

Chapitre 01 – Procédés sommatoires

1 Rappels et compléments sur les séries

1.1 Définitions

Définition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$.

1. La série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, abrégée en « stg $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ » ou en « $\sum u_n$ » est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Si $n \in \mathbb{N}$, S_n est la n -ième somme partielle de la série.

2. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, on dit que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Dans ce cas, le reste d'ordre n est $R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

3. Une série non convergente est dite divergente.

Proposition et Définition 2.

1. **Prop.** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. **Déf.** Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 3 (Lien suites-séries). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum u_{n+1} - u_n$ converge. On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k+1} - u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - u_0$.

1.2 Séries à termes positifs

Théorème 4 (de comparaison). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Si la suite (S_n) est bornée, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge **si et seulement si** $\sum v_n$ converge.

Démonstration. On ne prouve que le premier point : si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$; si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$!

Supposons donc que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Alors on dispose de $C > 0$ et de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$u_k \leq C v_k.$$

Ainsi, si $n \geq N$

$$\sum_{k=N}^n u_k \leq C \sum_{k=N}^n v_k \leq C \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

la dernière inégalité venant du fait que $\sum v_n$ converge. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

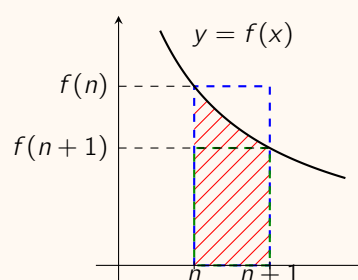
$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^N u_k}_{\text{indépendant de } n} + C \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

donc $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc elle converge. $\square$

Corollaire 5. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, avec $\alpha > 1$, alors la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge absolument, donc converge.

Point de méthode 6. Soit f une fonction positive, décroissante. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inégalités

$$\begin{aligned} f(n+1) &\leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt. \\ \text{Ainsi, } \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt &\leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt, \\ \text{ou encore } \int_1^{n+1} f(t) dt &\leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt. \end{aligned}$$



Il s'agit bien d'une **méthode**, pas d'une proposition : il faudra toujours adapter à la situation.

Remarque 6.a. On a un peu mieux que la comparaison série-intégrale. Si f est décroissante, la série de terme général $f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt$ converge. En effet, si on note u_n ce terme, alors comme $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n)$, on en déduit que $0 \leq u_n \leq f(n) - f(n+1)$, terme général d'une série télescopique convergente.

Proposition 7 (Séries de référence). Soit $a \in \mathbb{C}$, $s \in \mathbb{R}$.

- (séries géométriques) $\sum a^n$ converge si, et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
- (séries de Riemann) $\sum \frac{1}{n^s}$ converge si, et seulement si $s > 1$.

Démonstration.

- Déjà, si $|a| \geq 1$, a^n ne tend pas vers 0 ce qui empêche la convergence. Ensuite, si $|a| < 1$, si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^N a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-a}.$$

- Déjà, si $s \leq 0$, alors $\frac{1}{n^s}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge grossièrement.
 - Ensuite, si $s = 1$, alors on fait une comparaison série-intégrale : on sait que pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$$

Ainsi, si $n \geq 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n , on en déduit que

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t},$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n),$$

ou encore

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

Mais $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'où la divergence de $\sum \frac{1}{k}$.

- Puis, si $s \in]0, 1[$, on peut directement dire que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$. Comme $\sum \frac{1}{k}$ diverge, $\sum \frac{1}{k^s}$ aussi.
- Enfin, si $s > 1$, on fait... une comparaison série-intégrale ! Soit $k \geq 2$. Alors

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s}$$

Ainsi, si $n \geq 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n , on en déduit que

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}} \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1 \right) = \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{1-n^{s-1}} \right) \leq \frac{1}{s-1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq 1 + \frac{1}{s-1},$$

donc la suite des sommes partielles est croissante et majorée, elle converge alors ! □

Définition 8. Une série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge absolument si la série de terme général $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Proposition 9.

1. Une série qui converge absolument converge.
2. Les théorèmes de comparaison 4 (2,3,4) s'appliquent aussi si on a seulement (v_n) à termes positifs.

Démonstration. Cas des suites réelles. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum |u_n|$ converge. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -3, 2, 4, -2, -5, \dots)$, $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 2, 4, 0, 0, \dots)$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 3, 0, 0, 2, 5, \dots)$: on prend la partie positive de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un côté, et la partie négative de l'autre.

