

Chapitre 02 – Intégration

1 Révisions de sup

Proposition 1 (Sommes de Riemann).

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$. Idem pour $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Proposition 2 (Formule de Taylor avec reste intégral). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Définition 3 (Fonctions continues par morceaux).

1. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ telle que pour tout i dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue et admette des limites en x_i (à droite) et en x_{i+1} (à gauche).
2. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux si elle l'est sur tout segment de I .
3. On note $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

2 Intégrale sur un intervalle ouvert

2.1 Définitions

Définition 4.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale de a à b de f converge si la quantité $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite lorsque x tend vers b . On note alors $\int_a^b f(t) dt$ cette limite. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.
2. On adapte la définition lorsque $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a, b], \mathbb{K})$.

Remarque 5. Lorsque f est continue sur $[a, b]$, si F est une primitive de f , la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ revient à dire que F admet une limite finie en b .

Proposition et Définition 6 (Intégrale faussement impropre).

1. **Prop.** Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$ et f admet une limite finie en b , alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$ où $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en b .
2. **Déf.** On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est faussement impropre.

Proposition 7 (Intégrales de référence – à connaître par cœur).

1. (intégrales de Riemann en $+\infty$) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. (intégrales de Riemann en 0) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3. (intégrales de Riemann en a) $\int_a^b \frac{dt}{|t-a|^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

4. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

5. $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

Définition 8. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$, $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si $\int_a^c f(t) dt$ converge et $\int_c^b f(t) dt$ convergent.

2.2 Transformations d'intégrales

Proposition 9 (Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si $f \times g$ admet une limite finie en a et en b , alors les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ sont de même nature. De plus, dans le cas convergent,

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

Proposition 10 (Changement de variables). Soit $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{K})$, $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Alors les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature. S'il y a convergence, elles sont égales. On adapte dans le cas où φ est strictement décroissante.

3 Détermination de la convergence d'une intégrale

3.1 Le cas positif

Remarque 11. Si f est une fonction positive, continue par morceaux sur $[a, b[$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante. Comme pour les séries, si on montre que cette fonction est majorée, alors elle converge, donc $\int_a^b f(t) dt$ converge.

3.2 Intégrabilité

Définition 12. Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **intégrable** sur I si $\int_I |f|$ converge. On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition 13. Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f$ converge.

Proposition 14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction intégrable.

1. $\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$.

2. L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

3.3 Théorèmes de comparaison

Proposition 15 (Théorèmes de comparaison). Soient f et g dans $\mathcal{C}_{pm}([a, b[)$ (on adapte sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$).

1. Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique l'intégrabilité de f sur $[a, b[$.
2. Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, b[$ équivaut à l'intégrabilité de g sur $[a, b[$.
3. Cas particuliers :
 - (a) si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[)$, si $\alpha > 1$ et si $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 - (b) si $f \in \mathcal{C}_{pm}(]0, b])$, si $\alpha < 1$ et si $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

4 Intégration des relations de comparaison

Théorème 16 (Intégration des relations de comparaison). Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$ (on adapte le théorème dans le cas d'autres intervalles semi-ouverts).

1. on suppose g positive et intégrable en b .

(a) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors f est intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

(b) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$, alors f est intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

(c) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$.

2. on suppose g positive et non intégrable en b .

(a) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors f n'est pas intégrable en b et $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

(b) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$, alors f n'est pas intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

(c) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors f n'est pas intégrable en b et $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$.