries – BECEAS MP 2023 – Une inégalité entre sommes de séries

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites réelles (indexées par $\mathbb{N}^*$) à termes strictement positifs telles que la série $\sum a_n$ converge. On pose, pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{E}$ et pour tout entier n non nul,

$$h_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

L'objet de l'exercice est de prouver la convergence de la série $\sum h_n$ et de comparer sa somme à celle de la série $\sum a_n$.

1. Un premier exemple

On pose, dans cette question, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

- (a) Montrer que la série $\sum a_n$ converge et déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.
- (b) i. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n .
ii. Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et déterminer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

2. Un second exemple

Soit q un réel de $]0, 1[$. On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = q^{n-1}$.

- (a) Indiquer la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et pour tout entier naturel n non nul, la valeur de h_n .
- (b) Établir la convergence de la série $\sum h_n$ et prouver la majoration : $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2}$.

3. Soit n un entier non nul et soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ deux n -uplets de nombres réels.

(a) Prouver l'égalité :
$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

(b) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

4. Prouver, pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité :
$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{2k^2}.$$

On s'intéressera à la monotonie de la suite de terme général $u_k = \frac{1}{2k^2} - \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}.$

5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un élément de $\mathcal{E}$.

(a) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right).$$

(b) En déduire, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^p h_n \leq 4 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+1)^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k\right).$$

(c) Prouver, pour tout entier naturel p non nul, l'inégalité :
$$\sum_{n=1}^p h_n \leq 2 \sum_{k=1}^p a_k.$$

(d) En déduire la convergence de la série $\sum h_n$ et l'inégalité :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

6. Soit C un réel strictement positif tel que, pour tout élément $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{E}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq C \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

On va montrer que C est au moins égal à 2.

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1 et on rappelle qu'on dispose de l'égalité :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(a) Prouver l'inégalité :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \frac{\pi^2}{6}.$$

(b) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :
$$h_n \geq (\alpha+1) \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}}.$$

(c) Prouver l'égalité :
$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty.$$

(d) Conclure que $C \geq 2$.

7. On suppose qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à termes réels strictement positifs dont la série $\sum a_n$ converge, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n$.

(a) Justifier l'inégalité : $K \geq 1$.

On pourra utiliser le résultat de la question 2.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $g_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$g_n = \begin{cases} \frac{4}{2^n} & \text{si } \exists p \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad n = p^2 \\ \frac{1}{2^n} & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{(g_n)^n}{(g_{n-1})^{n-1}}.$$

i. Calculer a_n pour $n > N^2 + 1$ et en déduire la convergence de la série $\sum a_n$.

ii. Prouver les inégalités : $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq 2N$.

(c) Établir l'égalité : $(g_n)^n = \prod_{k=1}^n a_k$.

(d) Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité $h_n \leq g_n$ et en déduire qu'un tel réel K n'existe pas.

Problème 2. Révisions de sup – Petites Mines 2000

Partie I : Étude de la fonction réciproque de la fonction $\tanh$.

On notera respectivement $\cosh$, $\sinh$ et $\tanh$ les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- Montrer, en étudiant ses variations, que $\tanh$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note artanh (« argument tangente hyperbolique ») sa réciproque.
- Exprimer la dérivée de $\tanh$ en fonction de $\tanh$.
- Démontrer que artanh est impaire.
- Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
- Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.

Partie II : Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle $(E) : x y' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$.

7. – Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.

Partie III : Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :
déterminer les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

- Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
- Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
- Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.
(on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)

11. – Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.
12. – Montrer que $\tanh$ est solution du problème posé.

Dans les questions 13. à 17., on suppose que f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

13. – Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
14. – Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .
15. – En utilisant les résultats des questions 13. et 14., aboutir à une contradiction.
16. – Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0) = 1$ » est remplacée par l'hypothèse « $f(0) = -1$ » ?
17. – Conclusion ?

Dans les questions 18. à 22., on suppose que f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$.

18. – En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions 13. à 17., montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq -1$ et $f(x) \neq 1$.

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \operatorname{artanh}(f(x))$.

19. – Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$.
20. – Montrer que g est dérivable en zéro.

21. – Soit $x \in \mathbb{R}^*$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

22. – En déduire que g est linéaire.
23. – Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

Problème 3. Révisions de sup – Centrale MP 2000

Définitions

Si f est une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on notera, pour $p \geq 1$, $f^p = f \circ f \dots \circ f$ p fois, fonction définie sur le sous-domaine de Ω défini par $\{x \in \Omega \mid f(x) \in \Omega, f^2(x) \in \Omega, \dots, f^{p-1}(x) \in \Omega\}$. On appelle p -cycle de f un ensemble de p éléments $\{x_0, \dots, x_{p-1}\} \subset \Omega$ tel que $f(x_0) = x_1, \dots, f(x_{p-2}) = x_{p-1}, f(x_{p-1}) = x_0$. On appelle multiplicateur du cycle la quantité

$$(f^p)'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{p-1}).$$

Un point $x \in \Omega$ est dit p -périodique s'il est élément d'un p -cycle ; un point 1-périodique est encore appelé point fixe. Le multiplicateur d'un point périodique x_0 est alors le multiplicateur du cycle le contenant, qui n'est autre que le multiplicateur de x_0 comme point fixe de f^p . Le cycle (ou le point p -périodique) sera dit attractif, super attractif, indifférent ou répulsif suivant que la valeur absolue de son multiplicateur est strictement inférieure à 1, égale à 0, égale à 1 ou strictement supérieure à 1.

