TD 02
Intégration

1 Exercices classiques

Exercice 1. *Intégrales de Bertrand*. ●○○ Étudier, selon les valeurs des réels α et β, la nature de l'intégrale

$$B(\alpha,\beta)=\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}.$$

Correction. C'est en fait + simple que les séries de Bertrand.

- si $\alpha>1$, soit $\gamma\in]1,\alpha[$. Alors $t^\beta\dfrac{1}{t^\alpha\ln(t)^\beta}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc $\dfrac{1}{t^\alpha\ln(t)^\beta}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\beta}\right)$, intégrable, donc, par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ converge.
- si $\alpha<1$, on montre que, pour $\gamma\in]\alpha,1[$, $\dfrac{1}{t^\gamma}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha\ln(t)^\beta}\right)$.
- si $\alpha=1$, on remarque que, pour $x\geqslant \mathrm{e}$,

$$\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{dt}{t\ln(t)^\beta}=\frac{1}{1-\beta}\ln(x)^{1-\beta},$$

quantité qui converge si et seulement si $\beta>1$

Exercice 2. *Suite d'intégrales* – $I_n=\displaystyle\int_0^1(\ln t)^n\,\mathrm{d}t$. ●○○ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_0^1(\ln t)^n\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Calculer I_0.

Correction. Déjà, la fonction $t\mapsto\ln(t)^n$ est continue sur $]0,1]$. Ensuite, par croissances comparées, $\ln(t)^n\underset{t\to0}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$, intégrable en 0. Par comparaison, $t\mapsto\ln(t)^n$ est intégrable en 0. On a $\mathrm{I}_0=1$.

2. Pour $n\geqslant1$, établir la relation $\mathrm{I}_n=-n\,\mathrm{I}_{n-1}$.

Correction. Notons $u(t)=\ln(t)^n$, $u'(t)=\dfrac{n}{t}\ln(t)^{n-1}$, $v(t)=t$, $v'(t)=1$. Comme $u(t)v(t)$ admet des limites finies en 0 et en 1 (par croissances comparées), on en déduit, par intégration par parties, que

$$\mathrm{I}_n=[\ln(t)^n t]_0^1-\int_0^1\frac{n}{t}\ln(t)^{n-1}t\,dt=-n\mathrm{I}_{n-1}.$$

3. En déduire la valeur de I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Correction. On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n=(-1)^n n!$.

4. Retrouver le résultat en effectuant le changement de variable $t=e^{-u}$.

Correction. On note $\varphi:u\mapsto\mathrm{e}^{-u}$. Alors φ est une bijection décroissante et $\mathscr{C}^1$ de $[0,+\infty[$ dans $]0,1]$. Ainsi, par changement de variables,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n&=\int_0^1\ln(t)^n dt\\&=-\int_0^{+\infty}(-u)^n\times(-\mathrm{e}^{-u})du\\&=(-1)^n\int_0^{+\infty}u^n\mathrm{e}^{-u}dt.\end{aligned}$$

En faisant à nouveau des IPP, on retrouve le même résultat.

Exercice 3. *Formule de Wallis* – $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$. ●○○

Correction. J'enfonce vraiment le clou... c'est un essentiel qu'on ne corrigera pas.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1. Pour $n \geqslant 2$, établir par intégration par parties la relation $W_n = \dfrac{n-1}{n} W_{n-2}$.
2. En déduire W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (distinguer n pair et n impair).
3. Montrer que (W_n) est décroissante et que $W_n \to 0$. En encadrant W_{2n} entre W_{2n+1} et W_{2n-1}, montrer que $W_{2n} \sim W_{2n+1}$, puis établir la *formule de Wallis* :
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$
4. En déduire un équivalent simple de W_n quand $n \to +\infty$.

Correction. Exercice déjà fait !

Exercice 4. *Suite d'intégrales* – $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$. ●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

1. Justifier l'existence de J_n. Calculer J_1.

   Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $f : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ensuite, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{2n}}$, intégrable en $+\infty$ ($2n > 1$). Ainsi, J_n est bien définie.
   En particulier, $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

2. En écrivant $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)-t^2}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ et en intégrant par parties $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$, établir la relation
$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n.$$
3. En déduire la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que (J_n) converge et calculer sa limite.

Correction. Remarque. On peut faire le changement de variable suivant : tan est une bijection $\mathscr{C}^1$ de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $[0, +\infty[$. Ainsi, en posant le $t = \tan(\theta)$, i.e. $\theta = \mathrm{Arctan}(t)$, on a $\dfrac{1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{(1+\tan(\theta)^2)^n} = \cos(\theta)^{2n}$. De plus, $dt = \dfrac{1}{1+\tan(\theta)^2} d\theta = \cos(\theta)^2 d\theta$, d'où
$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{2n+1} d\theta.$$
C'est une intégrale de Wallis, d'où le fait que l'on trouve le même résultat !

Exercice 5. *Sommes de Riemann.* ●○○ Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$
2. $v_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(n^2+k^2\right)^{1/n}$
3. $w_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
4. $s_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 6. *Intégrale impropre* – $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$. ●●○ On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier la convergence de I et de J.
2. Montrer que $\mathrm{I} = J$.
3. En écrivant $\mathrm{I} + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\left(\tfrac{1}{2}\sin(2t)\right) \mathrm{d}t$, effectuer le changement de variable $u = 2t$ et montrer à l'aide de la relation $\sin(\pi - u) = \sin u$ que $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{I}$. En déduire la valeur de $\mathrm{I} + J$ en fonction de I.
4. Conclure.

