

DM 01
corrigé**Problème 1. Séries – BECEAS MP 2023 – Une inégalité entre sommes de séries**

Corrigé de Catherine Aymard pour l'UPS. Une remarque sur la question 2.(b), où il est écrit directement que $\sum_{k \geq 1} kq^{k-1} =$

$\frac{1}{(1-q)^2}$. Démontrons-le :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k \geq 1} kq^{k-1} &= \sum_{k \geq 1} \sum_{i=1}^k q^{k-1} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k \geq i} q^{k-1} \text{ par sommation par paquets, car tous les termes sont positifs.} \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} \frac{1}{1-q} \\
 &= \frac{1}{1-q} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}.
 \end{aligned}$$

1. (a) $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ donc par comparaison à une série de Riemann $\sum a_n$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ donc } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.$$

(b) i. $\frac{1}{a_n} = n(n+1) = n^2 + n$.

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \left[\frac{2n+1}{3} + 1 \right] \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } h_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)} = 3a_{n+1}.$$

ii. Donc $\sum h_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n = 3 \sum_{n=2}^{+\infty} a_n = 3(1 - a_1) = \frac{3}{2}$.

2. (a) $\sum a_n$ est une série géométrique de raison $q \in]0, 1[$ donc $\sum a_n$ converge

$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-q}. \text{ De plus, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1-q^{-n}}{1-q^{-1}}.$$

$$\text{Donc } h_n = n \times \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-n}} \sim n q^{n-1} (1-q).$$

$$\frac{h_{n+1}}{h_n} \rightarrow q < 1, \text{ donc } \sum h_n \text{ converge (critère de D'Alembert).}$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}^*, h_n \leq n q^{n-1} \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, q^n \leq q, \text{ et donc } \frac{1-q}{1-q^n} \leq 1.$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^{+\infty} h_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_i x_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j y_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j y_i y_j \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) &= - \sum_{i \neq j} x_i^2 y_j^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j y_i y_j \\ &= \sum_{i \neq j} x_i y_i x_j y_j - (x_i y_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} x_i y_i x_j y_j - \sum_{i < j} (x_i y_i)^2 - \sum_{i < j} (x_j y_j)^2 \\ &= - \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2. \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Comme } \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0, \text{ on déduit que } \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \times \sum_{j=1}^n y_j^2.$$

D'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. Soit $u_k = -\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} + \frac{1}{2k^2}$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u_k &= \frac{1}{2(k+1)^2} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k(k+1)^2} \\ &= -\frac{1}{2k^2(1+k)^2} < 0. \end{aligned}$$

Donc (u_k) est strictement décroissante.

Or (u_k) converge vers 0. Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k \geq 0$, d'où le résultat.

5. (a)
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \frac{k\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k}}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n k^2 a_k \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \quad \text{par Cauchy-Schwarz}$$

(b) L'inégalité précédente montre que $h_n \leq 4 \times \frac{1}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^n k^2 a_k$.

En sommant ces inégalités pour $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on conclut.

(c)
$$\begin{aligned} 4 \sum_{n=1}^p \frac{1}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^n k^2 a_k &= 4 \sum_{1 \leq k \leq n \leq p} \frac{k^2 a_k}{n(n+1)^2} \\ &= 4 \sum_{k=1}^p k^2 a_k \sum_{n=k}^p \frac{1}{n(n+1)^2} \\ &\leq 4 \sum_{k=1}^p k^2 a_k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^p a_k \quad \text{par (4).} \end{aligned}$$

(d) Ainsi $\sum_{n=1}^p h_n \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

$\sum h_n$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées.

Elle converge donc et $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

6. (a)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}.
 \end{aligned}$$

Or $\alpha > 1$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ainsi, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{\pi^2}{6}$.

(b) $h_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^n k^{\alpha}$.

Par comparaison avec une intégrale, $k^{\alpha} \leq \int_k^{k+1} t^{\alpha} dt$.

Donc $\sum_{k=1}^n k^{\alpha} \leq \int_1^{n+1} t^{\alpha} dt \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Ainsi $h_n \geq \frac{(\alpha+1)n}{(n+1)^{\alpha+1}}$.

(c) $x \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est décroissante sur $]1, +\infty[$. Elle admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en 1^+ .

$\forall x \in]1, +\infty[$, et $\forall p \geq 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^x}$.

Donc, en passant à la limite quand $x \rightarrow +1$, $l \geq \sum_{n=1}^p \frac{1}{n}$ pour tout p .

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc $l = +\infty$.

(d) Ainsi $\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \geq (\alpha+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^{\alpha+1}} \geq (\alpha+1) \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{\pi^2}{6} \right)$.

Donc $C \geq \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} h_n}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}} \geq (\alpha+1) \left[1 - \frac{\pi^2}{6 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha}} \right]$.

En faisant tendre α vers 1, on trouve $C \geq 2$.

7. (a) Pour $q \in]0, 1[$ et $a_n = q^{n-1}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-q} \times \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq \frac{K}{1-q} \sum_{n=1}^{+\infty} h_n.$$

Donc $K \geq 1 - q$ pour tout $q \in]0, 1[$. Ainsi, quand $q \rightarrow 0$, $K \geq 1$.

