

TD 02 Intégration

1 Exercices classiques

Exercice 1. Intégrales de Bertrand. ●○○ Étudier, selon les valeurs des réels α et β , la nature de l'intégrale

$$B(\alpha, \beta) = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

Exercice 2. Suite d'intégrales – $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt$. ●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt$.

- Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 .
- Pour $n \geq 1$, établir par intégration par parties la relation $I_n = -n I_{n-1}$.
- En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Retrouver le résultat en effectuant le changement de variable $t = e^{-u}$.

Exercice 3. Formule de Wallis – $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. ●○○ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

- Calculer W_0 et W_1 . Pour $n \geq 2$, établir par intégration par parties la relation $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.
- En déduire W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (distinguer n pair et n impair).
- Montrer que (W_n) est décroissante et que $W_n \rightarrow 0$. En encadrant W_{2n} entre W_{2n+1} et W_{2n-1} , montrer que $W_{2n} \sim W_{2n+1}$, puis établir la *formule de Wallis* :

$$\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

- En déduire un équivalent simple de W_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 4. Suite d'intégrales – $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. ●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

- Justifier l'existence de J_n . Calculer J_1 .
- En écrivant $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) - t^2}{(1+t^2)^n} dt$ et en intégrant par parties $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt$, établir la relation

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n.$$

- En déduire la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer que (J_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 5. Sommes de Riemann. ●○○ Déterminer la limite des suites suivantes :

- $u_n = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}$
- $v_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n}$
- $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
- $s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 6. Intégrale impropre – $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$. ●●○ On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

- Justifier la convergence de I et de J .

2. Montrer que $I = J$.

3. En écrivant $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt$, effectuer le changement de variable $u = 2t$ et montrer à l'aide de la relation $\sin(\pi - u) = \sin u$ que $\int_0^\pi \ln(\sin u) du = 2I$. En déduire la valeur de $I + J$ en fonction de I .

4. Conclure.

Exercice 7. Intégrale impropre à paramètre – $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$. ●●○ Pour $a > 0$, on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$.

1. Justifier que $I(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.

2. Montrer que $I(1) = 0$ à l'aide du changement de variable $t \mapsto 1/t$.

3. En effectuant le changement de variable $t = au$, montrer que

$$I(a) = \frac{1}{a} \left(I(1) + \frac{\pi}{2} \ln a \right).$$

En déduire $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 8. Intégrale de Cauchy-Frullani. ●●○ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

1. Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt$.

2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ converge et calculer sa valeur.

3. Application : montrer que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 9. Étude asymptotique – $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. ●●○ On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Justifier que F est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et préciser ses variations.

2. Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. En utilisant que $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ et en intégrant cette comparaison, établir que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.

3. En intégrant par parties sur $[x, X]$ puis en faisant $X \rightarrow +\infty$, montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 10. Intégrale de Dirichlet. ●●○ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$.

1. Calculer $I_{n+1} - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la valeur de I_n .

2. Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\pi, \pi[$. En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

4. En déduire, par le changement de variable $u = (2n+1)t$, la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

2 Révisions de sup

Exercice 11. Sommes de Riemann – calculs de limites. ●○○ Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2 - k^2}}$

$$2. b_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{4n^2 - k^2}$$

$$3. c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

$$4. d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

Exercice 12. *Un classique très formateur.* ●○○ Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Calculer $I_{n,0}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver, pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$. En déduire l'expression de $I_{p,q}$.
3. En calculant $I_{p,q}$ d'une seconde manière, montrer que

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

4. Traiter de même $J_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$ et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n! (n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Exercice 13. *Sommes de Riemann – au-delà du théorème.* ●●○

1. Déterminer la limite de $y_n = \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right)$.
2. Soit $\alpha > -1$. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14. *Inégalité de Jensen.* ●●○ Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe.

1. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tous $x, c \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq \varphi(c) + (x-c)\varphi'(c)$.
2. En choisissant convenablement c , établir l'inégalité de Jensen :

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) dt.$$

3. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, d'intégrale égale à 1. Établir $\varphi \left(\int_a^b f g \right) \leq \int_a^b (\varphi \circ f) g$.
4. Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : x \mapsto x^2$, puis à $\varphi_2 : x \mapsto 1/x$ (pour $f > 0$), et retrouver ces deux résultats à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement positive, d'intégrale égale à 1. Montrer que $\int_0^1 h(t) \ln(h(t)) dt \geq 0$.
6. Soient h et k deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, strictement positives, d'intégrales égales à 1. Montrer que

$$\int_0^1 h(t) \ln(h(t)) dt \geq \int_0^1 h(t) \ln(k(t)) dt.$$

Exercice 15. *Formule de la moyenne et oscillations rapides.* ●●○

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

2. Soient $T > 0$, $f \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T -périodique. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) g(nt) dt$.

Exercice 16. Sommes de Riemann pour une fonction monotone intégrable. ●●○ Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \int_0^1 f(t) dt$ (la valeur $+\infty$ étant autorisée).
2. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si la suite (S_n) converge, et qu'alors $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$.
3. Variante. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f.$$

3 Convergence d'intégrales et intégrabilité

3.1 Natures d'intégrales

Exercice 17. Nature d'intégrales – niveau 1. ●○○ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \sinh t}}$
2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$
3. $\int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$
4. $\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$
6. $\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt$

Exercice 18. Nature d'intégrales avec paramètres. ●○○ Discuter, selon les paramètres réels indiqués, l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

1. $x \mapsto \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;
2. $x \mapsto \frac{(\ln(1/x))^\gamma}{x^\alpha(1-x)^\beta}$ sur $]0, 1[$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$;
3. $x \mapsto \frac{\ln(1+x^a)}{x^b}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où $a > 0$ et $b > 0$;
4. $x \mapsto \exp(-(\ln x)^\alpha)$ sur $[2, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

Exercice 19. Nature d'intégrales – les pièges. ●●○ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$
2. $\int_e^4 \frac{dt}{\ln(\ln t)}$
3. $\int_0^{+\infty} \cos(e^t) dt$
4. $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$
5. $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 20. Logarithmes itérés. ●●○ Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}.$$

3.2 Semi-convergence

Exercice 21. $\int \sin(t)/t^\alpha dt$: la discussion complète. ●●○ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha(t) = \frac{\sin t}{t^\alpha}$ pour $t \geq 1$. Le but est de discuter, selon α , la convergence et la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$.

1. Traiter le cas $\alpha > 1$.
2. Pour $\alpha \in]0, 1]$, établir la convergence de l'intégrale par une intégration par parties.
3. Étudier la convergence absolue.
4. Pour $\alpha \leq 0$, minorer $\int_1^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} f_\alpha - \int_1^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} f_\alpha$ et conclure à une contradiction avec la convergence.
5. Récapituler dans un tableau.

Exercice 22. $\int \ln(1 + \sin(t)/t^\alpha) dt$. ●●○ Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) dt$, puis commenter en comparant avec la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

Exercice 23. Le théorème des équivalents ne s'applique pas aux fonctions de signe variable. ●●○

1. Étudier le comportement, lorsque $x \rightarrow +\infty$, de $u(x) = \int_2^x \frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} dt$.
2. En déduire l'existence de deux fonctions f et g continues sur $[2, +\infty[$, équivalentes en $+\infty$, telles que $\int_2^{+\infty} f$ converge et $\int_2^{+\infty} g$ diverge.
3. Mêmes questions avec $\int_2^x \frac{\cos t}{\ln t} dt$ et $\int_2^x \frac{\cos t}{\ln t + \cos t} dt$.

3.3 Exercices théoriques

Exercice 24. f et $1/f$ intégrables. ●●○ Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On suppose que f et $1/f$ sont toutes deux intégrables sur I . Montrer que I est borné.