Alors, on a immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

Comme $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites positives, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq u_n^- \leq |u_n|.$$

Par **comparaison des séries à termes positifs**, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Donc $\sum u_n^+ - u_n^-$ converge, donc la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Cas des suites complexes. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que $\sum |u_n|$ converge. On écrit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \Re(u_n) + i\Im(u_n)$. Mais, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leq |\Re(u_n)| \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq |\Im(u_n)| \leq |u_n|,$$

donc les séries de termes généraux $(\Re(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Im(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent absolument, donc convergent, donc la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. $\square$

Proposition 10 (Critère de D'Alembert). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls. On suppose que $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exercice 10.a.

1. Nature de la stg $\sqrt[3]{n+\pi} - \sqrt[3]{n}$?
2. Nature de la stg $\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)$?
3. Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme

$$P_n = X^n - nX + 1.$$

- (a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n .
- (b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
- (c) Nature de la stg x_n ? De la stg $x_n - \frac{1}{n}$?

1.3 Séries alternées

Proposition 11 (Critère des séries alternées). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, qui décroît et tend vers 0.

1. La série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
2. Si on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, alors R_n est du signe de $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Démonstration. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- On montre que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
— soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0, \end{aligned}$$

donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

- soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0, \end{aligned}$$

donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

- Enfin, si $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite ℓ .

- Donc les suites extraites d'indices pairs et impairs de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

D'où la convergence. Mais, de plus, pour tout n ,

$$S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n},$$

donc $\ell - S_{2n} \leq 0$ donc $R_{2n} \leq 0$, c'est-à-dire que $\sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq 0$ et, de même, $R_{2n+1} \geq 0$.

Pour résumer **le signe de R_n est dicté par le premier terme de R_n .**

Mieux encore, mais nous n'en ferons vraiment pas grand chose début d'année :

- comme $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$, en soustrayant S_{2n} , $-u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$, donc $|R_{2n}| \leq u_{2n+1}$,
- comme $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n+2}$, en soustrayant S_{2n+1} , $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.

Ainsi, le reste est majoré, en valeur absolue, par la valeur absolue de son premier terme. $\square$

1.4 Sommation des relations de comparaison – nouveauté de MP

Théorème 12 (Sommation des relations de comparaison). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels **positifs**.

1. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $\sum v_n$ converge.

(a) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

(b) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.

(c) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

2. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $\sum v_n$ diverge.

(a) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

(b) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, alors $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.

(c) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Démonstration.

1. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $\sum v_n$ converge.

(a) on suppose $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon v_n$.

Soit $n \geq N$. Alors pour tout $k \geq n$, $|u_k| \leq \varepsilon v_k$, donc $\sum_{k \geq n} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k \geq n} v_k$, donc

$$\left| \sum_{k \geq n} u_k \right| \leq \sum_{k \geq n} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k \geq n} v_k,$$

ce qui est la définition de « $\sum_{k \geq n} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k \geq n} v_k\right)$ ».

(b) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$, on adapte.

(c) si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n = v_n + w_n$ où $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, ce qui permet de conclure par le premier point.

2. On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $\sum v_n$ diverge.

- (a) on suppose $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de N dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq \varepsilon v_n$. Soit $n \geq N$. Alors

$$\sum_{k=0}^n |u_k| = \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| + \sum_{k=N}^n |u_k| \leq \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| + \varepsilon \sum_{k=N}^n v_k \leq \sum_{k=0}^{N-1} |u_k| + \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k.$$

Or, $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\sum_{k=0}^{N-1} |u_k| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$. Donc on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\sum_{k=0}^{N-1} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k$. Ainsi, pour $n \geq \max(N, N')$, on a bien

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui est le résultat désiré.

(b) on adapte.

(c) on adapte de la même manière. □

Proposition 13 (Lemme de Cesàro). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Démonstration. Distinguons trois cas :

1. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors on sait que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$. Or, $\sum \ell$ diverge, donc par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \ell = n\ell$. Ainsi, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

2. si $\ell = 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$. Or, $\sum 1$ diverge, donc, par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) = o(n)$, ce qui signifie que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. si $\ell = +\infty$, alors $1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$. Or, $\sum u_n$ diverge et u_n est positive à partir d'un certain rang donc, par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=0}^{n-1} 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)$, ce qui assure que $1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right)$, i.e. que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. □

Point de méthode 14. Pour étudier l'asymptotique de suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$, il peut être très utile de chercher α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, puis d'utiliser le théorème de Cesàro.

