

TD 01

Procédés sommatoires

1 Exercices classiques

Exercice 1. *L'asymptotique de la série harmonique.* ●●○ On considère $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Démontrer qu'il existe $\gamma \geq 0$ tel que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
2. Déterminer un équivalent de $H_n - \ln(n) - \gamma$.

Exercice 2. *Équivalents des sommes partielles ou des restes des séries de Riemann.* ●●○

1. Soit $a < 1$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}$.
2. Soit $a > 1$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$.

Exercice 3. *Quelques séries alternées.* ●●○ On étudie la nature des séries suivantes selon le paramètre $\alpha > 0$.

1. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.
2. Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

Exercice 4. *Une série alternée ?.* ●●○ L'objectif est d'étudier des séries dont le terme général est de la forme $\sin(\pi\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta})$, via un développement asymptotique de $\sqrt{n^2 + \alpha n + \beta}$.

1. Établir le développement asymptotique $\sqrt{n^2 + 1} = n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + O(1/n^5)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
2. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$.
3. Établir le développement asymptotique $\sqrt{n^2 + n + 1} = n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} + O(1/n^2)$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. En déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} \sin(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$.

Exercice 5. *Une série complexe.* ●●○ Soit $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Montrer que pour tout entier n , $1 + j^n + j^{2n} = 3\mathbf{1}_{3|n}$.
2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} = \frac{1}{3}(e + e^j + e^{j^2})$.
3. Calculer $e^j + e^{j^2}$ en termes de fonctions réelles, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.
4. Calculer de même $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!}$, et vérifier que les trois sommes s'additionnent bien en e .

Exercice 6. *Règle de Raabe-Duhamel.* ●●○ Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c/n^\alpha$.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
3. Pour $a > 0$, on pose $u_n = \frac{n!}{a(a+1) \cdots (a+n)}$. Calculer u_{n+1}/u_n et déterminer la nature de $\sum u_n$.

4. On pose $v_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}$. Calculer v_{n+1}/v_n et déterminer la nature de $\sum v_n$.

Exercice 7. Transformation d'Abel et applications. ●●○ Soient $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ des suites réelles. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ (avec $A_0 = 0$).

1. Démontrer la **formule de sommation d'Abel** :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k).$$

2. En déduire le **critère de Dirichlet** : si (A_n) est bornée et si (b_n) est décroissante et tend vers 0, alors $\sum a_k b_k$ converge.

3. Pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \sin(k\theta)\right)_{n \geq 1}$ est bornée, puis en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ converge.

4. Montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge.

Exercice 8. Étude de suites récurrentes. ●●○

1. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

(a) Montrer que (u_n) est décroissante, positive, et converge vers 0.

(b) En développant $\sin(u_n)$ à l'ordre 3, montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

(c) En déduire la nature de $\sum u_n$ et de $\sum u_n^3$.

2. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_0 \in]0, 1[$ et $v_{n+1} = \ln(1 + v_n)$.

(a) Montrer que (v_n) converge vers 0.

(b) En développant $\ln(1 + v_n)$ à l'ordre 2, montrer que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

(c) En déduire la nature de $\sum v_n$.

Exercice 9. Un peu de familles sommables. ●●○ Pour $x \in [0, 1)$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in [0, 1)$.

2. En développant $\frac{x^n}{1 - x^n}$ en série géométrique, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) x^n,$$

où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs de n . On justifiera soigneusement l'interversion des sommes.

3. Vérifier le résultat pour $n = 1, 2, 3, 4$: calculer $d(n)$ et retrouver le coefficient de x^n à partir de la série $\sum x^n / (1 - x^n)$.

4. Montrer de même que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n) x^n$, où $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ est la somme des diviseurs de n .

Exercice 10. Séries de Bertrand. ●●○ Soient a et b deux réels. On note, pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{n^a \ln(n)^b}$. Déterminer, en fonction des valeurs de a et de b , la nature de $\sum u_n$.

Exercice 11. Formule de Stirling. ●●○

1. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$. Montrer que la suite (u_n) converge.

2. En déduire l'existence d'un réel $C > 0$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C \sqrt{n} n^n e^{-n}$.

3. Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. Établir une relation entre W_{n+2} et W_n , puis exprimer W_{2n} à l'aide de factorielles.
4. Montrer que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, puis en déduire $C = \sqrt{2\pi}$.
5. Application : donner un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ et déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ et de $\sum_{n \geq 1} \binom{2n}{n} x^n$ pour $x > 0$.