Exercice 25. f et f'' intégrables. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, puis que cette limite est nulle.
2. En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, puis que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. Montrer que $f f'$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 26. Domaine de définition d'une transformée de Laplace. ●●○

1. Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ converge. Montrer que pour tout $x > a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.
2. Soit $g \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{+\infty} g$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 27. Que manque-t-il pour tendre vers 0 ? ●●○ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge.

1. Donner un exemple d'une telle fonction, à valeurs positives, intégrable et non bornée.
2. On suppose f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t)^2 dt$ bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 28. Un monstre. ●●● Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta}.$$

4 Calcul d'intégrales

Exercice 29. Batterie de calculs. ●○○ Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1}$
- $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$
- $\int_0^\pi \frac{dt}{2 + \cos t}$
- $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$
- $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}, \text{ où } a < b$

Exercice 30. $\int_0^{+\infty} \ln(1 + 1/t^2) dt$. ●○○

- Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ et calculer sa valeur.
- Même travail pour $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 31. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ et $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$. ●●○

- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1+t^4}$.
- Établir l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4}$.
- En calculant la somme de ces deux intégrales, en déduire leur valeur commune.
- En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$.

Exercice 32. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$. ●●○

- Soit $n \geq 2$. Vérifier l'existence puis calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}.$$

- Généralisation. Soient $n \geq 2$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et dont toutes les racines sont strictement négatives, et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ et en donner une expression.

Exercice 33. Une intégrale avec des bornes variables. ●●○ On pose $g : t \mapsto \frac{t \operatorname{Arctan} t}{(1+t^2)^2}$.

- Montrer que $I = \int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.
- Soit $F : x \mapsto \int_x^{1/x} g(t) dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de F' ne faisant pas intervenir Arctan .
- En déduire la valeur de I .

Exercice 34. Parties entières et constante d'Euler. ●●○ On note γ la constante d'Euler, c'est-à-dire la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1. Montrer l'existence et calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} dx$.
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2} dx$ converge et vaut $1 - \gamma$.
3. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x} dx$ converge.

Exercice 35. Une intégrale et une somme. ●●○

1. Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ est bien définie, et la calculer.
3. Montrer que $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 36. $\int_0^{+\infty} \exp(-a^2/t^2 - b^2 t^2) dt$. ●●○ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{t^2} - b^2 t^2\right) dt.$$

Exercice 37. Fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$. ●●○

1. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{t - \omega}$.
2. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle de degré ≤ -2 , à pôles simples et non réels. En déduire une expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ à l'aide des coefficients de la décomposition en éléments simples de F associés aux pôles de partie imaginaire strictement positive.
3. Application : calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 38. Intégrale de Poisson. ●●○

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) x + 1 \right).$$

2. En déduire, à l'aide de sommes de Riemann, la valeur de $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta$ pour $|r| < 1$, puis pour $|r| > 1$.
3. Que se passe-t-il lorsque $r \rightarrow 1$? Commenter.

5 Asymptotique

Exercice 39. Logarithme intégral. ●●○ On pose, pour $x > 1$, $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que $\text{li}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.
2. Déterminer un développement asymptotique de $\text{li}(x)$ à deux termes en $+\infty$, puis à n termes.

Exercice 40. $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. ●●○ On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition naturel de f et justifier que f y est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 41. Étude complète de $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$. ●●○

1. Déterminer le domaine de définition de F et calculer F' .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$, puis, en poussant le calcul, $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right)$.
3. Déterminer un équivalent simple de F en 0^+ , puis montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\ln x + C + o(1)$.
4. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.

Exercice 42. $\int_0^x e^{it^2} dt$. ●●○ On pose $f(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
2. Vérifier que

$$\ell - f(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt,$$

et en déduire un équivalent de $\ell - f(x)$ en $+\infty$.