(b) i. Si $n > N^2 + 1$, $\forall p \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $p^2 \neq n$ et $p^2 \neq n - 1$.

$$\text{Donc, } g_n = \frac{1}{2^n}, \quad g_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$a_n = 2^{(n-1)^2 - n^2} = 2^{1-2n}.$$

Donc $\sum_{n > N^2 + 1} a_n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Donc, $\sum a_n$ converge.

$$\text{ii. } \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n \leq \frac{4}{2^n} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 4.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = p^2$ avec $p \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

$$g_n = \frac{4}{2^n} \quad \text{et} \quad g_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{d'où} \quad a_n = \frac{2^{2n}}{2^{n^2}} \times 2^{(n-1)^2} = 2.$$

$$\text{Donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{p=1}^N a_{p^2} = 2N.$$

$$(c) \quad \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n \frac{g_k^k}{g_{k-1}^{k-1}} = \frac{g_n^n}{g_0^0} = g_n^n.$$

(d) L'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{g_n} \leq \frac{1}{h_n}, \quad \text{soit} \quad h_n \leq g_n.$$

$$\text{Si } K \text{ existe, } 2N \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \leq K \times \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \leq 4K.$$

Ceci valant pour tout N , on a une contradiction.

Problème 2. Révisions de sup – Petites Mines 2000

Corrigé UPS.

Problème 1

Partie I

1. $\tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = \frac{1}{\cosh^2} > 0$ donc $\tanh$ strictement croissante. Or $\tanh$ continue, donc $\tanh$ bijection de $\mathbb{R}$ sur $\tanh(\mathbb{R}) =]-\infty, \infty[=]-\infty, \infty[$ ($\lim_{-\infty} \tanh = -1$, $\lim_{+\infty} \tanh = 1$) (factoriser par e^x ou e^{-x}).
2. $\tanh' = 1 - \tanh^2$.
3. $\operatorname{arctanh}$ est définie sur $] -1, 1[$ symétrique par rapport à 0. Soit $u \in] -1, 1[$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $u = \tanh(x)$. $\operatorname{arctanh}(-u) = \operatorname{arctanh}(-\tanh(x)) = \operatorname{arctanh}(\tanh(-x)) = -x = -\operatorname{arctanh}(u)$ donc $\operatorname{arctanh}$ impaire.
4. $\operatorname{arctanh} = \tanh^{-1}$ donc $\forall u \in] -1, 1[$, $\operatorname{arctanh}'(u) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{arctanh}(u))} = \frac{1}{1 - \tanh(\operatorname{arctanh}(u))^2} = \frac{1}{1 - u^2}$.
5. $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}$ et $\operatorname{arctanh}(u) = \int_0^u \operatorname{arctanh}'(t) dt$ pour $u \in] -1, 1[$. Or $\operatorname{arctanh}(0) = 0$ (car $\tanh(0) = 0$), donc $\operatorname{arctanh}(u) = \frac{1}{2}(-\ln(|1-u|) + \ln(|1+u|)) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\right)$.
6. $\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + (t^2)^2 + o(t^4)$ (car $\lim_0 u^2 = 0$), d'où $\operatorname{arctanh}(u) = \int_0^u (1 + t^2 + t^4 + o(t^4)) dt$, soit $\operatorname{arctanh}(u) = u + \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + o(u^5)$.

Partie II

7. $(E) \iff y' = -\frac{3}{x}y - \frac{1}{x(1-x^2)}$ car $x \neq 0$ sur $]0, 1[$.

On a : $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{array}{l}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha e^{-3 \ln |x|} \end{array} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ solution de l'équation homogène $y' = -\frac{3}{x}y$ sur $]0, 1[$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y(x) = \frac{1}{x^3}g(x)$ pour $x \in]0, 1[$, avec $g \in \mathcal{D}^1(]0, 1[)$.

On trouve $g'(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1$. Soit donc $\forall x \in]0, 1[$, $g(x) = \operatorname{arctanh}(x) - x$ et $y(x) = \frac{\operatorname{arctanh}(x) - x}{x^3}$.

On a : $\mathcal{S}' = \left\{ \begin{array}{l}]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto y(x) + \frac{\alpha}{x^3} \end{array} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ solution de l'équation (E) sur $]0, 1[$.

Partie III

8. Soit $f = a \in \mathbb{R}$, $a = \frac{2a}{1+a^2} \iff a = 0$ ou $1 + a^2 = 2$, i.e. $a = 0$ ou $a = 1$ ou $a = -1$.
9. $f(0)$ vérifie l'équation précédente donc $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2f(\frac{x}{2})}{1+(f(\frac{x}{2}))^2}$. Or $a^2 + 1 - 2|a| = (|a| - 1)^2 \geq 0$ et $1 + a^2 > 0$ donc $\frac{2|a|}{1+a^2} \leq 1$, d'où $|f(x)| \leq 1$.
11. Soit $g = -f$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(2x) = -f(2x) = \frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2} = \frac{2g(x)}{1+g(x)^2}$ donc g solution.
12. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{2 \tanh(x)}{1+\tanh(x)^2} = \frac{2(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^2}{(2e^{2x} + 2e^{-2x})(e^x + e^{-x})} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \tanh(2x)$.
13. $\lim(2^n) = +\infty$ donc $\lim(\frac{x_0}{2^n}) = 0$. Or f dérivable donc continue en 0, d'où $\lim(u_n) = f(0) = 1$.
14. $u_n = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = \frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$ et $1 + u_{n+1}^2 > 0$ donc le signe de u_n est celui de u_{n+1} .
On montre alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sgn}(u_n) = \operatorname{sgn}(u_0)$.
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_{n+1}(u_{n+1}^2 - 1)}{1+u_{n+1}^2}$ et $1 - u_{n+1}^2 \geq 0$ (car, d'après la question 10), $|u_{n+1}| \leq 1$) donc $\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = -\operatorname{sgn}(u_{n+1}) = -\operatorname{sgn}(u_0)$, d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante si $u_0 \leq 0$ et décroissante sinon.
15. Soit $u_0 \geq 0$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante et minorée par -1 (cf question 10) donc elle converge vers $l = \inf((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \leq u_0 = f(x_0) < 1$ absurde (cf question 13).
Un raisonnement analogue est à mener dans le cas $u_0 < 0$.
16. Soit $g = -f$, $g(0) = 1$ et g solution (cf question 11) donc on aboutit aussi à une contradiction.
17. Au vu de la question 9, on en déduit donc que la seule valeur possible est $f(0) = 0$.

18. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$ et définissons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme précédemment.
 Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$, ceci étant vrai pour $n = 0$.
 Si $u_n = 1$ alors $\frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2} = 1$ (cf question 14) d'où $u_{n+1} = 1$.
 Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(0) = 0$ (cf question 13) *absurde*.
 Si $f(x_0) = -1$, on utilisera le raisonnement de la question 16 pour aboutir à une absurdité.
19. $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(2g(x)) = \frac{2 \tanh(g(x))}{1 + \tanh(g(x))^2}$ (cf question 12), or $\tanh(g(x)) = f(x)$ donc
 $\tanh(2g(x)) = \frac{2f(x)}{1+f(x)^2} = f(2x) = \tanh(g(2x))$; or $\tanh$ injective (cf question 1), donc $2g(x) = g(2x)$.
20. f dérivable en 0 et $\operatorname{arctanh}$ dérivable sur $] -1, 1[$ donc en $f(0) = 0$ d'où, par composition, g dérivable en 0.
21. $g(0) = \operatorname{arctanh}(f(0)) = 0$ donc v_n vaut le taux d'accroissement de g en 0 évalué en $\frac{x}{2^n}$.
 Or $\forall x \in \mathbb{R}, \lim(\frac{x}{2^n}) = 0$ donc $\lim(v_n) = g'(0)$ (car g dérivable en 0).
22. Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, xv_n = 2^n g(\frac{x}{2^n}) = g(x)$, ceci étant vrai pour $n = 0$.
 Si le résultat est vrai pour n , alors $xv_{n+1} = 2^{n+1} g(\frac{x}{2^{n+1}}) = 2^n g(2 \times \frac{x}{2^{n+1}})$ (cf question 19) d'où
 $xv_{n+1} = g(x)$, ce qui permet de conclure par récurrence.
 On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, g(x) = xv_n$, d'où, en passant à la limite en n , $g(x) = xg'(0) = \lambda x$ avec $\lambda = g'(0)$.
 g est donc clairement linéaire.
23. On a montré : $\exists \lambda, \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{arctanh}(f(x)) = \lambda x$, d'où $f(x) = \tanh(\lambda x)$.
 Réciproquement, il est aisé de vérifier (cf question 12) qu'une telle fonction est solution.

Problème 2

Partie I

1. $A(0) = 0$ donc 0 racine de A donc X divise A , d'où l'existence de B .
 $\deg(A) = \deg(X) + \deg(B)$ et $\deg(A) = 2n$ (car $A = \sum_{k=1}^{2n} C_{2n}^k X^k$) d'où $\deg(B) = 2n - 1$.
 Le coeff. dominant du produit étant égal au produit des coeff. dominants et le coeff. dominant de A valant $C_{2n}^{2n} = 1$, le coeff. dominant de B vaut 1.
 Même raisonnement pour le coeff. constant : $b_0 = C_{2n}^1 = 2n$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}, A(z) = 0 \iff z + 1$ racine $2n^e$ de l'unité $\iff \exists k \in [0; 2n - 1], z = e^{i \frac{2k\pi}{2n}} - 1$.
 On pose donc $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{2n}} - 1$ pour k entier entre 0 et $2n - 1$.
 $z_k = e^{i \frac{k\pi}{2n}} (e^{i \frac{k\pi}{2n}} - e^{-i \frac{k\pi}{2n}}) = 2i \sin(\frac{k\pi}{2n}) e^{i \frac{k\pi}{2n}} = 2 \sin(\frac{k\pi}{2n}) (i \cos(\frac{k\pi}{2n}) - \sin(\frac{k\pi}{2n}))$.
3. Posons $j = 2n - k$, on a $P_n = \prod_{j=2n-1}^{j=n+1} \sin(\frac{(2n-j)\pi}{2n}) = \prod_{j=n+1}^{j=2n-1} \sin(\pi - \frac{j\pi}{2n}) = \prod_{j=n+1}^{j=2n-1} \sin(\frac{j\pi}{2n})$.
 On a donc $P_n^2 = P_n \times P_n = \prod_{j=1}^{j=2n-1} \sin(\frac{j\pi}{2n}) = Q_n$.
4. On a $B = \prod_{k=1}^{k=2n-1} (X - z_k)$ donc $(-1)^{2n-1} \prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = b_0$, soit $\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = -b_0 = -2n$.
 De plus, $\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = \prod_{k=1}^{k=2n-1} 2i \sin(\frac{k\pi}{2n}) e^{i \frac{k\pi}{2n}} = 2^{2n-1} i^{2n-1} \exp\left(\frac{i\pi}{2n} \sum_{k=1}^{k=2n-1} k\right) \prod_{k=1}^{k=2n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$.
 d'où $\prod_{k=1}^{k=2n-1} z_k = 2^{2n-1} \frac{(-1)^n}{i} \exp\left(\frac{(2n-1)}{2} i\pi\right) Q_n$; or $\exp\left(\frac{(2n-1)}{2} i\pi\right) = e^{in\pi} e^{-i \frac{\pi}{2}} = \frac{(-1)^n}{i}$ d'où
 $Q_n = 2n \times 2^{1-2n} = \frac{n}{4^{n-1}}$ et $P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.
5. $\forall k \leq 2n - 1, \exists B_k \in \mathbb{R}[X], A = (X - z_k)B_k$ donc $A' = (X - z_k)B'_k + B_k$, d'où $B_k(z_k) = A'(z_k)$.
 Or $\frac{1}{B_k(z_k)}$ est le coeff. de la partie polaire relative au pôle z_k de F et $A' = 2n(X + 1)^{2n-1}$ d'où
 $F = \sum_{k=0}^{k=2n-1} \frac{1}{A'(z_k)(X - z_k)} = \sum_{k=0}^{k=2n-1} \frac{2ne^{-i \frac{k\pi}{2n}}}{X - z_k}$.