2 Nature de séries

Exercice 12. ●●○ Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas

1. $\sum \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$
2. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
3. $\sum \frac{n}{2^n + n}$
4. $\sum \frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})}$
5. $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$
6. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
7. $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$
8. $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$
9. $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
10. $\sum e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
11. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx$
12. $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha} \ (\alpha > 0)$
13. $\sum \cos^n \frac{1}{n^\alpha} \ (\alpha > 0)$
14. $\sum \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$
15. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

Exercice 13. ●○○ Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ et $\sum |u_{n+1} - u_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 14. *Croissances comparées exotiques.* ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant (les paramètres α et β sont des réels strictement positifs).

1. $\frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$
2. $\frac{(\ln n)^n}{n!}$
3. $1 - \text{th}(\sqrt{\ln n})$
4. $(n+1)^{1/n} - n^{1/n}$
5. $\frac{1}{n^{2-\cos(1/n)}}$
6. $\text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi} \text{Arctan}(n^\alpha)\right)$
7. $\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^{n^\alpha}$
8. $e^{-(\ln n)^\alpha}$
9. $\left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$
10. $\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{n^\alpha}$
11. $\left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^\alpha}$
12. $(\ln(n+\beta))^\alpha - (\ln n)^\alpha$

Exercice 15. *Termes généraux issus d'un procédé sommatoire.* ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant ($a > 0$, $b > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$).

1. $a^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$
2. $a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^b}}$
3. $a^{\sum_{k=1}^n \ln(k)}$
4. $\frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{1^\beta + 2^\beta + \dots + n^\beta}$
5. $\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n \ln(k^\alpha)$
6. $\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{\ln(n!)}$

7. $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$
8. $\frac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+p)!}$, où $p \in \mathbb{N}$

Exercice 16. Nombres de Pisot. ●●○ – ●●●

- Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier naturel.
- En déduire la nature de $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.
- Généralisation – difficile. Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers, de racines complexes $\theta, z_2, \dots, z_d$ (comptées avec multiplicité), avec $\theta > 1$ réel et $|z_j| < 1$ pour tout $j \geq 2$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi\theta^n)$ converge absolument.
- Que se passe-t-il pour $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(1 + \sqrt{2})^n)$?

Exercice 17. Regroupement par paquets. ●●○

- Soit $\alpha > 0$. On étudie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^\alpha}$.
 - Pour p dans $\mathbb{N}^*$, montrer que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p$ si et seulement si $p^2 \leq n \leq (p+1)^2 - 1$.
 - On note S_n la somme partielle d'ordre n et $U_p = S_{p^2-1}$. Donner un équivalent de $U_{p+1} - U_p$.
 - En déduire la nature de la série selon α .
- Déterminer, par la même méthode, la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 18. Séries de Kempner. ●●○ Pour k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon_k = 1$ si l'écriture décimale de k ne comporte pas le chiffre 1, et $\varepsilon_k = 0$ sinon.

- Déterminer le nombre d'entiers ayant exactement p chiffres en base 10 et dont l'écriture ne comporte pas le chiffre 1.
- En déduire la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon_k}{k}$. Commenter.
- Déterminer, selon $\alpha > 0$, la nature de $\sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon_k}{k^\alpha}$.
- Soit $a > 0$ et $f(n)$ le nombre de 0 dans l'écriture décimale de n . Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$.
- Soit $a > 0$, b réel et $p(n)$ le nombre de chiffres de n en base 10. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{a^{p(n)}}{n^b}$.

Exercice 19. Séries et produits infinis. ●●○

- Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $v_n > -1$ pour tout n . On pose $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + v_k)$.
 - On suppose que $\sum v_n$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que (P_n) converge vers une limite non nulle.
 - Montrer que la conclusion subsiste si l'on suppose seulement que $\sum v_n$ converge absolument.
 - Donner un exemple où $\sum v_n$ converge mais où $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- On pose, pour $n \geq 2$, $u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$.
 - Donner un équivalent simple de $\ln(u_n)$, puis de u_n .
 - En déduire la nature de $\sum u_n$ et celle de $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 20. Séries indexées par une permutation. ●●○ Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.

1. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n) + n^2}$ et de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2 + n}$.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge, et ce quelle que soit σ .
3. Le résultat subsiste-t-il si σ est seulement supposée injective ?
4. Soit maintenant σ une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 0} \frac{\sigma(n)}{n!}$.
5. Pour quels réels α est-on assuré que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$ converge, quelle que soit la bijection σ ?

Exercice 21. *Une série de Hardy.* ●●● Soit $\alpha > 0$. On étudie la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

1. Traiter le cas $\alpha > 1$.
2. On suppose $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$. En posant $t = \sqrt{u}$, montrer que $\int_1^x \frac{\sin(\sqrt{u})}{u^\alpha} du$ admet une limite finie quand $x \rightarrow +\infty$, puis conclure par comparaison série-intégrale.
3. On suppose $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\alpha_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor \quad \text{et} \quad \beta_n = \left\lfloor \left(2n\pi + \frac{3\pi}{4}\right)^2 \right\rfloor.$$

(a) Montrer que pour tout k dans $[\alpha_n + 1, \beta_n]$, $\sin(\sqrt{k}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Minorer $\sum_{k=\alpha_n+1}^{\beta_n} \frac{\sin(\sqrt{k})}{k^\alpha}$ et conclure.

3 Asymptotique

Exercice 22. *Suites à décroissance rapide.* ●●○ Soient a dans $\mathbb{R}$, $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Cn^a.$$

Exercice 23. *Suites à décroissance rapide.* ●●○

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge et que, si R_n est le reste d'ordre n , alors $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_{n+1}$.
2. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2}$.

Exercice 24. *Équivalents de restes et de sommes partielles à croissance rapide.* ●●○

1. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $0 \leq \ell < 1$. Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_{n+1}}{1-\ell}$.
2. Énoncer et démontrer le résultat analogue pour les sommes partielles lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell > 1$ (ou $\ell = +\infty$).
3. Donner un équivalent simple de chacune des expressions suivantes ($\alpha > 0$, $a > 1$) :

1. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}$
2. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln k}{a^k}$
3. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{(k!)^\alpha}$
4. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$

5. $\sum_{k=1}^n e^{k^\alpha}$
6. $\sum_{k=1}^n a^{k!}$
7. $\sum_{k=2}^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}$
8. $\sum_{k=1}^n 3^{k^2} \ln(k)$

4. Que dire du cas $\alpha \leq 1$ pour $\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^\alpha}$? Traiter en particulier $\alpha = 1$ et $\alpha = 1/2$.

Exercice 25. Reste de la série harmonique alternée. ●●○ Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n , préciser son signe et majorer $|R_n|$.
2. Simplifier $R_n + R_{n+1}$ et en déduire un équivalent simple de R_n .
3. Établir un développement asymptotique de R_n à deux termes.
4. Montrer que $\sum R_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 26. La série $\sum (-1)^n \ln(n)/n$. ●●○ On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2(n)}{2} \right)_{n \geq 1}$ converge. On note C sa limite.
2. Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$ converge, mais pas absolument.
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} = \ln(2) \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.
4. Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes, du reste de cette série.

Exercice 27. Un « inverse » de la série harmonique. ●●○ Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et on pose

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi(p) = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid H_n \geq p\}.$$

1. Justifier que φ est bien définie et que $\varphi(p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. Établir un développement asymptotique de H_n à deux termes lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. En déduire un équivalent simple de $\varphi(p)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$.
4. Déterminer le comportement asymptotique de la suite $\left(\frac{\varphi(p+1)}{\varphi(p)} \right)_{p \geq 1}$.
5. Pour $x > 0$, on note $a(x) = \text{Card} \{n \geq 1 \mid H_n \leq x\}$. Donner un équivalent de $a(x)$ en $+\infty$.

Exercice 28. Sommation de relations de comparaison. ●●○ Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels non nuls. On pose, pour n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$, et on suppose que

$$a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
2. Montrer que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis donner un équivalent simple de $S_n^3 - S_{n-1}^3$.

3. En déduire un équivalent simple de S_n , puis montrer que

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}.$$

4. Énoncer et démontrer le résultat général de sommation de relations de comparaison utilisé à la question 3.

Exercice 29. Théorèmes d'Abel-Dini. ●●○ Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs et $\alpha > 0$.

Partie A — Le cas divergent. On suppose ici que $\sum u_n$ diverge et on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n}$ diverge.
2. Montrer que pour $\alpha > 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
3. Que se passe-t-il pour $0 < \alpha < 1$?