Exercice 7. *Intégrale impropre à paramètre – $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.* ●◐○ Pour $a > 0$, on pose $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que $\mathrm{I}(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.
2. Montrer que $\mathrm{I}(1) = 0$ à l'aide du changement de variable $t \mapsto 1/t$.
3. En effectuant le changement de variable $t = au$, montrer que
$$\mathrm{I}(a) = \frac{1}{a}\left(\mathrm{I}(1) + \frac{\pi}{2}\ln a\right).$$
En déduire $\mathrm{I}(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 8. *Intégrale de Cauchy-Frullani.* ●◐○ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
3. Application : montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 9. *Étude asymptotique – $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.* ●◐○ On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et préciser ses variations.
2. Montrer que $F(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$. En utilisant que $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t}$ et en intégrant cette comparaison, établir que $F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x$.
3. En intégrant par parties, montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 10. *Intégrale de Dirichlet.* ●●○ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la valeur de I_n.
2. Montrer que $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$. En déduire que
$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t)\,\sin\big((2n+1)t\big)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$.
4. En déduire, par le changement de variable $u = (2n+1)t$, la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

2 Révisions de sup

Exercice 11. *Sommes de Riemann – calculs de limites.* ◐○○ Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2-k^2}}$
2. $b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{4n^2-k^2}$
3. $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$
4. $d_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

Exercice 12. *Un classique très formateur.* ●○○ Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $\mathrm{I}_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $\mathrm{I}_{n,0}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
2. Trouver, pour $p\in\mathbb{N}$ et $q\in\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathrm{I}_{p,q}$ et $\mathrm{I}_{p+1,q-1}$. En déduire l'expression de $\mathrm{I}_{p,q}$.
3. En calculant $\mathrm{I}_{p,q}$ d'une seconde manière, montrer que
$$\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}.$$
4. Traiter de même $J_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+3}\binom{n}{k} = 2^{2n+2}\,\frac{n!\,(n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Exercice 13. *Sommes de Riemann – au-delà du théorème.* ●◐○

1. Déterminer la limite de $y_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
2. Soit $\alpha > -1$. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ lorsque $n\to+\infty$.

Exercice 14. *Inégalité de Jensen.* ●◐○ Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et convexe.

1. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tous $x,c\in\mathbb{R}$, $\varphi(x)\geqslant\varphi(c)+(x-c)\varphi'(c)$.
2. En choisissant convenablement c, établir l'*inégalité de Jensen* :
$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ continue, d'intégrale égale à 1. Établir $\varphi\left(\int_a^b fg\right)\leqslant\int_a^b(\varphi\circ f)\,g$.
4. Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : x\mapsto x^2$, puis à $\varphi_2 : x\mapsto 1/x$ (pour $f>0$), et retrouver ces deux résultats à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Soit $h:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue, strictement positive, d'intégrale égale à 1. Montrer que $\int_0^1 h(t)\ln\big(h(t)\big)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.
6. Soient h et k deux fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, strictement positives, d'intégrales égales à 1. Montrer que
$$\int_0^1 h(t)\ln\big(h(t)\big)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1 h(t)\ln\big(k(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15. *Formule de la moyenne et oscillations rapides.* ●●○

1. Soient $f,g\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Soient $T>0$, $f\in\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R})$ et $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^T f(t)\,g(nt)\,\mathrm{d}t$.

Correction. On suppose g positive dans un premier temps. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On écrit que

$$\int_0^T f(t)g(nt)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} f(t)g(nt)dt.$$

Par la question précédente, on dispose de $n-1$ points $(x_{n,1}, \dots, x_{n,n-1})$ vérifiant, pour tout k, $x_{n,k} \in \left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]$ tels que

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)g(nt)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} g(nt)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \int_{kT}^{(k+1)T} g(u)\frac{1}{n}du \text{ en posant } u = nt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \frac{1}{n}\int_0^T g(u)dt,\end{aligned}$$

car l'intégrale d'une fonction périodique sur une période est égale l'intégrale de cette fonction sur $[0, T]$. Mais, par le théorème des sommes de Riemann, $\frac{T}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T f(t)dt$, d'où

$$\int_0^T f(t)g(nt)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T f(t)dt \int_0^T g(t)dt.$$

On adapte à g quelconque en décomposant g en parties positive et négative, et on obtient le même résultat !
Remarque : on retrouve le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 16. *Sommes de Riemann pour une fonction monotone intégrable.* ●●◐ Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}_+$ continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ (la valeur $+\infty$ étant autorisée).

Correction. Par comparaison somme-intégrale, on peut écrire que, pour $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt,$$

la dernière intégrale valant éventuellement $+\infty$. Ainsi, en sommant, on obtient l'inégalité désirée.

2. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si la suite (S_n) converge, et qu'alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction. La même comparaison à une intégrale assure que

$$S_n \leqslant \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

d'où

$$S_n \leqslant \int_0^1 f(t)dt \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + S_n - \frac{1}{n}f(1),$$

Ainsi, si f est intégrable, l'encadrement

$$\int_0^1 f(t)dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \frac{f(1)}{n} \leqslant S_n \leqslant \int_0^1 f(t)dt$$

assure que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt$.
Réciproquement, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, elle est majorée par $M > 0$ et l'inégalité

$$0 \leqslant \int_{1/n}^1 f(t)dt \leqslant S_n + \frac{f(1)}{n} \leqslant M + f(1)$$

assure que $\int_{1/n}^1 f(t)dt$, qui est croissante et majorée, donc converge. Par positivité de f, $\int_x^1 f(t)dt$ converge, donc f est intégrable et la première partie de la question assure que $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt$.