3. En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ et de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$.

Exercice 43. Équivalents en $+\infty$. ●●○ Trouver un équivalent simple, lorsque $x \rightarrow +\infty$, de :

1. $\int_1^x e^t t^\alpha dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $\int_x^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$, où $\alpha > 0$;
3. $\int_1^x e^{(\ln t)^\alpha} dt$, où $\alpha > 0$;
4. $\int_1^x t^t dt$;
5. $\int_x^{+\infty} t^{-t} dt$.

Exercice 44. $f'/f \sim \mu/x$. ●●○ Soient $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mu}{x}$.

1. On suppose $\mu > -1$ et $\mu \neq 0$. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et que

$$\int_1^x f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x f(x)}{\mu + 1}.$$

2. Énoncer et démontrer un résultat analogue lorsque $\mu < -1$.
3. Que peut-on dire si l'on suppose seulement $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$ avec $a < 0$?

Exercice 45. Moyenne d'une fonction périodique. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T -périodique, de moyenne $\mu = \frac{1}{T} \int_0^T f$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mu \ln x + c + o(1)$.
2. À quelle condition l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge-t-elle? À quelle condition la fonction $t \mapsto f(t)/t$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
3. On suppose cette condition réalisée et on note ℓ la limite en $+\infty$ de $F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$. Montrer que $F(x) - \ell = O(1/x)$. Que dire de f si l'on a de plus $F(x) - \ell = o(1/x)$?

Exercice 46. Termes généraux définis par une intégrale. ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant ($\alpha > 0$, $a \geq 0$).

- $u_n = \int_0^{1/n^\alpha} \sqrt{|\ln t|} dt$
- $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$
- $u_n = \int_0^1 t^n \ln(1-t) dt$
- $u_n = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n} ; \quad v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$
- $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt) dt$
- $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$

6 Du côté des concours

Exercice 47. CCINP MP 2015. Soient $p \in \mathbb{N}$ fixé et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t + 1} e^{-nt} dt$.

- Montrer l'existence de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On pose, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, $T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$. Déterminer l'expression de $T(a, b)$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}} - S_n$.
- Montrer que la suite (S_n) converge.
- Montrer que $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}}$.

Exercice 48. Mines-Télécom MP 2017. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue, décroissante, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que $f(x) = o_x \rightarrow +\infty \left(\frac{1}{x} \right)$.
- Trouver un contre-exemple aux questions précédentes si f n'est plus décroissante.

Exercice 49. Mines-Ponts MP 2026. Soit $\alpha > 1$.

- Montrer que l'équation $x^\alpha = \sin(x)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on appellera a .
- Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{|t^\alpha - \sin(t)|}} dt$.

Exercice 50. CCINP 2016. ●○○

- Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\int_0^1 t[1/t] dt$ converge puis calculer sa valeur, en admettant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 51. CCINP 23. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

- Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

(a) Montrer que I est bien convergente.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.

(d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I.

Exercice 52. Mines-Ponts 19, Centrale 17. Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\frac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+ .
3. Montrer que $f(x)$ est dominée par $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.
4. En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; puis établir que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

Exercice 53. Mines-Ponts 22. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) - \int_n^{n+1} (t - n - 1) f'(t) dt$.
2. On suppose que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t) dt \right)$ converge.
3. Application à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n^a}$ pour $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 54. On définit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

1. Justifier la convergence de I.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^3(t) = -\frac{1}{4} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin(t)$.
3. Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
4. Montrer que $g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est définie et prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire la valeur de I.

Exercice 55. Mines 24. Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 56. CCINP 24. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln(x)^n dx$.

1. Justifier l'existence de $I_{n,p}$.
2. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$.
3. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 57. Mines-Télécom 23. 1. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

2. Après avoir justifié sa convergence, calculer $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt$.

Exercice 58. Centrale 23.

Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

7 Pour aller plus loin

Exercice 59. *Lemme de Riemann-Lebesgue.* ●●○ Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On veut montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

1. Traiter le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact.
2. Traiter le cas où f est une fonction en escalier à support compact.
3. Conclure dans le cas général.
4. Application : soit $g \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{C})$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt$.