Partie B — Le cas convergent. On suppose ici que $\sum u_n$ converge et on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

4. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{R_n}$ diverge.
5. Montrer que pour $0 < \alpha < 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge.

Partie C — Moralité.

6. En déduire qu'il n'existe pas de série à termes strictement positifs qui soit « frontière » : pour toute série divergente, il en existe une qui diverge « plus lentement », et pour toute série convergente, il en existe une qui converge « plus lentement ».

Exercice 30. Lemme de Kronecker. ●●○

1. Soient $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. On suppose que $\sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{a_n}$ converge. Montrer que

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Application : soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum_{k=1}^n k u_k = o(n)$.
3. Application : soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum u_n^2$ converge. Montrer que $\sum_{k=1}^n u_k = o(\sqrt{n})$, puis que $\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{\sqrt{k}} = o(\ln n)$.
4. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{u_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4 Familles sommables

Exercice 31. Le contre-exemple des sommes itérées. ●●○ Pour (n, p) dans $\mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2} \text{ si } n \neq p, \quad u_{n,n} = 0.$$

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ et calculer cette somme.

- En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$ et $\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$.
- Que peut-on en conclure sur la famille $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$?
- Retrouver directement ce résultat en minorant $\sum_{(n,p) \in F} |u_{n,p}|$ pour des parties finies F bien choisies.

Exercice 32. Familles sommables de référence. ●●○ Étudier la sommabilité des familles suivantes, en discutant selon les paramètres.

- $\left(\frac{1}{1+mn} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ et $\left(\frac{1}{1+m^2n^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$
- $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{m^\alpha + n^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\left(\frac{1}{a^m + b^n} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$, avec $a > 1$ et $b > 1$
- $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 33. Sommation par paquets et exponentielle. ●●○

- Justifier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{p!q!(p+q+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$, puis calculer sa somme.
- Soit $a > 0$. Pour (n, k) dans $\mathbb{N}^2$, on pose $u_{n,k} = \frac{a^k}{(n+k)!}$. Justifier la sommabilité de $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ et calculer sa somme.
- Soient a et b deux complexes distincts de module < 1 . Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = \frac{1}{1 - a - b + ab}.$$

- Soit z dans $\mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Montrer que la famille $(z^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme. En déduire, pour $r \in [0, 1[$ et θ réel, la valeur de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}$.

Exercice 34. Interversion et fonction ζ . ●●○ Pour $s > 1$, on note $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

- Justifier l'existence puis calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$.
- Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\zeta(n) - 1)$ et calculer sa somme.
- Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$ et calculer sa somme.
- Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{(-1)^p}{q^p} \right)_{p \geq 2, q \geq 2}$ et calculer sa somme de deux façons.

Exercice 35. Autour de la partie entière de la racine carrée. ●●○ On admet dans cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

- Justifier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$.

- Calculer sa somme en sommant d'abord par rapport à p .
- En sommant par paquets « à $p + q^2$ constant », en déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}.$$

- Par une méthode analogue, établir l'égalité $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}$.

Exercice 36. Coprimalité et fonction ζ . ●●○ On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

- Justifier l'existence de $S = \sum_{\substack{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ m \wedge n = 1}} \frac{1}{m^2 n^2}$.

- En partitionnant $(\mathbb{N}^*)^2$ suivant la valeur de $d = m \wedge n$, montrer que $S = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}$, puis calculer S .

- Généraliser : pour $\alpha > 1$, exprimer $\sum_{m \wedge n = 1} \frac{1}{m^\alpha n^\alpha}$ à l'aide de ζ .

- Interpréter le résultat en termes de « probabilité que deux entiers tirés au hasard soient premiers entre eux ».

Exercice 37. Sommabilité sur $\mathbb{Z}^n$ et normes. ●●○ Soient n dans $\mathbb{N}^*$, α un réel et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{\|x\|^\alpha} \right)_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}}.$$

- Justifier que la réponse ne dépend pas de la norme choisie ; on pourra donc supposer $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.
- Pour p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $I_p = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \|x\|_\infty = p\}$. Montrer que $(I_p)_{p \geq 1}$ est une partition de $\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ et calculer $\text{Card}(I_p)$.
- En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille soit sommable.
- Retrouver, dans le cas $n = 2$, la nature de la famille $\left(\frac{1}{(p^2 + q^2)^\beta} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

5 Du côté des concours

Exercice 38. CCINP 24. 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{2^n}$. On note S_p la valeur de la somme.