Partie II

6. Soit $f = \alpha I_E$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, on a $((\alpha + 1)^{2n} - 1)I_E = \Theta$, or aI_E inversible pour $a \neq 0$ donc on a
 $(\alpha + 1)^{2n} - 1 = 0$, i.e. f solution $\iff \exists k \in [0; 2n - 1], \alpha = z_k$.
7. $4^n = (1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{k=2n} C_{2n}^k$ et $0 = (-1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{k=2n} (-1)^k C_{2n}^k = \sum_{k \text{ pair}} C_{2n}^k - \sum_{k \text{ impair}} C_{2n}^k$.
 On a donc $S + S' = 4^n$ et $S - S' = 0$, d'où $S = S' = 2 \times 4^{n-1}$.
8. On a $s^2 = s \circ s = I_E$ et s et I_E commutent donc, d'après la formule du binôme,
 $(s + I_E)^{2n} - I_E = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k s^k I_E^{2n-k} - I_E = \sum_{k \text{ pair}} C_{2n}^k I_E^{\frac{k}{2}} + \sum_{k \text{ impair}} C_{2n}^k s - I_E = S' s + (S - 1)I_E$.

Problème 3. Révisions de sup – Centrale MP 2000

Corrigé UPS. Remarque : le corrigé va un peu vite sur certains points :

- Question I.B.2, il faut proprement appliquer le **théorème de prolongement du caractère** $\mathcal{C}^1$.
- Question I.D.1, on n'a pas de théorème de point fixe en sup, en tout cas pas celui invoqué. Mais on peut démontrer les choses à la main :

Notons p la multiplicité de a dans P . D'après I.B.2, N_P est définie au voisinage de a (quitte à la prolonger par continuité en posant $N_P(a) = a$, ce qui est déjà vrai si $P'(a) \neq 0$), elle est continue en a , et $N_P(a) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} N'_P(x) = 1 - \frac{1}{p}$. Posons $k = 1 - \frac{1}{2p}$, de sorte que $1 - \frac{1}{p} < k < 1$.

Comme P' n'a qu'un nombre fini de zéros et que $N'_P(x) \rightarrow 1 - \frac{1}{p}$, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que, sur $I = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, P' ne s'annule pas, sauf peut-être en a et $|N'_P(t)| \leq k$ pour tout t dans $I \setminus \{a\}$.

Soit $x \in I$. Sur le segment $[a, x]$ ou $[x, a]$, la fonction N_P est continue, et dérivable à l'intérieur, et, pour tout t dans l'intervalle, $|N'_P(t)| \leq k$. Ainsi, par l'inégalité des accroissements finis, $|N_P(x) - a| = |N_P(x) - N_P(a)| \leq k|x - a| \leq k\varepsilon < \varepsilon$.

En particulier $N_P(x) \in I$: l'intervalle I est stable par N_P .

Soit $y \in I$ et (x_n) la suite définie par $x_0 = y$ et $x_{n+1} = N_P(x_n)$. Par récurrence, elle est bien définie, à valeurs dans I , et, pour tout n , $|x_n - a| \leq k^n |y - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puisque $0 \leq k < 1$. Ainsi, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

- Question I.E.1, il est fait mention de l'égalité de Taylor-Lagrange (plus au programme) mais la convexité n'est pas utilisée...

On peut supposer $P'' > 0$ sur $] - \infty, \xi[$, quitte à changer P en $-P$.

Ainsi, P' est strictement croissante sur $] - \infty, \xi[$ et $P'(\xi) = 0$, donc $P' < 0$ sur $] - \infty, \xi[$, qui est donc inclus dans Ω . On en déduit que P est strictement décroissante sur $] - \infty, \xi[$. De plus, $P(a^-) = 0$, ce qui implique que $P \geq 0$ sur $] - \infty, a^-]$.

Or, N_P envoie $] - \infty, \xi[$ dans $] - \infty, a^-]$. Comme P est convexe sur $] - \infty, \xi[$, sa courbe est au-dessus de ses tangentes (celle en x en particulier), ce qui implique, en évaluant en a^- , que $0 = P(a^-) \geq P(x) + P'(x)(a^- - x)$.

D'où $\frac{P(x)}{P'(x)} + a^- - x \geq 0$, soit $N_P(x) \leq a^-$. Or, N_P croît sur $] - \infty, a^-]$. Si $x \leq a^-$, $P(x) \geq 0$ et $P'(x) < 0$, donc

$$N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)} \geq x.$$

Ainsi, si $x_0 \in] - \infty, \xi[\subset \Omega$, alors $x_1 \leq a^-$, puis par récurrence immédiate, $x_n \leq a^-$ pour tout n . La suite est croissante et majorée par a^- , donc, par le théorème de la limite monotone, on dispose de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

De plus, par continuité, $N_P(\ell) = \ell$, donc $P(\ell) = 0$ d'après I.C, donc $\ell = a^-$ car a^- est le plus petit zéro de P .

Enfin $P'(\xi) = 0$ donc $\xi \notin \Omega$, et $\xi \notin I(a^-)$, d'où $I(a^-) =] - \infty, \xi[$.

1 Centrale MP Math 1 2000

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

P est un **polynôme** non constant donc P' n'est pas identiquement nul :

$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, succession finie d'intervalles ouverts.