Exercice 60. *Multiplicateurs et contre-exemples.* ●●○ Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les $u \in E$ telles que, pour toute $v \in E$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction uv soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer les $u \in E$ telles que, pour toute $v \in E$ bornée sur $\mathbb{R}_+$, la fonction uv soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Existe-t-il une fonction f lipschitzienne et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ diverge ?

Exercice 61. *Non-convergence des sommes de Riemann.* ●●○

1. Construire une fonction f continue, strictement positive et intégrable sur $]0, 1[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2.$$

2. Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n \geq 2}$?
3. Comparer avec le cas d'une fonction monotone intégrable. Quelle hypothèse a été perdue ?

Exercice 62. *Inégalité de Hardy L^2 .* ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{si } x > 0, \quad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En intégrant par parties, montrer que pour tout $a > 0$, $\int_0^a g^2 \leq 2 \int_0^a gf$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2$.
4. Montrer que la constante 4 est optimale.

Exercice 63. *Inégalité de Hilbert.* ●●○

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - (a) Prouver l'égalité $\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{it}) e^{it} dt$.
 - (b) En déduire l'inégalité $\int_{-1}^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 dt$.
2. Établir alors l'*inégalité de Hilbert* : pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{p=0}^n a_p^2.$$

Exercice 64. *Contrôle de $\int f'^2$ par $\int f^2$ et $\int f''^2$.* ●●○

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f^2 et f''^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''$, puis que $f f'$ admet des limites nulles en $\pm\infty$.

(b) En déduire que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} f'^2 \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} f''^2}$.

(c) Montrer que l'égalité n'a lieu que pour $f = 0$, mais que la constante 1 ne peut pas être remplacée par une constante strictement plus petite.

2. On suppose maintenant $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, avec f^2 et f''^2 intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

(a) Établir l'identité $\int_{\mathbb{R}_+} (f^2 + f''^2 - f'^2) = \int_{\mathbb{R}_+} (f'' + f' + f)^2 + (f(0) + f'(0))^2$.

(b) En remplaçant f par $x \mapsto f(\lambda x)$ pour un $\lambda > 0$ bien choisi, en déduire $\int_{\mathbb{R}_+} f'^2 \leq 2 \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2 \times \int_{\mathbb{R}_+} f''^2}$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 65. Fonctions à moments nuls. ●●●

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 t^k f(t) dt = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $]0, 1[$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1+i)x} dx$.

3. En déduire une fonction f continue, non identiquement nulle, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrale nulle.

Exercice 66. Inégalité de Weyl. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f'^2 et $x \mapsto x^2 f(x)^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Établir l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) f'(x) dx$.

3. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx \right)^{1/2},$$

et étudier le cas d'égalité.

Reformulée à l'aide de la transformée de Fourier, cette inégalité est une forme du principe d'incertitude de Heisenberg (Weyl, 1928).

Exercice 67. Inégalité de Carlson. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que

$$S = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty \quad \text{et} \quad T = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx < +\infty.$$

1. Justifier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} |f| \leq \sqrt{\pi} \sqrt[4]{ST}$, et étudier le cas d'égalité.

3. En déduire que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ non identiquement nulle,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sqrt{\pi} \sqrt[4]{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2}.$$

Exercice 68. Inégalité de Wirtinger. ●●● Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Pour $f \in E$, montrer la convergence des intégrales

$$I(f) = \int_0^1 2f(t)f'(t) \cotan(\pi t) dt \quad \text{et} \quad J(f) = -\pi \int_0^1 (1 + \cotan^2(\pi t)) f(t)^2 dt,$$

puis comparer $I(f)$ et $J(f)$.

2. En déduire que pour toute $f \in E$,

$$\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'^2,$$

et déterminer les fonctions de E réalisant l'égalité.

Exercice 69. *Exponentielle imaginaire oscillant rapidement.* ●●● Soient $\mu > 0$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' \geq \mu$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g = \frac{1}{1 + |f|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{if(t)} dt$ converge.
3. Application : retrouver la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$.