- En développant $(n+1)^p$, exprimer S_p en fonction de $S_0, \dots, S_{p-1}$.

- En déduire que $S_p \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 39. CCINP 24. Déterminer la nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{n^2}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ puis celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_0^n e^{-n^2 t^2} dt$.
 (on vérifiera d'abord que chacun des deux termes généraux est bien défini)

Exercice 40. Centrale 24. Nature de la série de terme général $z_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$?

Exercice 41. X 24. Étudier la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$ (convergence, convergence absolue).

Exercice 42. CCINP 24. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

- Justifier la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et montrer qu'elle converge vers 0.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \frac{(-1)^n}{n} u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $w_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général w_n ?

4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Nature de la série de terme général x_n ?

Exercice 43. Centrale 24. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\sum_{k=0}^n v_k = 1 - \frac{1}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.

2. Montrer que si (u_n) est à termes positifs, alors la série de terme général v_n est convergente.

3. Montrer que si la série de terme général u_n est absolument convergente, alors la série de terme général v_n est absolument convergente.

Exercice 44. Mines-Telecom 23. Nature de la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$?

Exercice 45. Mines 23. Soit $p \in \mathbf{Z}$. Étudier la série de terme général $a_n = \sin\left(\frac{2n^2 + pn - 1}{2n+1}\pi\right)$.

Exercice 46. Centrale 24. Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Montrer la convergence de la somme de la suite et donner une approximation à 10^{-6} près.

2. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} U_k = \ln(2).$$

3. On veut réorganiser la suite sous le nom de $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant à la suite deux termes positifs et un terme négatif :

$$V : \left\{ 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

4. Écrire la fonction $V(n)$ et donner $V(250)$, $V(251)$, et $V(252)$.

5. Soit t_n la somme partielle des suites (V_n) . Donner une valeur approchée de t_{250} , t_{251} , et t_{252} .

6. Faire le rapport $\frac{S_n}{t_n}$ et trouver une conjecture.

7. Prouver la conjecture.

8. Considérons une généralisation de la suite (V_n) sous la forme suivante : on prend p termes positifs et q termes négatifs dans la suite. Trouver la limite de cette suite généralisée.

Exercice 47. Centrale PSI 24. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n)$. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose

$$\varepsilon_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \pi/4[\\ 1 & \text{si } x \in [\pi/4, \pi/2] \end{cases} \quad \text{et, pour } n \in \mathbf{N}^*, \varepsilon_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k(x) u_k + u_n > x \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Écrire une fonction Python traçant une ligne polygonale reliant les points $M_k = (k, u_k)$ pour $k \in \llbracket 1, 50 \rrbracket$. Conjecture ?

(b) Écrire une fonction Python d'argument x et N renvoyant $(\varepsilon_0(x), \dots, \varepsilon_N(x))$ et $\sum_{k=0}^N \varepsilon_k(x) u_k$. Tester cette fonction pour $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \pi$ et, à chaque fois, $N = 20$. Observations et conjecture ?

2. (a) Étudier la monotonie de (u_n) et sa convergence éventuelle.

(b) Donner un équivalent de u_n .

3. (a) Étudier la convergence de la série $\sum \varepsilon_n(x) u_n$.

(b) Démontrer la conjecture de la question 1.b

4. Généralisation. Soit (u_n) une suite vérifiant l'hypothèse (H) suivante : $\sum u_n$ est convergente et (u_n) est décroissante positive. On note λ la somme de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$. Montrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ converge. On note S sa somme. Montrer que $S \in [0, \lambda]$.

On cherche à savoir à quelle condition la propriété (P) suivante est vraie :

$$\forall x \in [0, \lambda], \exists (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $R_{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Donner la condition nécessaire et suffisante cherchée en fonction de (R_n) .

Exercice 48. X MP 2024. Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Exercice 49. Centrale MP 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note b_n le nombre de 1 dans la représentation binaire de n , et on pose $\varepsilon_n = (-1)^{b_n}$.