I.A - L'équation de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P est : $Y = P(x) + P'(x) \cdot [X - x]$

Pour $x \in \Omega$, elle coupe l'axe des x au point d'abscisse X telle que : $P(x) + P'(x) \cdot [X - x] = 0$

$$\text{d'où : } \forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$$

I.B.1) - N_P fraction rationnelle, est de classe C^∞ sur Ω , et $N'_P(x) = \frac{P''(x)P(x)}{[P'(x)]^2}$ sur Ω

I.B.2) - Si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$, a est un zéro simple de P , et on a : $\begin{cases} N_P(a) = a \\ N'_P(a) = 0 \end{cases}$

a est un point fixe super attractif de N_P .

Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P , on peut factoriser : $P(x) = [x - a]^p \cdot Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $Q(a) \neq 0$

$$\text{ainsi : } \begin{cases} P'(x) = p[x - a]^{p-1} \cdot Q(x) + [x - a]^p \cdot Q'(x) \\ P''(x) = p(p-1)[x - a]^{p-2} \cdot Q(x) + 2p[x - a]^{p-1} \cdot Q'(x) + [x - a]^p \cdot Q''(x) \end{cases}$$

$$\text{d'où : } \forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{[x - a] \cdot Q(x)}{p \cdot Q(x) + [x - a] \cdot Q'(x)}$$

$$\text{et } N'_P(x) = \frac{[p(p-1) \cdot Q(x) + 2p[x - a] \cdot Q'(x) + [x - a]^2 \cdot Q''(x)] \cdot (x - a) \cdot Q(x)}{[p \cdot Q(x) + [x - a] \cdot Q'(x)]^2}$$

Les deux fonctions ont une limite finies : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} N_P(x) = a \\ \lim_{x \rightarrow a} N'_P(x) = \frac{p-1}{p} = 1 - \frac{1}{p} \end{cases}$, N_P étant C^∞ au voisinage de a .

N_P est prolongeable par continuité en a , son prolongement par continuité est dérivable en a , et même C^1 en a .

On le note encore $N_P : N'_P(a) = 1 - \frac{1}{p}$ a est un point fixe attractif de N_P de multiplicateur $1 - \frac{1}{p}$

I.C - On a $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega$ et $x_{n+1} = N_P(x_n)$ Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(x_n) = P'(x_n) \cdot [x_n - x_{n+1}]$

Si la suite est bien définie et tend vers a , en passant à la limite, par continuité de P et P' $P(a) = 0$

I.D.1) - Si on note encore p l'ordre de a comme zéro de P : N_P est C^1 au voisinage de a et $N'_P(a) = 1 - \frac{1}{p}$

Donc : $\exists \varepsilon > 0, \forall c \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \quad |N'_P(c)| \leq 1 - \frac{1}{2 \cdot p} < 1$

N_P est ainsi **strictement contractante** sur un **fermé** de $\mathbb{R}$ complet, par le théorème du point fixe : toutes les suites récurrentes pour $x_0 = y \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ convergent vers a l'unique point fixe de N_P dans ce fermé.

I.D.2) - L'ensemble formé des points dont la suite de Newton par P converge vers a contient $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Définissons : $N^+(a) = \{x \geq a \mid \forall y \in [a, x], \text{ la suite de Newton de } y \text{ par } P \text{ converge vers } a\}$

$N^+(a)$ est un **intervalle** contenant a . Soit $\beta = \sup(N^+(a))$

Si l'ensemble $N^+(a)$ est **borné**, $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \geq a + \varepsilon$

Supposons $\beta \in N^+(a)$, la suite de Newton de β converge vers a et il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que $\beta_{n_0} = (N_P)^{n_0}(\beta) \in]a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}[$, mais alors $(N_P)^{n_0}$ est continue au voisinage de β

et donc pour y assez proche de β , et supérieur à β , $y_{n_0} = (N_P)^{n_0}(y) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$

la suite converge donc ensuite vers a , et il existerait des éléments de $N^+(a)$ strictement supérieur à β

Absurde : $N^+(a) = [a, \beta[$ Si $N^+(a)$ **n'est pas borné** alors : $N^+(a) = [a, \infty[$

De même à gauche de a :

le **bassin immédiat** $I(a) = N^-(a) \cup N^+(a)$ de a est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

I.E.1) - P'' ne s'annule pas sur $] -\infty, \xi[$, **supposons** $P'' > 0$ sur $] -\infty, \xi[$

alors P' croît strictement vers 0 sur $] -\infty, \xi[$ donc $P' < 0$ sur $] -\infty, \xi[$ et P décroît strictement

de $+\infty$

jusqu'à $P(\xi)$ en passant par $P(a^-) = 0$ $P > 0$ sur $] -\infty, a^-[$ et $P < 0$ sur $] a^-, \xi[$

Pour tout $x \in]-\infty, \xi[$ par Taylor-Lagrange, il existe $c \in]a^-, x[$ tel que :

$$P(a) = P(x) + [a - x] P'(x) + \frac{1}{2} [a - x]^2 P''(c)$$

$$N_P(x) - a = x - a - \frac{P(x)}{P'(x)} = \frac{P'(x)[x - a] - P(x) + P(a)}{P'(x)} = \frac{P''(c)[x - a]^2}{2.P'(x)} < 0$$

Quelque soit le point de départ $x_0 \in]-\infty, \xi[$, le premier terme x_1 est dans $] -\infty, a^-[$,
et les autres termes de la suite resteront majorés par a^- , la suite est bien définie.

De plus $\forall x \in]-\infty, a^-[$ $N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)} > x$ et la suite est donc croissante à partir de x_1 .