3. Variante. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h\,f(nh) \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f.$$

Correction. On note $\sigma(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} h\,f(nh)$ pour $h > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [(n-1)h, nh]$, la décroissance de f donne

$$h\,f(nh) = \int_{(n-1)h}^{nh} f(nh)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{(n-1)h}^{nh} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En sommant pour $n \in [\![1, N]\!]$, il vient $\sum_{n=1}^{N} h\,f(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, la dernière intégrale étant finie par intégrabilité de f. La série $\sum h\,f(nh)$ est donc à termes positifs et à sommes partielles majorées : elle converge, et $\sigma(h) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
De même, pour $t \in [nh, (n+1)h]$ on a $f(t) \leqslant f(nh)$, donc $\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\,f(nh)$, et en sommant pour $n \in [\![1, N]\!]$,

$$\int_h^{(N+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{N} h\,f(nh) \leqslant \sigma(h).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sigma(h)$, d'où

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t \;\leqslant\; \Sigma(h) \;\leqslant\; \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est intégrable sur $]0, +\infty[$, on a $\int_0^h f(t)\,\mathrm{d}t \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} 0$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h\,f(nh) \underset{h\to0^+}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3 Convergence d'intégrales et intégrabilité

3.1 Natures d'intégrales

Exercice 17. *Nature d'intégrales – niveau 1.* ◐○○ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t\,\mathrm{sh}t}}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t\mathrm{sh}(t)}}$. Alors
- f est continue sur $]0,1]$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$, non intégrable en 0.

Donc l'intégrale ne converge pas.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$. Alors
- f est continue sur $]0,1[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0,
- $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$, intégrable en 1 (intégrale de Rieman).

Donc $\displaystyle\int_0^1 f$ converge.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}\,\mathrm{d}t$

Correction. Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-\left(t+\frac{1}{t}\right)}$. Alors
- f est continue sur $]0,+\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{t}} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-t}$, intégrable en $+\infty$.

Par théorème de comparaison, l'intégrale converge donc.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$. Alors
- f est continue sur $]0,1[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
- $f(t) \underset{t}{\sim} 1\dfrac{1}{t-1}$, qui n'est pas intégrale en 1.

L'intégrale diverge donc.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Correction. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. Alors
- f est continue sur $]0,+\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{=} \dfrac{1-1+\frac{t^2}{2}+\mathrm{o}(t^2)}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale est faussement impropre en 0,
- $|f(t)| \leqslant \dfrac{2}{t^2}$, intégrable en $+\infty$ (intégrales de Riemann), donc f est intégrable en $+\infty$.

Donc l'intégrale converge.

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$

Correction. Soit $f : t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$. Alors
- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{=} \ln(1 - 1 + t + o(t)) \underset{t\to 0}{=} \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, intégrable en 0, donc, par comparaison, f est intégrable en 0,
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -e^{-t}$, intégrable en $+\infty$ donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale converge.

Exercice 18. *Nature d'intégrales avec paramètres.* ●○○ Discuter, selon les paramètres réels indiqués, l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

1. $x \mapsto \dfrac{x^\alpha}{1 + x^\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;
2. $x \mapsto \dfrac{\big(\ln(1/x)\big)^\gamma}{x^\alpha (1-x)^\beta}$ sur $]0, 1[$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$;
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + x^a)}{x^b}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où $a > 0$ et $b > 0$;
4. $x \mapsto \exp(-(\ln x)^\alpha)$ sur $[2, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

Exercice 19. *Nature d'intégrales – les pièges.* ●◐○ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Correction. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Alors
- f est continue sur $]1, +\infty[$,
- $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$, intégrable en 1, donc, par comparaison, f est intégrable en 1,
- $x^{5/4} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{5/4}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale converge.

2. $\displaystyle\int_e^4 \frac{\mathrm{d}t}{\ln(\ln t)}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\ln(\ln(t))}$. Alors
- f est continue sur $]e, 4]$,
- $f(t) \underset{t\to e}{\sim} \dfrac{1}{\ln(t) - 1} = \dfrac{1}{\ln(e) + \ln(t/e) - 1} = \dfrac{1}{\ln(t/e)} \underset{t\to e}{\sim} \dfrac{1}{t/e - 1}$, non intégrable en e,

donc l'intégrale ne converge pas.

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\big(e^t\big)\,\mathrm{d}t$

Correction. La fonction $\varphi : t \mapsto e^t$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$, $\mathscr{C}^1$ et strictement croissante. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \cos(e^t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(e^t)}{e^t} e^t dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

ont même nature. La seconde intégrale converge (on l'a fait en cours avec du sinus) donc la première intégrale converge.

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\big(t^2\big)\,\mathrm{d}t$

Correction. La fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ est une bijection $\mathscr{C}^1$ strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ donc, par le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(t^2\right)}{2t} 2t\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$$

ont même nature. La seconde intégrale converge (quasi-faite en classe) donc la première converge aussi.

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$

Correction. Soit $f : t \mapsto \sin(t)\sin(1/t)$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre,
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sin(t)}{t}$, et là, **ATTENTION ! ! ! !** On ne peut pas conclure ! Il faut se ramener à un terme absolument convergent. Ainsi, on écrit que

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \sin(t)\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{6t^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^3}\right)\right) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{\sin(t)}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Ainsi, $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} + g(t)$, où $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$. La première fonction est d'intégrale convergente, et la deuxième est intégrable par le critère de convergence des intégrales de Riemann. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exercice 20. *Logarithmes itérés.* ●●○ Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des fonctions

$$x \longmapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}.$$

3.2 Semi-convergence

Exercice 21. $\displaystyle\int \sin(t)/t^\alpha \,\mathrm{d}t$ *: la discussion complète.* ●●○ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha(t) = \dfrac{\sin t}{t^\alpha}$ pour $t \geqslant 1$. Le but est de discuter, selon α, la convergence et la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Traiter le cas $\alpha > 1$.
2. Pour $\alpha \in]0, 1]$, établir la convergence de l'intégrale par une intégration par parties.
3. Étudier la convergence absolue.
4. Pour $\alpha \leqslant 0$, minorer $\displaystyle\int_1^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} f_\alpha - \int_1^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} f_\alpha$ et conclure à une contradiction avec la convergence.
5. Récapituler dans un tableau.