Exemple 14.a.

1. Étude de $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. On montre facilement que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis, si $\alpha \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n) \right)^\alpha - u_n^\alpha \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\alpha \left[\left(1 - \frac{u_n}{2} + o(u_n) \right)^\alpha - 1 \right] \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n^\alpha \times \frac{-\alpha u_n}{2}. \end{aligned}$$

Donc, si $\alpha = -1$, $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Ceci assure que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, i.e. que $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, donc, comme $u_n \rightarrow 0$, $\frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$, i.e. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

2. Équivalent en $+\infty$ de $\sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2}$.

2 Familles sommables

Le but de cette partie est de (re)voir la notion de famille sommable déjà touchée du doigt en sup. Nous ne parlerons que de familles indexées sur des ensembles **dénombrables** : voilà pourquoi nous faisons un petit crochet par la dénombrabilité.

2.1 Un peu de dénombrement

Définition 15.

1. Un ensemble A est dit fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi : A \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$. L'entier n est appelé cardinal de A , noté $\text{Card}(A)$, $|A|$ ou $\#A$.
2. Un ensemble A est dit dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$.
3. Un ensemble fini ou dénombrable est dit *au plus dénombrable*.

Remarque 15.a.

1. $\mathbb{N}^*$ est facilement dénombrable, car $n \mapsto n + 1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.
2. Sur les ensembles finis, les formules du cours de dénombrement de sup sont à connaître.

Remarque 16. Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable. En effet, si $A \subset \mathbb{N}$ n'est pas finie, on pose $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ définie par : $\varphi(0)$ est le plus petit élément de A , puis $\varphi(1)$ le deuxième plus petit, etc. (définition par récurrence). Ainsi, pour montrer qu'un ensemble A est au plus dénombrable, il suffit de trouver une surjection de $\mathbb{N}$ dans A , ou une injection de A dans $\mathbb{N}$.

Proposition 17.

1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
2. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
3. Tout produit cartésien d'ensemble dénombrables est dénombrable.
4. Toute réunion finie ou dénombrable d'ensemble dénombrable est dénombrable.
5. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration. On va tout prouver !

1. Posons $\varphi : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \geq 0. \\ -2n - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

Alors φ est bien bijective, de bijection réciproque $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$:

$$n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. On peut montrer ce résultat de plusieurs manières :

- en posant $\varphi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto 2^m 3^n$, on injecte $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, donc $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, donc est dénombrable (car infini).
- en posant $\psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto 2^m(2n+1)$, on a directement une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.
- en dénombrant graphiquement (sans forcément chercher à avoir une formule). On part de $(0, 0)$, puis on va en $(0, 1)$, puis en $(1, 0)$, puis en $(2, 0)$, puis en $(1, 1)$, puis en $(0, 2)$, et on continue à parcourir toutes les diagonales $\{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m+n=p\}$.

3. Si A et B sont dénombrables, on dispose de φ une bijection de A dans $\mathbb{N}$ et ψ une bijection de B dans $\mathbb{N}$.

Alors $\theta : A \times B \rightarrow \mathbb{N}^2$, $(a, b) \mapsto (\varphi(a), \psi(b))$ est une bijection de $A \times B$ dans $\mathbb{N}^2$, donc, comme il existe une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, il existe une bijection de $A \times B$ dans $\mathbb{N}$.

4. On fait le cas dénombrable, et on adaptera pour le cas fini. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles dénombrables.

Alors pour tout k on dispose de $\varphi_k : \mathbb{N} \rightarrow A_k$ bijective. En posant $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, $(n, k) \mapsto \varphi_k(n)$, on a une surjection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, donc de $\mathbb{N}$ dans $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Si on a une réunion finie, on remplace $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par $\mathbb{N} \times \llbracket 1, p \rrbracket$.

5. On a une surjection claire de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$, $(n, p) \mapsto \frac{n}{p}$. Or, $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable, donc $\mathbb{Q}$ aussi. □

Exemple 18.