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale non constante et $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$. Si $x \in \Omega$, on définit $N_P(x)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P avec l'axe des x .

I.A - Montrer que :

$$\forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

I.B -

I.B.1) Si $x \in \Omega$, calculer $N'_P(x)$.

I.B.2) Soit a un nombre réel.

Montrer que si $P(a) = 0$, $P'(a) \neq 0$ alors a est un point fixe super attractif de N_P .

Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P montrer que N_P peut se prolonger par continuité en a qui devient un point fixe attractif de N_P de multiplicateur $1 - 1/p$.

Si $x \in \Omega$, on dira que la suite de Newton de x par P est bien définie si l'on peut définir une suite (x_n) telle que $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega \text{ et } x_{n+1} = N_P(x_n).$$

Dans ce cas, cette suite (x_n) sera la suite de Newton de x par P .

I.C - Montrer que si la suite de Newton de x par P est bien définie et converge vers $a \in \mathbb{R}$ alors $P(a) = 0$.

I.D - Soit réciproquement $a \in \mathbb{R}$ un zéro de P .

I.D.1) Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que si $|y - a| < \varepsilon$ alors la suite de Newton de y par P est bien définie et converge vers a .

On appelle $I(a)$ le plus grand intervalle contenant a et formé de points dont la suite de Newton par P converge vers a .

I.D.2) Montrer que c'est un intervalle ouvert ; on l'appelle le bassin immédiat de a .

I.E -

I.E.1) On suppose que P a au moins deux racines réelles. Soit a^- le plus petit zéro de P ; on suppose que ξ , le plus petit zéro de P' vérifie $\xi > a^-$ et que P'' ne s'annule pas sur $] -\infty, \xi [$. Montrer que le bassin immédiat de a^- est égal à $] -\infty, \xi [$.

I.E.2) On suppose que le bassin immédiat du zéro a de P est de la forme $] \alpha, \beta [, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Montrer successivement que $N_P([\alpha, \beta]) \subset] \alpha, \beta [$, que $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$, et enfin que $N_P(\alpha) = \beta$, $N_P(\beta) = \alpha$. Ce 2-cycle peut-il être attractif ?

I.F - Les hypothèses de la question I.E.2 étant toujours vérifiées, montrer que le bassin immédiat de a contient un zéro de P'' .

I.G - On suppose P de degré $d \geq 2$ possédant d zéros distincts. Montrer que N_P attire tout zéro de P'' vers un zéro de P .

Partie II - Étude algébrique

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré d (on note $d^\circ(P) = d$). Dans cette partie la dérivation est à prendre au sens de la dérivation formelle des polynômes ou plus généralement des fractions rationnelles et N_P est la fraction rationnelle

$$N_P(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}.$$

II.A - Montrer que si P a d zéros distincts alors $R = N_P$ vérifie

$$(*) \quad \begin{cases} R = \frac{Q}{S}, Q, S \in \mathbb{C}[X], \text{PGCD}(Q, S) = 1, d^\circ(Q) = d, d^\circ(S) = d - 1 \\ \text{et } R \text{ possède } d \text{ points fixes super attractifs} \end{cases}$$

(Un point fixe super attractif de R est un point $z \in \mathbb{C}$ tel que $R(z) = z$, $R'(z) = 0$).

II.B - Soit réciproquement R une fraction rationnelle vérifiant (*). Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré d , possédant d zéros distincts, tel que $R = N_P$.

II.C - Deux fractions rationnelles f, g sont dites semblables s'il existe une similitude $T(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) telle que si D, D' désignent les domaines de définition de f, g (c'est-à-dire le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des pôles) alors $T(D) = D'$ et

$$\forall z \in D', f(z) = T^{-1} \circ g \circ T(z).$$

Si $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ et si $T(z) = az + b$ montrer que $N_{P \circ T}$ est semblable à N_P .

II.D - Déterminer N_P pour $P(X) = X^2$, $P(X) = X^2 - 1$: montrer que si P est un polynôme de degré 2 alors N_P est semblable à $z \mapsto \frac{z}{2}$ ou bien à $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$.

II.E - Pour $m \in \mathbb{C}$ on définit

$$P_m(z) = z^3 + (m-1)z - m = (z-1)(z^2 + z + m), N_m(z) = N_{P_m}(z)$$

Montrer que si P est un polynôme de degré 3 alors soit N_P est semblable à $z \mapsto \frac{2z}{3}$ soit il existe $m \in \mathbb{C}$ tel que N_P est semblable à N_m .

II.F - Quel est l'intérêt des résultats des deux questions précédentes pour l'étude des suites de Newton par les polynômes de degré ≤ 3 ?