Exercice 22. $\displaystyle\int \ln(1+\sin(t)/t^\alpha)\,\mathrm{d}t$. ●●○ Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) \mathrm{d}t$, puis commenter en comparant avec la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 23. *Le théorème des équivalents ne s'applique pas aux fonctions de signe variable.* ●●○

1. Étudier le comportement, lorsque $x \to +\infty$, de $u(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t}\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire l'existence de deux fonctions f et g continues sur $[2, +\infty[$, équivalentes en $+\infty$, telles que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f$ converge et $\displaystyle\int_2^{+\infty} g$ diverge.

3. Mêmes questions avec $\displaystyle\int_2^x \frac{\cos t}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^x \frac{\cos t}{\ln t+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

3.3 Exercices théoriques

Exercice 24. *f et $1/f$ intégrables.* ●◐○ Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ continue. On suppose que f et $1/f$ sont toutes deux intégrables sur I. Montrer que I est borné.

Exercice 25. *f et f'' intégrables.* ●◐○ Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, puis que cette limite est nulle.

2. En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, puis que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Montrer que $f\,f'$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 26. *Domaine de définition d'une transformée de Laplace.* ●◐○

1. Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $x > a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. Soit $g \in \mathcal{C}([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} g$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 27. *Que manque-t-il pour tendre vers 0 ?.* ●●○ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

1. Donner un exemple d'une telle fonction, à valeurs positives, intégrable et non bornée.

2. On suppose f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 28. *Un monstre.* ●●● Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de

$$f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^\alpha\,|\sin x|^\beta}.$$

4 Calcul d'intégrales

Exercice 29. *Batterie de calculs.* ●○○ Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos t}$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}t}$

5. $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$, où $a < b$

Exercice 30. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+1/t^2\right)\mathrm{d}t$. ●○○

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ et calculer sa valeur.

Correction. On note $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$. Alors

- f est continue sur $]0,+\infty[$,
- $f(t) = -2\ln(t) + \ln(t^2+1) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$, intégrable en 0, donc f est intégrable en 0,
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, ce qui assure, par comoparaison, que f est intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale converge bien.

Ensuit,e on note $u(t) = \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$, $u'(t) = \frac{-\frac{2}{t^3}}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{-2}{t^3+t}$ et $v(t) = t$, $v'(t) = 1$. Le crochet $\left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty}$ converge, ce qui assure, par intégration par parties, que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t &= \left[t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^3+t}t\,dt \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2+1}dt = \pi.\end{aligned}$$

2. Même travail pour $\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Correction. On note $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{t}$. Alors :

- f est continue sur $[1,+\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right) \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^3}\right)$, intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

D'où la convergence de l'intégrale. On fait ensuite une intégration par parties, en intégrant 1 et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{t}$. Le crochet converge bien (il est tard et j'en ai marre), et

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t &= \left[1 - t\mathrm{Arctan}\frac{1}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_1^{+\infty} t\times\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\right)dt \\ &= \int_1^{+\infty}\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}dt.\end{aligned}$$

Soit $A > 1$. Alors $\int_1^A \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}dt = \ln(A) - \ln(1+A^2) = \ln\left(\frac{A}{1+A^2}\right) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, l'intégrale vaut 0.

Exercice 31. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$ *et* $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$. ●◐○

1. Calculer $\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

2. Établir l'égalité $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

3. En calculant la somme de ces deux intégrales, en déduire leur valeur commune.

4. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 32. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$. ●◐○

1. Soit $n \geqslant 2$. Vérifier l'existence puis calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}.$$

2. Généralisation. Soient $n \geqslant 2$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et dont toutes les racines sont strictement négatives, et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)}\,\mathrm{d}t$ et en donner une expression.

Exercice 33. *Une intégrale avec des bornes variables.* ●◐○ On pose $g : t \longmapsto \dfrac{t\mathrm{Arctan}t}{(1+t^2)^2}$.

1. Montrer que $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Correction. Soit $f : t \mapsto \dfrac{t\mathrm{Arctan}(t)}{(1+t^2)^2}$. Alors

- f est continue sur $[0+\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2t^3}$, positive et intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Ainis, I converge.

2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{1/x} g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de F' ne faisant pas intervenir Arctan.

Correction.
Soit G une primitive de f. Alors $F(x) = G(x) - G(1/x)$. Ainsi, F est dérivable, de dérivée continue car f est continue, et, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= G'(x) + \frac{1}{x^2}G'(1/x)\\
&= \frac{x\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}^2\right)^2}\\
&= \frac{x\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2}\frac{\frac{1}{x}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^4}(x^2+1)^2}\\
&= \frac{x\mathrm{Arctan}(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{x\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)}{(x^2+1)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\frac{x}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F(x) = C - \frac{\pi}{4}\frac{1}{1+x^2}.$$

Or, $F(1) = 0$, ce qui assure que $C = \dfrac{\pi}{8}$. Donc, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\pi}{4}\dfrac{1}{1+x^2}$.

3. En déduire la valeur de I.

Correction. On en déduit que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{I}$, ce qui signifie que $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 34. *Parties entières et constante d'Euler.* ●◐○ On note γ la constante d'Euler, c'est-à-dire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n$ lorsque $n \to +\infty$.

1. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $1-\gamma$.

3. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x\rfloor - \frac{1}{2}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

Exercice 35. *Une intégrale et une somme.* ●◐○

1. Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ est bien définie, et la calculer.

3. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k\sqrt{k^2-n^2}}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 36. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-a^2/t^2 - b^2t^2\right)\mathrm{d}t$. ●●○ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{t^2} - b^2t^2\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 37. *Fractions rationnelles sur* $\mathbb{R}$. ●●○

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t-\omega}$.

2. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle de degré $\leqslant -2$, à pôles simples et non réels. En déduire une expression de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide des coefficients de la décomposition en éléments simples de F associés aux pôles de partie imaginaire strictement positive.

3. Application : calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 38. *Intégrale de Poisson.* ●●○

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{2n}-1 = (x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)x + 1\right).$$

2. En déduire, à l'aide de sommes de Riemann, la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1-2r\cos\theta+r^2\right)\mathrm{d}\theta$ pour $|r|<1$, puis pour $|r|>1$.

3. Que se passe-t-il lorsque $r \to 1$? Commenter.

5 Asymptotique

Exercice 39. *Logarithme intégral*. ●◐○ On pose, pour $x > 1$, $\mathrm{li}(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que $\mathrm{li}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$.

Correction. Soit $x > 2$. On fait une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ et en intégrant $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t$. Ainsi, toutes les fonctions étant $\mathscr{C}^1$ sur $[2,x]$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{li}(x) &= \left[\frac{t}{\ln(t)}\right]_2^x + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2}dt \\ &= \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2}dt.\end{aligned}$$

Mais $\dfrac{1}{\ln(t)^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\ln(t)}\right)$, et $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)}$ est positive et non intégrable en $+\infty$, car $\dfrac{1}{\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{t}$ pour t assez grand. Ainsi, par intégration des relations de comparaison, on a :

$$\mathrm{li}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \mathrm{o}\left(\int_2^x\right)\frac{dt}{\ln(t)},$$

ce qui assure que $\mathrm{li}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln(x)}$.

2. Déterminer un développement asymptotique de $\mathrm{li}(x)$ à deux termes en $+\infty$, puis à n termes.

Correction. On a déterminé un premier équivalent. On écrit désormais que

$$\mathrm{li}(x) - \frac{x}{\ln(x)} = -\frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt$$

En refaisant une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \dfrac{1}{\ln(t)^2}$ et en intégrant $t \mapsto 1$, on obtient que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt = -\frac{\ln(2)}{2} + \left[\frac{t}{\ln(t)^2}\right]_2^x + 2\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^3}\,dt.$$

Déjà, comme $\dfrac{t}{\ln(t)^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $\dfrac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\ln(t)^2}\right)$ ce qui assure que $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt$ diverge. Mais $\dfrac{1}{\ln(t)^3} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\ln(t)^2}\right)$, positive et non intégrable en $+\infty$, ce qui assure, par sommation des relations de comparaison, que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^3}\,dt \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2}\,dt\right).$$

Ainsi, $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^3}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)^2}$. On en déduit donc que

$$\mathrm{li}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{x}{\ln(x)^2}\right).$$

On obtient le même résultat pour n, en pensant aux coefficients qui se rajoutent :

$$\mathrm{li}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{x}{\ln x}\sum_{k=0}^{n}\frac{k!}{(\ln x)^k} + \mathrm{o}\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right).$$

Exercice 40. $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$. ●◐○ On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition naturel de f et justifier que f y est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 41. *Étude complète de* $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. ●◐○

1. Déterminer le domaine de définition de F et calculer F'.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$, puis, en poussant le calcul, $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\cos x}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^{5/2}}\right)$.
3. Déterminer un équivalent simple de F en 0^+, puis montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \underset{x\to0^+}{=} -\ln x + C + \mathrm{o}(1)$.
4. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 42. $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$. ●◐○ On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

1. Montrer que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
2. Vérifier que
$$\ell - f(x) = -\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}{2\mathrm{i}x} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$
et en déduire un équivalent de $\ell - f(x)$ en $+\infty$.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos\left(t^2\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 43. *Équivalents en* $+\infty$. ●●○ Trouver un équivalent simple, lorsque $x \to +\infty$, de :

1. $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^t t^\alpha \,\mathrm{d}t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^\alpha} \,\mathrm{d}t$, où $\alpha > 0$;
3. $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{(\ln t)^\alpha} \,\mathrm{d}t$, où $\alpha > 0$;
4. $\displaystyle\int_1^x t^t \,\mathrm{d}t$;
5. $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{-t} \,\mathrm{d}t$.

Exercice 44. $f'/f \sim \mu/x$. ●●○ Soient $f \in \mathcal{C}^1\big([1,+\infty[,\mathbb{R}_+^*\big)$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mu}{x}$.

1. On suppose $\mu > -1$ et $\mu \neq 0$. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$ et que
$$\int_1^x f \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\,f(x)}{\mu+1}.$$
2. Énoncer et démontrer un résultat analogue lorsque $\mu < -1$.
3. Que peut-on dire si l'on suppose seulement $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a$ avec $a < 0$?

Exercice 45. *Moyenne d'une fonction périodique*. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, T-périodique, de moyenne $\mu = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \mu \ln x + c + \mathrm{o}(1)$.
2. À quelle condition l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? À quelle condition la fonction $t \mapsto f(t)/t$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?
3. On suppose cette condition réalisée et on note ℓ la limite en $+\infty$ de $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F(x) - \ell = \mathrm{O}(1/x)$. Que dire de f si l'on a de plus $F(x) - \ell = \mathrm{o}(1/x)$?

Exercice 46. *Termes généraux définis par une intégrale*. ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant ($\alpha > 0$, $a \geqslant 0$).

1. $u_n = \displaystyle\int_0^{1/n^\alpha} \sqrt{|\ln t|}\,dt$
2. $u_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,dt$
3. $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(1-t)\,dt$
4. $u_n = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$; $\quad v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$
5. $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt)\,dt$
6. $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$

6 Du côté des concours

Exercice 47. *CCINP MP 2015*. Soient $p \in \mathbb{N}$ fixé et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{e}^{-nt}\,dt$.