Par croissance majorée, $\forall x_0 \in]-\infty, \xi[$ la suite converge vers une limite ℓ et on a $\ell \leq a^-$

et où par continuité : $N_P(\ell) = \ell$. Avec I.C : $P(\ell) = 0$ donc : $\ell = a^-$

Le bassin immédiat de a^- contient donc $] -\infty, \xi[$ mais ne peut contenir ξ où la suite n'est pas définie.

donc : le bassin immédiat de a^- égale donc $] -\infty, \xi[$

Il en est de même dans le cas $P'' < 0$ sur $] -\infty, \xi[$

I.E.2) Le bassin immédiat de a est à extrémités réelles : $I(a) =]\alpha, \beta[$

- Avec I.D.2) : $I(a) = \{x / \forall y \in [a, x], \text{ la suite de Newton de } y \text{ par } P \text{ converge vers } a\}$

Supposons que $x \in I(a)$ et que $N_P(x) \notin I(a)$ alors il existe z dans $[a, N_P(x)]$ tel que la suite de Newton de z par P ne converge pas vers a . Mais $z \in [N_P(a), N_P(x)]$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in [a, x]$ tel que $z = N_P(y)$. La suite de Newton de y suit alors celle de z , elle ne converge pas vers a . Contradiction sur $x \in I(a)$.

Donc : $N_P([\alpha, \beta]) \subset] \alpha, \beta [$

Note : si $y = N_P(x)$ la suite de Newton de $y = x_1$ est obtenue par simple décalage à partir de celle de x
 $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1}$ elle est donc définie et convergente vers la même limite a .

- Si $P(\alpha) = 0$ puisque $P(a) = 0$ avec le théorème de Rolle : $\exists \xi \in]\alpha, a[\subset]\alpha, \beta[$ tel que $P'(\xi) = 0$
La suite de Newton de ξ n'est alors pas définie et cela contredit la définition du bassin immédiat.

De même si $P(\beta) = 0$

Si $P'(\alpha) = 0$, puisque $P(\alpha) \neq 0$, par continuité de P et P' quand $x \rightarrow \alpha^+$ $|N_P(x)| \rightarrow \infty$
l'abscisse du point d'intersection de la tangente avec Ox part à l'infini et donc $N_P(x) \notin]\alpha, \beta[$

De même si $P'(\beta) = 0$ ainsi $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$

- Il n'y a aucun autre zéro de P que a sur $[\alpha, \beta]$ (toujours avec Rolle) et P' ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$,
sauf peut-être en a (zéro d'ordre $p \geq 2$), par continuité elle reste non nulle sur un voisinage de α ,
et sur un voisinage de β .

Il existe alors $\eta > 0$ tel que N_P soit C^1 (au moins) sur un intervalle $]\alpha - \eta, \beta + \eta[$

avec un seul problème éventuel en a . Donc : $N_P(\alpha) \in]\alpha, \beta[$ par continuité.

Mais si $N_P(\alpha) \in]\alpha, \beta[$, la suite de Newton de $N_P(\alpha)$ serait bien définie et convergerait vers a
celle de α aussi (simple décalage) donc $\alpha \in]\alpha, \beta[$ absurde . D'où $N_P(\alpha) = \alpha$ ou β

$N_P(\alpha) = \alpha$ en un point α où $P'(\alpha) \neq 0$ entraînerait $P(\alpha) = 0$ qu'on a exclu. $N_P(\alpha) = \beta$

De même $N_P(\beta) = \alpha$ Les extrémités du bassin immédiat d'un zéro de P constituent un 2-cycle.

- Si ce 2-cycle était attractif : en notant $M_P = N_P \circ N_P$ on aurait $M_P(\alpha) = \alpha$ et $M_P'(\alpha) < 1$
 M_P étant C^1 au voisinage de α , elle resterait strictement contractante sur un $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ où $\varepsilon > 0$
Pour $x \in]\alpha, \alpha + \varepsilon[$ la suite extraite de la suite de Newton $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergerait vers α , ce qui contredit

la définition de $I(a) =]\alpha, \beta[$ puisque $x_n \rightarrow a$. Ce 2-cycle ne peut être attractif.

I.F - On a : $\beta - \alpha = -\frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)}$ et $\alpha - \beta = -\frac{P(\beta)}{P'(\beta)}$ avec $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$

$\frac{P(\alpha)}{P'(\alpha)}$ et $\frac{P(\beta)}{P'(\beta)}$ sont de signes opposés, $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) < 0$

N_P est C^1 (au moins) sur un intervalle $]\alpha - \eta, \beta + \eta[$ et pour $x > \alpha$ $\frac{N_P(x) - N_P(\alpha)}{x - \alpha} = \frac{N_P(x) - \beta}{x - \alpha} < 0$

par passage à la limite quand $x \rightarrow \alpha^+$ on assure : $N_P'(\alpha) \leq 0$. Mais $N_P'(\alpha) = 0$ rendrait le 2-cycle

(α, β) super-attractif, ce qu'il n'est pas : $N_P'(\alpha) < 0$ De même : $\frac{N_P(\beta) - N_P(x)}{\beta - x} = \frac{\alpha - N_P(x)}{\beta - x} < 0$

et $N_P'(\beta) < 0$ D'où : $P(\alpha)P''(\alpha)P(\beta)P''(\beta) > 0$

- **Premier cas** : si P' ne s'annule pas sur $[\alpha, \beta]$ (elle ne pourrait s'annuler qu'en a)

$P'(\alpha)$ et $P'(\beta)$ ont même signe, $P'(\alpha)P'(\beta) > 0$ d'où $P(\alpha)P(\beta) < 0$ et $P''(\alpha)P''(\beta) < 0$

il existe $c \in]\alpha, \beta[$ où $P''(c) = 0$

- **Second cas** : si P' s'annule sur $[\alpha, \beta]$ elle ne s'annule qu'en a :

$N'_P(\alpha) < 0$ alors que $N'_P(a) = \frac{p-1}{p} > 0$ il existe $c \in]\alpha, a[$ où $N'_P(c) = 0$ donc $P''(c) = 0$

