

Chapitre 01 – Procédés sommatoires

1 Rappels et compléments sur les séries

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. La série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, abrégée en « stg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » ou en « $\sum u_n$ » est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k. \text{ Si } n \in \mathbb{N}, S_n \text{ est la } n\text{-ième somme partielle de la série.}$$

2. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, on dit que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

$$\text{Dans ce cas, le reste d'ordre } n \text{ est } R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

3. Une série non convergente est dite divergente.

Proposition et Définition 2.

1. **Prop.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

2. **Déf.** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 3 (Lien suites-séries). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum u_{n+1} - u_n$

converge. On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$.

1.2 Séries à termes positifs

Théorème 4 (de comparaison). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Si la suite (S_n) est bornée, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge **si et seulement si** $\sum v_n$ converge.

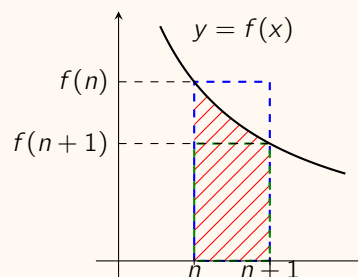
Corollaire 5. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, avec $\alpha > 1$, alors la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge absolument, donc converge.

Point de méthode 6. Soit f une fonction positive, décroissante. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inégalités

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

$$\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt,$$

$$\text{ou encore } \int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$



Proposition 7 (Séries de référence). Soit $a \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$.

- (séries géométriques) $\sum a^n$ converge si, et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
- (séries de Riemann) $\sum \frac{1}{n^s}$ converge si, et seulement si $s > 1$.

Définition 8. Une série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge absolument si la série de terme général $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Proposition 9.

- Une série qui converge absolument converge.
- Les théorèmes de comparaison 4 (2,3,4) s'appliquent aussi si on a seulement (v_n) à termes positifs.

Proposition 10 (Critère de D'Alembert). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls. On suppose que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

1.3 Séries alternées

Proposition 11 (Critère des séries alternées). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, qui décroît et tend vers 0.

- La série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
- Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, alors R_n est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

1.4 Sommation des relations de comparaison – nouveauté de MP

Théorème 12 (Somme des relations de comparaison). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs.

- On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $\sum v_n$ converge.
 - si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.
 - si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.
 - si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.
- On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $\sum v_n$ diverge.
 - si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
 - si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
 - si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Proposition 13 (Lemme de Cesàro). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Point de méthode 14. Pour étudier l'asymptotique de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, il peut être très utile de chercher α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, puis d'utiliser le théorème de Cesàro.

2 Familles sommables

2.1 Un peu de dénombrement

Définition 15.

1. Un ensemble A est dit fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi : A \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$. L'entier n est appelé cardinal de A , noté $\text{Card}(A)$, $|A|$ ou $\#A$.
2. Un ensemble A est dit dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$.
3. Un ensemble fini ou dénombrable est dit *au plus dénombrable*.

Remarque 16. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable. En effet, si $A \subset \mathbb{N}$ n'est pas finie, on pose $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ définie par : $\varphi(0)$ est le plus petit élément de A , puis $\varphi(1)$ le deuxième plus petit, etc. (définition par récurrence). Ainsi, pour montrer qu'un ensemble A est au plus dénombrable, il suffit de trouver une surjection de $\mathbb{N}$ dans A , ou une injection de A dans $\mathbb{N}$.

Proposition 17.

1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3. Tout produit cartésien d'ensemble dénombrables est dénombrable.
4. Toute réunion finie ou dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable.
5. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Exemple 18.

1. $[0, 1]$ n'est pas dénombrable (procédé diagonal).
2. Si f est monotone, l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

2.2 Sommabilité, sommation par paquets

Définition 19. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs**.

1. On définit $\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i, J \subset I, J \text{ fini.} \right\} \in [0, +\infty]$.
2. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition 20. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs**. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\{i \in I, u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Proposition 21 (Sommation par paquets). Soit $(E_j)_{j \in J}$ une partition de I . Alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in E_j} a_i \right)$.

2.3 Familles quelconques

Définition 22. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

Proposition 23 (et def).

1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée sur I . Alors cette famille est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} x_i^+$ et $\sum_{i \in I} x_i^-$ sont finies. On note alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes indexée sur I . Alors cette famille est sommable si et seulement si $(\Re(x_i))_{i \in I}$ et $(\Im(x_i))_{i \in I}$ sont sommables. On note alors $\sum_{k \in I} x_k = \sum_{k \in I} \Re(x_k) + i \sum_{k \in I} \Im(x_k)$.

Proposition 24. Soient $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I}, (u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}, (a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable : $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.
2. Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i \in I}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \mu \sum_{i \in I} y_i$.
3. Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables et si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
4. (Théorème de sommation par paquets) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k \in K}$ de I , la famille $\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)_{k \in K}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$.

Proposition 25 (Cas particulier du théorème de sommation par paquets).

1. (invariance par permutation) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I , la famille $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.
2. (théorème de Fubini) Si $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij} \right)_{j \in J}$ le sont, et :
$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}.$$
3. Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont sommables, la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'est aussi et : $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j.$

Proposition 26 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes). Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries absolument convergentes. Définissons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \text{ converge et } \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \right).$$

Proposition 27. L'exponentielle complexe est un morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.