1. Montrer l'existence de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, $T(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-bt}\,dt$. Déterminer l'expression de $T(a,b)$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_0 = p! \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}} - S_n$.

4. Montrer que la suite (S_n) converge.

5. Montrer que $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}}$.

Correction.

1. La fonction est continue en 0 donc il n'y a pas de problème d'intégrabilité en 0. En $+\infty$, on a $\frac{t^p}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{e}^{-nt} \sim t^p \mathrm{e}^{-(n+1)t} = o(1/t^2)$ par croissances comparées. D'où l'intégrabilité.

2. En effectuant une intégration par parties avec $u(t) = t^a$, $v'(t) = \mathrm{e}^{-bt}$, on trouve

$$T(a,b) = \frac{a}{b} T(a-1,b) = \frac{a!}{b^{a+1}},$$

car $T(0,b) = 1/b$.

3. On montre le résultat par récurrence. **Initialisation.** $S_0 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{e}^t\mathrm{e}^{-t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^p(\mathrm{e}^t+1-1)}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{e}^{-t}dt = p! - S_1$. **Hérédité.** De même, $S_n = \frac{p!}{n^{p+1}} - S_{n+1}$, d'où le résultat par récurrence.

4. L'intégrande tend ponctuellement vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et est majoré uniformément par $t^p/(\mathrm{e}^t+1)$, intégrable, donc S_n tend vers 0 par convergence dominée.

5. Le résultat se déduit immédiatement en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente.

Exercice 48. *Mines-Télécom MP 2017*. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue, décroissante, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que $f(x) = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Trouver un contre-exemple aux questions précédentes si f n'est plus décroissante.

Correction.

1. On sait que f est décroissante donc, par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite en $+\infty$. Soit ℓ cette limite. Si ℓ est finie et $\ell \neq 0$, alors f est de signe constant au voisinage de $+\infty$, et on dispose de $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geqslant M,\ |f(x)| \geqslant \frac{|\ell|}{2}$. Donc $\int_M^x |f(t)|dt \geqslant (x-M)\frac{|\ell|}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f. Si ℓ est infinie, on fait de même avec 1 à la place de $\frac{|\ell|}{2}$. Donc $\ell = 0$.

2. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors, comme f tend vers 0, f est positive, donc

$$0 \leqslant xf(2x) \leqslant \int_x^{2x} f(t)dt \leqslant \int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $xf(2x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $2xf(2x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $xf(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $f(x) = o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. Il suffit de prendre pour f une fonction faite de pics : on définit pour tout n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $f\left(n - \frac{1}{n^3}\right) = 0$, $f(n) = n$ et $f\left(n - \frac{1}{n^3}\right) = 0$, tous ces points étant reliés par des segments (en particulier f est nulle en-dehors des segments $\left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$, affine par morceaux sur $\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right]$ et sur $\left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$. Et

$$\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t)dt = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2n^2},$$

qui converge quand n tend vers $+\infty$. Pourtant f n'est même pas bornée !

Exercice 49. *Mines-Ponts MP 2026*. Soit $\alpha > 1$.

1. Montrer que l'équation $x^\alpha = \sin(x)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on appellera a.

> **Correction.** On note $f : x \mapsto x^\alpha - \sin(x)$. Déjà, pour $x \geqslant 1$, on a immédiatement $f(x) > 0$: il suffit d'étudier cette fonction sur $[0, 1[$.
> $f(0) = 0$ et f est dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée égale à $f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} - \cos(x)$. Il faut étudier le signe de f'. Pour ce faire, on étudie $f'' : x \mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \sin(x) > 0$ sur $]0, 1[$.
> Donc f' croît strictement sur $]0, 1[$. De plus, $f'(0) = -1 < 0$, et $f'(1) > 0$ car $\cos(1) < 1$. Ainsi, f' s'annule en un unique $b \in]0, 1[$.
> On en déduit que f décroit puis croît sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) > 0$, on en déduit que f s'annule en $a \in]0, 1[$.

2. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{|t^\alpha - \sin(t)|}} dt$.

> **Correction.** Il faut écrire cette intégrale (nommons-la I) comme
> $$\mathrm{I} = \int_0^a \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t) - t^\alpha}} dt + \int_a^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t^\alpha - \sin(t)}}.$$
> Déjà,
> - $\dfrac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t) - t^\alpha}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0, donc la fonction est intégrable en 0.
> - en a, $\sin(t) - t^\alpha \underset{t\to a}{\sim} -f'(a)(t-a)$, car $f'(a) > 0$, donc
> $$\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t) - t^\alpha}} \underset{t\to a}{\sim} \frac{\cos(a)}{\sqrt{f'(a)}\sqrt{a-t}},$$
> intégrable en a. Ceci assure que la première intégrale converge.
> - La deuxième intégrale converge bien en a.
> - Enfin, on s'intéresse au comportement en $+\infty$. On écrit que
> $$\begin{aligned}\frac{\cos(t)}{\sqrt{t^\alpha - \sin(t)}} &= \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin(t)}{t^\alpha}}} \\ &\underset{t\to+\infty}{=} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\sin(t)}{t^\alpha} + o\left(\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right)\right) \\ &\underset{t\to+\infty}{=} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right).\end{aligned}$$
> Or, $\displaystyle\int_{a+1}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} dt$ converge par IPP. De plus, $\dfrac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$, ce qui assure la convergence de la deuxième partie de l'intégrale.
>
> Donc I converge.

Exercice 50. *CCINP 2016.* ●○○

1. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

> **Correction.** On sait qu'un tel triplet (a, b, c) existe :
> $$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$
> Pour déterminer a, on multiplie par x et on évalue en 0 :
> $$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2},$$
> donc, en évaluant en 0, $1 = a$.