Exercice 70. *Valeur principale de Cauchy.* ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $C > 0$ tels que

$$\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $I_\varepsilon(f) = \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$.

1. Montrer que $I_\varepsilon(f)$ est bien défini pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.
2. Montrer que $I_\varepsilon(f)$ admet une limite finie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Indications

- Ex 1.** On distinguera les cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, et $\alpha = 1$.
- Ex 5.** 4. On comparera avec des intégrales de Riemann de $t \mapsto 1/t$.
Penser à transformer un produit en somme et à faire apparaître des sommes de Riemann.
- Ex 8.** 2. On écrira $\int_{\varepsilon}^X \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ à l'aide d'un changement de variable, puis on fera tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $X \rightarrow +\infty$.
- Ex 13.** 1. On encadrera $\sin u$ à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange.
2. Attention : pour $\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ n'est pas continue sur $[0, 1]$; le théorème du cours ne s'applique pas tel quel.
- Ex 14.** 6. On pourra montrer que $x \ln(x) \geq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- Ex 15.** 2. On découpera $[0, T]$ en n intervalles de même longueur et on appliquera la première question sur chacun d'eux.
- Ex 16.** 1. Comme dans la comparaison série-intégrale, encadrer chaque terme $\frac{1}{n} f(k/n)$.
2. Séparer en deux l'intégrale, $\int_0^{1/n}$ d'un côté et $\int_{1/n}^1$ de l'autre.
- Ex 18.** Comparer à chaque fois à une intégrale de Riemann ou bien à $\ln(x)$.
- Ex 19.** Pour les trois dernières, chercher le changement de variable qui ramène à une intégrale du type $\int \frac{\sin u}{u^\gamma} du$.
- Ex 20.** On écrira ces expressions sous la forme $e^{-\varphi(x)}$ et on comparera $\varphi(x)$ à $\alpha \ln x$ pour un α bien choisi.
- Ex 21.** 3. Utiliser $|\sin t| \geq \sin^2 t$ pour tout t réel.
- Ex 22.** Un développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ ne suffit pas : pousser à l'ordre 2 et traiter à part le terme en $\sin^2(t)/t^{2\alpha}$, soit par intégration par parties, soit par comparaison à une somme avec découpage par la relation de Chasles.
- Ex 23.** 1. Écrire $\frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}}$, et faire un dl à l'ordre 2.
- Ex 24.** Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sur un segment de I .
- Ex 25.** 3. Démontrer d'abord que f'^2 est intégrable en écrivant $\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''$, et conclure par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Ex 26.** 1. Poser $F : y \mapsto \int_0^y f(t)e^{-at} dt$, puis considérer $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-\delta t} dt$ avec $\delta = x - a > 0$.
- Ex 27.** 2. Majorer $|f(x)|$ en intégrant f sur un intervalle suffisamment petit autour de x .
3. Pour $y > x$, écrire $f(y) - f(x)$ comme une intégrale, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation de Chasles.
- Ex 28.** On découpera $\mathbb{R}_+$ en intervalles $[n\pi, (n+1)\pi]$ et, sur chacun d'eux, on isolera un voisinage des points où $\sin$ s'annule, de longueur bien choisie en fonction de n .
- Ex 29.** 2. Intégrer par parties.
3. Poser $u = \tan(t/2)$.
5. Poser $t = a + (b-a)\sin^2 \theta$.
- Ex 30.** 1. Intégrer par parties sur un segment $[\varepsilon, X]$, puis passer à la limite.
- Ex 31.** 2. Changement de variable $u = 1/t$.
3. Poser $u = t - 1/t$.
- Ex 32.** 1. Décomposer en éléments simples, puis regrouper les logarithmes avant de passer à la limite.
- Ex 33.** Remarquer que $F(1) = 0$ et que $F(x) \rightarrow I$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, puis intégrer l'expression de F' entre x et 1