I.G - P admet $d = d^\circ(P)$ racines réelles distinctes ordonnées : $(a_k)_{1 \leq k \leq d}$. Entre deux zéros successifs de P :

il existe un zéro de P' qui admet donc $d-1$ racines réelles distinctes : $(\xi_k)_{1 \leq k \leq d-1}$ avec $\xi_k \in]a_k, a_{k+1}[$ de même P'' admet $d-2$ racines réelles distinctes : $(\zeta_k)_{1 \leq k \leq d-2}$ où $\zeta_k \in]\xi_k, \xi_{k+1}[$

Le bassin immédiat de $a_1 = a^-$ est $]-\infty, \xi_1[$ et ne contient pas de zéros de P'' , de même celui de $a_d = a^+$

Pour $k \in \{1, \dots, d-2\}$ le bassin immédiat de a_{k+1} est de la forme $]\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}[$, ne contient pas de racine de P'

(P n'a pas de racines multiples) mais contient une racine de P'' : $\zeta_k \in]\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}[\subset]\xi_k, \xi_{k+1}[$

N_P attire tout zéro P'' vers un zéro de P

Partie II - Etude algébrique

II.A - Pour $d = 1$ $N_P(X) = R(X) = -\frac{p_1}{p_0}$ pour $P(X) = p_1X + p_0$ et (*) n'est pas vraie : $d^\circ(Q) = d-1$

On supposera donc $d \geq 2$ et $P(X) = p_dX^d + \dots + p_1X + p_0$

ainsi le terme de plus haut degré de $Q(X) = X P'(X) - P(X)$ vaut $(d-1)p_dX^d$ et $d^\circ(Q) = d$

$S = P'$ est de degré $d^\circ(S) = d-1$

$PGCD(Q, S) = PGCD(P, P') = 1$ puisque P a d racines simples dans $\mathbb{C}$.

$R(z) = z$ et $R'(z) = \frac{P(z)P''(z)}{[P'(z)]^2} = 0$ pour une racine de P R vérifie (*)

II.B - Notons $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$ les points fixes de R et P le polynôme : $P(X) = \prod_{1 \leq k \leq d} (X - z_k)$

La fraction rationnelle $R(X) - X = \frac{Q(X) - X.S(X)}{S(X)}$ s'annule sur les $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$ distincts, son numérateur

aussi, et $d^\circ(Q(X) - X.S(X)) \leq d$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Q(X) - X.S(X) = \lambda.P(X)$

et $\lambda \neq 0$ car sinon $PGCD(Q, S) = S$

Alors : $R(X) = X + \frac{\lambda.P(X)}{S(X)}$ et $R'(X) = 1 + \lambda \cdot \frac{P'(X)S(X) - S'(X)P(X)}{[S(X)]^2}$ est nul sur les $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$

$\lambda \cdot [P'(X)S(X) - S'(X)P(X)] + [S(X)]^2$ est nul sur les $(z_k)_{1 \leq k \leq d}$ distincts, et dans $\mathbb{C}_{2d-2}[X]$

C'est donc un multiple de $P(X)$, avec un quotient $U(X)$ dans $\mathbb{C}_{d-2}[X]$

ainsi avec $Q - X.S = \lambda.P$ $\lambda \cdot [\lambda.P'S - S'(Q - X.S)] + \lambda.S^2 = U \cdot [Q - X.S]$

d'où : $[\lambda.S + \lambda^2.P' + \lambda.X.S' + X.U]S = [U + \lambda.S']Q$

mais $PGCD(Q, S) = 1$ donc S de degré $d-1$ divise $[U + \lambda.S']$ de $\mathbb{C}_{d-2}[X]$

d'où : $U + \lambda.S' = 0$ et $\lambda.S + \lambda^2.P' = 0$ d'où $S = -\lambda.P'$

Ainsi : $R(X) = X + \frac{P(X)}{P'(X)}$ pour $P(X) = \prod_{1 \leq k \leq d} (X - z_k)$

II.C - $a \neq 0$ la fonction réciproque de T est définie sur $\mathbb{C}$ par $T^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a}$ c'est aussi une similitude.

Remarque : la relation de similitude est une **relation d'équivalence** (réflexive, symétrique et transitive)

Notons : $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid P'(z) \neq 0\}$ c'est le domaine de définition de N_P (aux pôles multiples près)

Le polynôme $P \circ T$ est définie par $P \circ T(X) = P(a.X + b)$ et donc $(P \circ T)'(X) = a.P'(a.X + b)$

ainsi sur $\mathcal{D}' = T^{-1}(\mathcal{D})$

$T \circ N_P \circ T(z) = a \cdot \left[z - \frac{P(a.z + b)}{a.P'(a.z + b)} \right] + b = (a.z + b) - \frac{P(a.z + b)}{P'(a.z + b)} = N_P(a.z + b)$

donc : $T \circ N_P \circ T = N_P \circ T$ ainsi $N_{P \circ T}$ et N_P sont semblables

II.D - Remarquons que $\forall \lambda \neq 0 \quad N_{\lambda.P} = N_P$

- Pour $Q_1(X) = X^2$ on a : $N_{Q_1}(X) = \frac{X}{2}$

Pour $Q_2(X) = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ on a : $N_{Q_2}(X) = \frac{X}{2} + \frac{1}{2X}$

- Si P est un polynôme de degré 2, $P(X) = \alpha.X^2 + \beta.X + \gamma$ où $\alpha \neq 0$
il admet dans $\mathbb{C}$ $\begin{cases} \text{premier cas : une racine double } z_1 & P(X) = \alpha.(X - z_1)^2 \\ \text{second cas : deux racines distinctes } z_1 \text{ et } z_2 & P(X) = \alpha.(X - z_1)(X - z_2) \end{cases}$