Ensuite, pour déterminer c, on multiplie par $(x+1)^2$ et on évalue en -1 :

$$\frac{2x+1}{x} = \frac{a(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

donc, en évaluant en -1, $1 = c$. Puis, pour déterminer b, on peut, par exemple, multiplier par x et faire tendre vers $+\infty$. On a

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2},$$

donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, $0 = a + b$, donc $b = -1$. Finalement,

$$\boxed{\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}}$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t\lfloor 1/t\rfloor dt$ converge puis calculer sa valeur, en admettant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction. *Montrer la convergence d'une intégrale, c'est déjà voir où il y a potentiellement des problèmes. Ici c'est en* 0.
La fonction $f : t \mapsto t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0,1]$, et on sait que pour tout t dans $]0,1]$,

$$\frac{1}{t} - 1 \leqslant \left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \leqslant \frac{1}{t},$$

donc

$$1 - t \leqslant t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor \leqslant 1,$$

donc, en faisant tendre t vers 0 et par encadrement, on obtient que $f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
Pour calculer l'intégrale, on va faire du découpage.
Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor = k$ pour t dans $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^1 t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor dt &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} t\left\lfloor \frac{1}{t}\right\rfloor dt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} ktdt \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{kt^2}{2}\right]_{1/(k+1)}^{1/k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k} - \frac{k}{2(k+1)^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^2 - k^2}{2k(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right) \\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$

Exercice 51. *CCINP 23.* **1.** Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $\mathrm{I}_n=\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n=0$.

Correction. *C'est le lemme de Riemann-Lebesgue : un grand classique !* Effectuons une intégration par parties, en dérivat $x\mapsto f(x)$ et en primitivant $x\mapsto\sin(nx)$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n&=\left[-\frac{f(x)\cos(nx)}{n}\right]_a^b+\int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\\&=\frac{f(a)\cos(na)}{n}-\frac{f(b)\cos(nb)}{n}+\int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx.\end{aligned}$$

Or,

$$\left|\frac{f(a)\cos(na)}{n}\right|\leqslant\frac{|f(a)|}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

donc, par encadrement, $\dfrac{f(a)\cos(na)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. De même, $\dfrac{f(b)\cos(nb)}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Enfin,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\right|&\leqslant\int_a^b\left|f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right|dx\\&\leqslant\frac{1}{n}\int_a^b|f'(x)|\,dx\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0,\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_a^b f'(x)\frac{\cos(nx)}{n}dx\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par encadrement, donc $\mathrm{I}_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

2. Soit $\mathrm{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

(a) Montrer que I est bien convergente.

Correction. Déjà vu dans le cours (mais c'est important !).

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $K_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}K_n=\mathrm{I}$.

Correction. Effectuons le changement de variables $u=nx$. *Comme ce changement de variables est affine, on ne le détaille pas !*

$$K_n=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin(u)}{u}du.$$

Ainsi, comme I est bien convergente, $K_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{I}$.

(c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $J_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(J_n-K_n)=0$.

Correction. On remarque que

$$J_n-K_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)f(x)dx,$$

où $f:x\mapsto\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin(x)}=\dfrac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}$. Il reste à démontrer que f est bien de classe $\mathscr{C}^1$.

- déjà, $f(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{-\frac{x^3}{6}}{x^2}\underset{x\to0}{\sim}-\dfrac{x}{6}\underset{x\to0}{\longrightarrow}0$, donc f est bien prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0)=0$.

- ensuite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} \\ &= -\frac{\sin(x)^2 - x^2\cos(x)}{x^2\sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2\sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2\sin(x)^2} \\ &\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc, par le théorème du prolongement de la classe $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Le théorème de la question précédente peut donc être appliqué, et on conclut alors que $J_n - K_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I.

Correction. Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} J_{2p+1} - J_{2p-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p+1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p-1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p+1)x) - \sin((2p-1)x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(2px)\sin(x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2px)dx = 2\left[\frac{\sin(2px)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc $J_{2p+1} = J_{2p-1}$ donc, par récurrence immédiate, $J_{2p+1} = J_1 = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout x. Ainsi,

$$\mathrm{I} = \lim_{n\to+\infty} K_n = \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{p\to+\infty} J_{2p+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 52. *Mines-Ponts 19, Centrale 17*. Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Correction. On note $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue en x, donc g est bien définie en x.

Ensuite, $\left|\dfrac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, fonction d'intégrale en $+\infty$ convergente. Donc, par théorème de comparaison, f est bien définie.

Soit désormais G une primitive de g. Par convergence de l'intégrale, G admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) = \ell - G(x)$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -g(x)$.

2. Montrer que $\dfrac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbf{R}_+^*$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+.

Correction. *C'est une question à laquelle on aurait pu répondre à l'exercice précédent.* Notons $h : t \mapsto \dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$.

- $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc h est prolongeable par continuité en 0,
- Par majoration, $|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme h est continue, h est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrons-le.
Déjà, $|h(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on dispose de $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, $|h(t)| \leqslant 1$.
De plus, $|h|$ est continue sur le segment $[0, T]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, $|h|$ est majorée sur $[0, T]$, par $M > 0$.
Sur $\mathbb{R}_+$, $|h|$ est donc majorée par $\max(M, 1)$ donc h est bornée.

