

Chapitre 02 – Intégration

1 Révisions de sup

Proposition 1 (Sommes de Riemann).

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{K})$. Alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$. Idem pour $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$. Alors $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$.

Proposition 2 (Formule de Taylor avec reste intégral). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in I$. Alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Définition 3 (Fonctions continues par morceaux).

1. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < \dots < x_n = b$ telle que pour tout i dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est continue et admette des limites en x_i (à droite) et en x_{i+1} (à gauche).
2. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux si elle l'est sur tout segment de I .
3. On note $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

2 Intégrale sur un intervalle ouvert

2.1 Définitions

Définition 4.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale de a à b de f converge si la quantité $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite lorsque x tend vers b . On note alors $\int_a^b f(t) dt$ cette limite. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.
2. On adapte la définition lorsque $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$.

Remarque 5. Lorsque f est continue sur $[a, b]$, si F est une primitive de f , la convergence de $\int_a^b f(t) dt$ revient à dire que F admet une limite finie en b .

Proposition et Définition 6 (Intégrale faussement impropre).

1. **Prop.** Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{K})$ et f admet une limite finie en b , alors $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \tilde{f}(t) dt$ où $\tilde{f}$ est le prolongement par continuité de f en b .
2. **Déf.** On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est faussement impropre.

Exemple 6.a. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge car $\frac{\sin(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{t} = 1$, donc $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.

Une question se pose alors : a-t-on un équivalent de la « divergence grossière » pour les intégrales ? La réponse n'est pas

complètement claire.

Remarque 6.b.

1. Si $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \ell \neq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge.
2. En revanche, avoir $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ qui converge **n'implique pas** que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$!

Proposition 7 (Intégrales de référence – à connaître par cœur).

1. (intégrales de Riemann en $+\infty$) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. (intégrales de Riemann en 0) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
3. (intégrales de Riemann en a) $\int_a^b \frac{dt}{|t-a|^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
4. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
5. $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge.

Démonstration.

1. Soit $x \in]1, +\infty[$. Supposons $\alpha \neq 1$. Alors

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_x^1 t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Ainsi, si $\alpha < 1$, $x^{1-\alpha} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et l'intégrale diverge ; si $\alpha > 1$, $x^{1-\alpha} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ et l'intégrale converge.

Enfin, si $\alpha = 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$, donc l'intégrale diverge.

2. On fait de même.
3. On fait de même.

□

Il est tout à fait possible d'intégrer une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$ avec, possiblement, deux problèmes en a et en b .

Définition 8. Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a, b[, \mathbb{K})$, $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si $\int_a^c f(t)dt$ converge et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

Remarque 8.a.

1. Cette définition ne dépend pas du c choisi.
2. Il faut regarder séparément les deux intégrales, sinon on risque de dire n'importe quoi. Par exemple, $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ converge-t-elle ? Si on regarde $\int_{-x}^x t dt$, cette intégrale est toujours nulle $\int_{-x}^x t dt \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0 \dots$
3. Convergence d'une intégrale sur un intervalle ouvert = **deux** étapes.

2.2 Transformations d'intégrales

Deux méthodes peuvent être utiles pour déterminer la nature d'intégrales et les calculer, ce sont l'IPP et le changement de variables. L'idée est d'étendre les formules déjà vues en première année.

Proposition 9 (Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. Si $f \times g$ admet une limite finie en a et en b , alors les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature. De plus, dans le cas convergent,

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Démonstration. On suppose que f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$: dans le cas $]a, b[$, on découpe le segment en deux. Soit $x \in [a, b]$. Alors, par intégration par parties,

$$\int_a^x f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^x - \int_a^x f(t)g'(t)dt.$$

Ainsi, si le crochet a une limite en b , alors l'intégrale de gauche a une limite en b ssi l'intégrale de droite a une limite en b . $\square$

Remarque 9.a. Plutôt que de dire « si $f \times g$ admet une limite finie en a et en b », on dira « si le crochet $[f(t)g(t)]_a^b$ converge. »

Exemple 9.b. L'exemple **ABSOLUMENT FONDAMENTAL : les intégrales oscillantes**. On montre par IPP que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge.

En sup, la formule de changement de variables n'a que besoin d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$. Ici, pour les intégrales sur un intervalle quelconque, on aura besoin de φ bijective.