1. (a) Écrire une fonction Python `epsilon(n)` qui renvoie les n premiers termes de la suite ε .
- (b) Vérifier avec Python que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon_{2n} = \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_{2n+1} = -\varepsilon_n$$

et le démontrer. En déduire une fonction `epsilon2` qui renvoie les n premiers termes de la suite ε en utilisant cette propriété.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k$$

Grâce à la fonction précédente, donner les premiers termes de la suite (S_n) . Quelle conjecture peut-on faire sur ses valeurs ? Le démontrer.

2. On pose, pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que cette série converge :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n x^n$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f .
- (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = (1-x)f(x^2)$.
- (c) En déduire que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - x^{2^k})$$

3. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.
- (b) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n \ln \frac{n}{n+1}$ converge.
- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_n = \prod_{k=0}^n \left(\frac{2k+1}{2k+2} \right)^{\varepsilon_k}$$

À l'aide de Python, calculer P_n^2 pour quelques valeurs de $n > 1000$. Quelle conjecture peut-on émettre quant à la nature de la suite (P_n) ?

(d) Démontrer cette conjecture.

On pourra introduire $R_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\varepsilon_k}$.

Exercice 50. *Mines-Ponts MP 2026.* On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 > 0$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\sum_{k=0}^n x_k}$.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

1. Montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et que $x_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$.
2. En utilisant la suite $\frac{S_{n+1}}{x_{n+1}} - \frac{S_n}{x_n}$, démontrer que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nx_n$.
3. Déterminer un équivalent de $x_{n+1}^2 - x_n^2$, puis en déduire un équivalent de x_n .

Indications

Ex 1. 1. Poser $u_n = H_n - \ln(n)$ et utiliser le lien suites-séries.

Ex 10. Si $a \neq 1$, se ramener à une série de Riemann. Sinon, faire une comparaison série-intégrale.

Ex 11. 1. Étudier la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$.
4. Montrer que $(n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ et que $W_n \sim W_{n+1}$.

Ex 13. On pourra utiliser une transformation d'Abel.

Ex 14. Dans presque tous les cas, écrire $u_n = e^{\ln(u_n)}$ et comparer $\ln(u_n)$ à $-\alpha \ln(n)$.

Ex 15. Commencer systématiquement par un équivalent (ou un développement asymptotique) de la somme figurant dans l'expression. Attention, on ne passe pas les équivalents à l'exponentielle !

Ex 16. 3. Démontrer que les sommes de Newton $p_n = \theta^n + z_2^n + \dots + z_d^n$ d'un polynôme unitaire à coefficients entiers sont des entiers.

Ex 17. 2. Les paquets sont ici de longueur géométrique : $\lfloor \ln n \rfloor = p$ pour $n \in \llbracket \lfloor e^p \rfloor + 1, \lfloor e^{p+1} \rfloor \rrbracket$.

Ex 18. Regrouper les entiers par nombre de chiffres.

Ex 19. 1.a. Passer au logarithme et utiliser $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

Ex 20. 2. Minorer $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2}$ en remarquant que les $\sigma(k)$, pour $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, sont n entiers distincts.

Ex 22. On pourra considérer $v_n = \frac{u_n}{n^a}$ et se rappeler que, pour l'étude d'un produit infini, c'est bien de prendre le $\ln \dots$

Ex 26. 3. Considérer S_{2n} et séparer les indices pairs des indices impairs ; faire apparaître $\sum_{k=1}^n \frac{\ln(2k)}{2k}$.

Ex 27. 3. Encadrer $H_{\varphi(p)}$ et $H_{\varphi(p)-1}$ par définition de $\varphi(p)$, puis utiliser le développement de la question 2.

Ex 29. 1. Utiliser une tranche de Cauchy $\sum_{k=n+1}^N \frac{u_k}{S_k}$.

2. Comparer $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ à $\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}$.

Ex 30. 1. Poser $R_n = \sum_{k>n} \frac{x_k}{a_k}$ et effectuer une transformation d'Abel.
3. Utiliser Cauchy-Schwarz.

Ex 31. 1. Décomposer $\frac{1}{n^2 - p^2}$ en éléments simples en p et télescoper.

Ex 32. Sommer par paquets le long des « diagonales » $m+n=c$, ou le long des « couronnes » $\max(m, n) = p$.

Ex 33. 1. Utiliser les paquets $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\}$ et la formule du binôme.

Ex 34. On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ et que $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ pour $|x| < 1$.

Ex 35. 3. Pour n fixé, dénombrer les couples (p, q) tels que $p+q^2=n$.