1. $[0, 1]$ n'est pas dénombrable (procédé diagonal).
2. Si f est monotone, l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

2.2 Sommabilité, sommation par paquets

Considérons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Considérons S où l'on prend deux termes impairs, puis un terme pair, puis deux impairs, puis un pair, etc. Trouve-t-on la même chose ?

A-t-on la même conclusion pour $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$?

Définition 19. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs**.

1. On définit $\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} u_i, J \subset I, J \text{ fini.} \right\} \in [0, +\infty]$.
2. On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Pourquoi avoir parlé d'ensembles dénombrables ?? À cause de la

Proposition 20. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs**. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\{i \in I, u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration. On note $A_n = \left\{ i \in I, u_i \geq \frac{1}{n} \right\}$. Alors si $A = \{ i \in I, u_i \neq 0 \}$, on a clairement $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.
Mais pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, A_n est fini (car sinon, la famille ne serait pas sommable). Donc A est au plus dénombrable. $\square$

Ainsi, toutes nos familles sommables seront en fait des familles indexées sur des ensembles dénombrables donc, quitte à renuméroter, sur $\mathbb{N}$.

Proposition 21 (Somme par paquets). Soit $(E_j)_{j \in J}$ une partition de I . Alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in E_j} a_i \right)$.

Remarque 21.a.

1. Ce théorème de sommation par paquets a l'avantage que l'on peut le faire même si la somme est égale à $+\infty$.
2. Exemples.

(a) Calculer la valeur de $\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k!}$.

(b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} e^{-an-bm}$.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ (souvenirs du chapitre 2...)

(d) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$.

(e) On rappelle $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2}, \quad \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}, \quad \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}.$$

(f) Calculer $\sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{np(n+p-1)}$. On doit faire très attention à ne manipuler que des termes positifs.

2.3 Familles quelconques

Définition 22. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

Proposition 23 (et def).

1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée sur I . Alors cette famille est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} x_i^+$ et $\sum_{i \in I} x_i^-$ sont finies. On note alors $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes indexée sur I . Alors cette famille est sommable si et seulement si $(\Re(x_i))_{i \in I}$ et $(\Im(x_i))_{i \in I}$ sont sommables. On note alors $\sum_{k \in I} x_k = \sum_{k \in I} \Re(x_k) + i \sum_{k \in I} \Im(x_k)$.

Proposition 24. Soient $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable : $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.
2. Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i \in I}$ l'est aussi et :

$$\sum_{i \in I} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \mu \sum_{i \in I} y_i.$$
3. Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables et si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$, alors $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
4. (Théorème de sommation par paquets) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k \in K}$ de I , la famille $\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)_{k \in K}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$.

Proposition 25 (Cas particulier du théorème de sommation par paquets).

1. (invariance par permutation) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I , la famille $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.
2. (théorème de Fubini) Si $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij} \right)_{j \in J}$ le sont, et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}.$$
3. Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont sommables, la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'est aussi et : $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j$.

Démonstration. Les preuves de ce résultat consisteront essentiellement en l'identification des paquets.

1. On écrit que $I = \bigcup_{j \in J} \{\varphi(j)\}$.
2. On écrit que $I \times J = \bigcup_{i \in I} E_j = \bigcup_{j \in J} F_i$, où $E_j = \{(i, j), i \in I\}$ et $F_i = \{(i, j), j \in J\}$.
3. Cas particulier de la proposition précédente.

□

Exercice 25.a.

1. Sommabilité de la famille $(z^{ij})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$?
2. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$.

Proposition 26 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes). Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries absolument convergentes. Définissons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \text{ converge et } \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \right).$$

Démonstration. On considère la famille $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$. On montre déjà que la famille est sommable, car

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} |a_p b_q| = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} |a_p| \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} |b_q| \right) < +\infty.$$

Ensuite, on considère, pour n dans $\mathbb{N}$, $E_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p + q = n\}$. Alors $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Donc, par théorème de sommation par paquets,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q \right) &= \sum_{(p, q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(p, q) \in E_n} a_p b_q \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat ! □

Proposition 27. L'exponentielle complexe est un morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. On part du principe que l'exponentielle complexe est définie par $\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Soient a et b deux complexes. Alors

$$\begin{aligned} \exp(a) \exp(b) &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!} \right) \left(\sum_{k \geq 0} \frac{b^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n, \end{aligned}$$

où $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$. Donc $\exp(a) \exp(b) = \exp(a+b)$. □