Proposition 10 (Changement de variables). Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow]a, b[$ une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante. Alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont de même nature. S'il y a convergence, elles sont égales. On adapte dans le cas où φ est strictement décroissante.

Démonstration. Comme pour l'IPP, on suppose que f est définie sur $[a, b]$ et que φ est définie sur $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $[a, b]$.

Soit $w \in [\alpha, \beta]$. Par formule de changement de variables sur un segment, on sait que

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(w)} f(t)dt = \int_\alpha^w \varphi'(u)f(\varphi(u))du.$$

Ainsi, si $\int_a^b f(t)dt$ converge, alors, comme $\varphi(w) \xrightarrow{w \rightarrow \beta} b$, on en déduit que $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))du$ converge.

Réciproquement, si $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))du$ converge, on a, pour $x \in [a, b]$, $\int_a^x f(t)dt = \int_\alpha^{\varphi^{-1}(x)} \varphi'(u)f(\varphi(u))du \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_\alpha^\beta \varphi'(u)f(\varphi(u))du$, d'où la réciproque. $\square$

Exemple 10.a.

1. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ converge et s'exprime à l'aide d'une intégrale de Wallis.
2. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ puis en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

3 Détermination de la convergence d'une intégrale

3.1 Le cas positif

Remarque 11. Si f est une fonction positive, continue par morceaux sur $[a, b]$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante. Comme pour les séries, si on montre que cette fonction est majorée, alors elle converge, donc $\int_a^b f(t)dt$ converge.

3.2 Intégrabilité

Une notion est alors importante, la notion d'**intégrabilité** : c'est l'équivalent de la notion de convergence absolue pour les séries.

Définition 12. Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite **intégrable** sur I si $\int_I |f|$ converge. On note $L^1(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Remarque 12.a. Si $I =]a, b[$, on dit que f est intégrable en b si, pour $c \in]a, b[$, $\int_c^b |f(t)|dt$ converge. Ainsi, $\frac{\ln(x)}{1+x}$ est intégrable en 0, mais pas en $+\infty$.

Proposition 13. Si f est intégrable sur I , alors $\int_I f$ converge.

Démonstration. Pour simplifier les notations, on suppose que $I = [a, b]$.

Cas réel. On écrit que $f = f^+ + f^-$, où $f^+ : x \mapsto \max(0, f(x))$ et $f^- : x \mapsto \max(0, -f(x))$. Ainsi, f^+ et f^- sont positives, $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$. On a alors, pour tout x dans $[a, b]$,

$$0 \leq \int_a^x f^+(t)dt \leq \int_a^x |f(t)|dt \leq \int_a^b |f(t)|dt,$$

donc $x \mapsto \int_a^x f^+(t)dt$ est croissante et majorée : elle converge. Ceci assure la convergence de $\int_a^b f^+(t)dt$. On conclut de même pour f^- puis, par linéarité, pour f .

Cas complexe. On écrit que $f = \Re(f) + i\Im(f)$ et, comme $|\Re(f)| \leq |f|$, $\Re(f)$ est intégrable donc $\int_a^b \Re(f)(t)dt$ converge. De même pour la partie imaginaire et, donc, pour f . $\square$

Remarque 13.a. La réciproque est très, très fautive ! Le plus simple est de penser à la série harmonique alternée et de l'adapter, en posant une fonction qui fait des pics positifs et négatifs d'aire $\frac{1}{k}$.

Proposition 14. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction intégrable.

1. $\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt$.
2. L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Remarque 14.a. Une remarque intéressante : on appelle $L^p(I)$ l'ensemble des fonctions f telles que $|f|^p$ est intégrable. On peut montrer que, pour tout p , $L^p(I)$ est un espace vectoriel (pas simple, mais faisable). En revanche, pour L^2 , c'est très simple, tout vient de l'inégalité $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.

La preuve de la proposition précédente, ainsi que la notion d'intégrabilité, font que l'on va naturellement chercher des théorèmes de comparaison. Ces théorèmes seront exactement les mêmes que pour les séries.

3.3 Théorèmes de comparaison

De même que pour les séries, il va y avoir des théorèmes de comparaison pour les fonctions positive ou de comparaisons à une fonction positive.

Proposition 15 (Théorèmes de comparaison). Soient f et g dans $\mathcal{C}_{pm}([a, b])$ (on adapte sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$).

1. Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$ ou $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, b]$ implique l'intégrabilité de f sur $[a, b]$.
2. Si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de f sur $[a, b]$ équivaut à l'intégrabilité de g sur $[a, b]$.
3. Cas particuliers :
 - (a) si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, +\infty[)$, si $\alpha > 1$ et si $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.
 - (b) si $f \in \mathcal{C}_{pm}(]0, b])$, si $\alpha < 1$ et si $t^\alpha f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, alors f est intégrable sur $]0, b]$.

Démonstration. On ne fait que le cas où $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$, le reste marche car si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$; pareil si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$.

On suppose donc que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$. On dispose de $M > 0$, de $c \in [a, b]$ tel que pour tout $x \geq c$, $|f(x)| \leq M|g(x)|$. Alors, pour $x \geq c$,

$$0 \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq \int_a^c |f(t)| dt + \int_c^x |f(t)| dt \leq \int_a^c |f(t)| dt + \int_c^x |g(t)| dt \leq \int_a^c |f(t)| dt + \int_c^b |g(t)| dt,$$

constante indépendante de x . Croissante et majorée, la fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)| dt$ admet une limite en b , ce qui assure l'intégrabilité de g sur $[a, b]$. $\square$

Remarque 15.a.

1. On peut adapter la proposition en parlant de convergence de l'intégrale (au lieu d'intégrabilité mais en précisant que f et g sont **positives**).
2. Le théorème ne fonctionne pas du tout dans le cas où f et g sont de signes variables. Exemple : $f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} + \frac{|\sin(x)|}{x}$.

Exemple 15.b. Intégrales de Bertrand.

4 Intégration des relations de comparaison

Comme pour les séries, on a une « sommation des relations de comparaison. »

Théorème 16 (Intégration des relations de comparaison). Soient f et g continues par morceaux sur $[a, b[$ (on adapte le théorème dans le cas d'autres intervalles semi-ouverts).

1. on suppose g positive et intégrable en b .

(a) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors f est intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

(b) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$, alors f est intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

(c) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable en b et $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$.

2. on suppose g positive et non intégrable en b .

(a) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$, alors f n'est pas intégrable en b et $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

(b) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} O(g(x))$, alors f n'est pas intégrable en b et $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} O\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

(c) si $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$, alors f n'est pas intégrable en b et $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$.

Démonstration. Cas intégrable.

- on suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \geq c$, $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$. Soit $x \geq c$. Alors

$$\left| \int_x^b f(t)dt \right| \leq \int_x^b |f(t)|dt \leq \varepsilon \int_x^b g(t)dt,$$

ce qui est exactement la définition de $\int_x^b f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_x^b g(t)dt\right)$.

- on adapte

- cela vient du premier point car $f(x) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(x)$ signifie que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} g(x) + o(g(x))$.

Cas non intégrable.

- on suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow b}{=} o(g(x))$. Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \geq c$, $|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|$. Soit $x \geq c$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x f(t)dt \right| &\leq \int_a^x |f(t)|dt \\ &\leq \int_a^c |f(t)|dt + \int_c^x |f(t)|dt \\ &\leq \int_a^c |f(t)|dt + \varepsilon \int_c^x |g(t)|dt \\ &\leq \underbrace{\int_a^c |f(t)|dt - \int_a^c |g(t)|dt}_{=K} + \varepsilon \int_a^x |g(t)|dt \end{aligned}$$

Or, comme $\int_a^x |g(t)|dt \xrightarrow{x \rightarrow b} +\infty$, on a

$$\frac{K}{\int_a^x |g(t)|dt} \xrightarrow{x \rightarrow b} 0,$$

ce qui donne l'existence de $c' \geq c$ tel que pour tout $x \geq c'$ cette quantité ci-dessus soit inférieure ou égale à ε . Ainsi, pour $x \geq c'$, on en déduit que

$$\left| \int_a^x f(t)dt \right| \leq 2\varepsilon \int_a^x |g(t)|dt,$$

ce qui est la définition de $\int_a^x f(t)dt \underset{x \rightarrow b}{=} o\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

- On adapte !
- On adapte !


Exemple 16.a.

- Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell > 0$, montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.
- Établir un développement asymptotique à n'importe quel ordre de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.