- Ex 34. 3.** Contrairement aux précédentes, cette intégrale n'est pas absolument convergente : on regroupera les contributions sur les intervalles $[n, n+1]$.
- Ex 36.** Poser $u = bt - \frac{a}{t}$: cette application réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On pourra aussi effectuer le changement de variable $t \mapsto a/(bt)$ et combiner les deux écritures obtenues.
- Ex 37.** Rappel : le coefficient de la DES associé à un pôle simple ω de $1/Q$ vaut $1/Q'(\omega)$
- Ex 39.** Utiliser des intégrations par parties et l'intégration des relations de comparaison.
- Ex 40.** Écrire $f(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$: la première fonction se prolonge par continuité en 1, et la seconde intégrale se calcule explicitement.
- Ex 41. 4.** On donne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.
- Ex 43.** Dans chaque cas, une intégration par parties bien choisie fait apparaître l'intégrale de départ multipliée par un $o(1)$
- Ex 45. 1.** Écrire $f = \mu + (f - \mu)$: une primitive G de $f - \mu$ est T -périodique, donc bornée, ce qui permet d'intégrer par parties $\int_1^x \frac{f(t) - \mu}{t} dt$
- Ex 46.** Selon les cas : changement de variable ramenant à une intégrale indépendante de n , découpage de l'intervalle en deux, ou intégration par parties.
- Ex 59. 3.** Approcher f par une fonction en escalier à support compact, au sens où $\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi|$ est arbitrairement petit.
- Ex 60. 1.** La condition est le caractère borné de u . Pour la réciproque, faire une contraposée.
3. Penser aussi à des pics.
- Ex 61. 1.** Qui s'y frotte...
- Ex 62. 1.** Reconnaître un taux d'accroissement en 0.
2. Déterminer d'abord une primitive de g^2 en fonction de $F : x \mapsto \int_0^x f$.
4. Tester des fonctions du type $x \mapsto x^{-\alpha}$ tronquées.
- Ex 63. 1.** L'expression est linéaire en P : il suffit de traiter le cas $P = X^k$
2. Appliquer ce qui précède à $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$.
- Ex 64.** Pour l'optimalité de la constante 1, tester des fonctions du type $x \mapsto \varphi(x/n) \cos x$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support inclus dans un segment.
- Ex 65. 1.** Raisonner par l'absurde : si f ne change de signe qu'en $x_1 < \dots < x_m$ avec $m \leq n$, considérer $Q = \prod_{i=1}^m (X - x_i)$.
3. Chercher f sous la forme $x \mapsto e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$ et se ramener, par le changement de variable $x = u^4$, à la question précédente
- Ex 66. 1.** Sur $[-1, 1]$, f est continue donc bornée. Si $|x| \geq 1$, $f(x)^2 \leq x^2 f(x)^2$.
- Ex 67. 2.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, écrire $\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}} \left(|f(x)| \sqrt{\alpha + \beta x^2} \right) dx$, appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis optimiser en α et β .
- Ex 68. 1.** Pour la convergence, utiliser $f(0) = f(1) = 0$ et le caractère $\mathcal{C}^1$ de $f : f(t) = O(t)$ en 0 et $O(1-t)$ en 1, alors que $\cotan(\pi t)$ y est équivalent à $\frac{1}{\pi t}$ et $\frac{-1}{\pi(1-t)}$; pour la comparaison, intégrer $I(f)$ par parties
2. Développer $\int_0^1 (f'(t) - \pi \cotan(\pi t) f(t))^2 dt \geq 0$.
- Ex 69. 1.** Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Là où f' ne s'annule pas, écrire $e^{if} = \frac{1}{if'} (e^{if})'$ et intégrer par parties ; contrôler séparément un voisinage du point où f' s'annule.

Ex 70. 2. Exploiter la symétrie $x \mapsto -x$ sur $[-1, 1]$ pour faire apparaître $f(x) - f(-x)$.