Dans le premier cas : $T(z) = z + z_1$ est une similitude, et $P \circ T(X) = \alpha.Q_1(X)$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.Q_1} = N_{Q_1}$ associée à la fraction rationnelle : $\frac{X}{2}$

Dans le second cas : on cherche T qui envoie le couple $(1, -1)$ sur (z_1, z_2) soit $\begin{cases} a + b = z_1 \\ -a + b = z_2 \end{cases}$

Si l'on prend : $a = \frac{1}{2}[z_1 - z_2]$ et $b = \frac{1}{2}[z_1 + z_2]$ et $T(X) = a.X + b$

alors : $P \circ T(X) \in \mathbb{C}_2[X]$, $P \circ T(1) = P(z_1) = 0$ $P \circ T(-1) = P(z_2) = 0$

et son coefficient dominant vaut $\alpha.a^2 \neq 0$ d'où : $P \circ T(X) = \alpha.a^2.Q_2(X)$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.a^2.Q_2} = N_{Q_2}$ associée à la fraction rationnelle : $\frac{X}{2} + \frac{1}{2.X}$

II.E - Posons : $P(X) = \alpha.X^3 + \beta.X^2 + \gamma.X + \delta$ où $\alpha \neq 0$

Premier cas : P admet une racine triple z_1 $P(X) = \alpha.(X - z_1)^3$

$T(z) = z + z_1$ est une similitude, et $P \circ T(X) = \alpha.X^3$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.X^3} = N_{X^3}$ associée à la fraction rationnelle : $\frac{2.X}{3}$

Deuxième cas : P admet une racine double z_1 et une simple z_2 $P(X) = \alpha.(X - z_1)^2(X - z_2)$

On peut choisir $a = \frac{1}{3}[z_1 - z_2]$ et $b = \frac{1}{3}[2.z_1 + z_2]$ et $T(X) = a.X + b$ alors $T(1) = z_1$ et

$T(-2) = z_2$ d'où : $P \circ T(1) = 0$ $P \circ T(-2) = 0$ et $(P \circ T)'(1) = a.P'(z_1) = 0$

d'où : $P \circ T(X) = \alpha.a^3.P_{-2}(X) = \alpha.a^3.(X - 1)^2(X + 2) = \alpha.a^3.[X^3 - 3.X + 2]$

N_P est semblable à $N_{P \circ T} = N_{\alpha.a^3.P_{-2}} = N_{-2}$ égale à $\frac{2.(X^3 - 1)}{3(X^2 - 1)} = \frac{2}{3} \left[\frac{X^2 + X + 1}{X + 1} \right]$ **Troisième**

cas : P admet trois racines simples : z_1, z_2 et z_3

Il n'y a pas de similitude appliquant les racines $(1, u_2, u_3)$ de P_m sur les racines (z_1, z_2, z_3) de P
une similitude conserve les angles, et ces deux triangles n'ont pas, a priori, les mêmes angles.

Cherchons brutalement s'il existe $(a, b, m, \lambda) \in \mathbb{C}^4$ tels que $P_m \circ T = \lambda.P$ ($a \neq 0$ et $\lambda \neq 0$)
 $a^3.X^3 + 3a^2b.X^2 + [3ab^2 + a(m - 1)].X + [b^3 + b(m - 1) - m] = \lambda[\alpha.X^3 + \beta.X^2 + \gamma.X + \delta]$

d'où : $\lambda = \frac{a^3}{\alpha}$, $b = \frac{a\beta}{3\alpha}$, $m = 1 + a^2 \left[\frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{3\alpha^2} \right]$ avec les trois premières relations

dans la 4^{ième} a doit vérifier : $a^3[27\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma] + 9a^2\alpha[3\alpha\gamma - \beta^2] + 27\alpha^3 = 0$

ce qui est possible car $[27\alpha^2\delta + 2\beta^3 - 9\alpha\beta\gamma]$ et $\alpha[3\alpha\gamma - \beta^2]$ ne sont pas simultanément nuls

puisque l'unique racine de P'' qui vaut $\zeta = -\frac{\beta}{3\alpha}$ n'est pas racine de P et P' simultanément.

On peut donc trouver (a, b, m, λ) convenables ($a \neq 0$ et $\lambda \neq 0$) et N_P est semblable à N_m

II.F - Les suites récurrentes définies par $\begin{cases} x_0 = z \in \mathbb{C} & \text{donné et} \\ \forall n \in \mathbb{N} & x_{n+1} = R(x_n) \end{cases}$ de deux fractions rationnelles

R et S semblables, se correspondent par similitude :

si $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = T^{-1}(x_n)$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad y_{n+1} = T^{-1} \circ R \circ T(y_n) = S(y_n)$

Donc leur comportement dynamique : convergence, cycles, attractivité etc... se conservent.

Pour étudier **tous les comportements dynamiques** des suites de Newton des polynômes de $\mathbb{C}_3[X]$,

il suffit d'étudier ceux des suites récurrentes associées aux fonctions :

$z \mapsto \frac{z}{2}$, $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$, $z \mapsto \frac{2z}{3}$ et pour $m \in \mathbb{C}$ $z \mapsto \frac{2z^3 + m}{3z^2 + m - 1}$

Partie III - Etude analytique du cas cubique réel

III.A.1) - $z_1 = 1$ est racine apparente de $P_m(X) = (X - 1)(X^2 + X + m)$ qui aura donc trois racines complexes distinctes, si et seulement si

(1 n'est pas racine de $(X^2 + X + m)$) et ($(X^2 + X + m)$ n'a pas de racine double)

si et seulement si $(m \neq -2)$ et $(m \neq \frac{1}{4})$

III.A.2) - Pour $m > 1$ la dérivée $P'_m(x) = 3.x^2 + m - 1$ reste strictement positive sur $\mathbb{R}$.