Ensuite, la question est vraiment + délicate en 0. *On remarque que* $\dfrac{\sin(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t}$. *On a donc envie de remplacer* $\dfrac{\sin(t)}{t^2}$ *par* $\dfrac{1}{t}$, *mais juste au voisinage de* 0 *!! Voilà pourquoi on fait tout le découpage qui va venir ensuite.*
On écrit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt \\ &= \int_x^1 \frac{\sin(t) - t + t}{t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt \\ &= \int_x^1 h(t)dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt \\ &= -\ln(x) + \int_x^1 h(t)dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt. \end{aligned}$$

Or, $|h|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, par, disons M, donc

$$\left|\int_x^1 h(t)dt\right| \leqslant M$$

Ainsi, $f(x) = -\ln(x) + k(x)$ où k est bornée, donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

3. Montrer que $f(x)$ est dominée par $\dfrac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction. On étudier $x^2 f(x)$ et on montre que cette quantité tend vers 0 en $+\infty$. On calcule

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\left(\frac{t}{x}\right)^2}dt \\ &= x\int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2}du. \end{aligned}$$

Et là, on pense au lemme de Riemann-Lebesgue ! On fait une intégration par parties, en primitivant $\sin(ux)$ et en dérivant $\dfrac{1}{u^2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2}du &= x\left[\frac{-\cos(ux)}{xu^2}\right]_1^{+\infty} - 2x\int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{xu^3}du \\ &= \cos(x) - 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3}du. \end{aligned}$$

L'intégration par parties était bien licite car les crochets étaient convergents. Or,

$$\begin{aligned} \left|\cos(x) - 2\int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3}du\right| &\leqslant |\cos(x)| + 2\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(ux)}{u^3}\right| du \\ &\leqslant 1 + 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3}du. \end{aligned}$$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

4. En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; puis établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$.

Correction. On sait que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$, de signe constant et dont l'intégrale converge en 0, et $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc, par comparaison, l'intégrale de f converge en $+\infty$.
Ensuite, pour calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f$, on va faire une intégration par parties, en dérivant f et en intégrant 1, ce qui est licite car on sait que $[xf(x)]_0^{+\infty}$ converge grâce à l'asymptotique que nous avons faite sur f. On écrit donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)dx &= [xf(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x\frac{-\sin(x)}{x^2}dx\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx.\end{aligned}$$

Exercice 53. *Mines-Ponts 22*. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = f(n) - \int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t$.

Correction. Partons de l'intégrale $\displaystyle\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t$. Dans cette intégrale, faisons une intégration par parties, en posant $u(t)=f(t)$, donc $u'(t)=f'(t)$, et $v(t)=t-n-1$ donc $v'(t)=1$. Les fonctions u et v sont bien $\mathscr{C}^1$, donc

$$\begin{aligned}\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\mathrm{d}t &= [f(t)(t-n-1)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t\\ &= f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité à établir.

2. On suppose que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ converge.

Correction. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt\\ &= \int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt\right| &\leqslant \sum_{k=1}^n\left|\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}|(t-k-1)f'(t)|\,dt\\ &\leqslant \sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}|f'(t)|\,dt \text{ car sur } [k,k+1],\ |t-k-1|\leqslant 1\\ &\leqslant \int_1^n |f'(t)|dt.\end{aligned}$$

Comme f' est intégrable, la série de terme général $\displaystyle\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt$ est absolument convergente, donc convergente. Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}(t-k-1)f'(t)dt$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, on a bien

équivalence entre la convergence de la série de terme général $f(k)$ et l'intégrale $\int_1^{n+1} f(t)dt$.

3. Application à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}$ pour $a > \frac{1}{2}$.

Correction. Dans cet exemple précis, $f(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}$, et $f'(t) = \frac{\frac{-\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}t^a + a\frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{a+1}}}{t^{2a}}$. On a alors, très grossièrement, $|f'(t)| \leqslant \frac{1}{t^{a+1/2}}$ sur $[1, +\infty[$, qui est bien intégrable. Ainsi, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}$ équivaut à celle de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}dt$. Pour déterminer la convergence de cette intégrale, on peut faire une intégration par parties. *La première fois que j'ai fait cet exercice, j'ai voulu intégrer le* $1/t^a$ *et dériver le* cos *: ça ne marche pas !* On pose $u(t) = 2\sin(\sqrt{t})$, donc $u'(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ et $v(t) = \frac{1}{t^{a-1/2}}$, donc $v'(t) = \frac{\frac{1}{2} - a}{t^{a+\frac{1}{2}}}$. Or, le crochet

$$\left[\sin(\sqrt{t})\frac{1}{t^{a-1/2}}\right]_1^{+\infty}$$

converge, donc les intégrales $\mathrm{I}_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}dt$ et

$$\mathrm{I}_2 = \int_1^{+\infty} 2\sin(\sqrt{t})\frac{\frac{1}{2} - a}{t^{a+\frac{1}{2}}}dt$$

sont de même nature. Mais on remarque que

$$\left|\frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{a+1/2}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{a+1/2}},$$

qui est intégrable (intégrale de Riemann). Par théorème de comparaison, on en déduit que I_2 converge, donc I_1 converge, donc la série de terme général $\left(\frac{\cos\sqrt{n}}{n^a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 54. On définit $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,dt$.

1. Justifier la convergence de I.

Correction. On note $f(t) = \frac{\sin^3(t)}{t^2}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^3}{t^2} = t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0,
- $|f(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Donc I converge bien.

2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \sin^3(t) = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$.

Correction. On calcule

$$\begin{aligned}\sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^3 \\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{3it}\right) \\ &= -\frac{\sin(3t)}{4} + \frac{3}{4}\sin(t).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Montrer que $\mathrm{I} = \dfrac{3}{4}\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$.

Correction. *On ne peut pas utiliser la question précédente et séparer l'intégrale en 2...* On sait que $\mathrm{I} = \lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)^3}{t^2}dt$. Soit $x>0$. Alors

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)^3}{t^2}dt &= \int_x^{+\infty}\frac{-\frac{1}{4}\sin(3t)+\frac{3}{4}\sin(t)}{t^2}dt\\ &= -\frac{1}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}dt+\frac{3}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt,\end{aligned}$$

la séparation étant licite car les deux intégrales convergent. Dans la première intégrale, on fait le changement de variables $u=3t$ et on obtient

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin(3t)}{t^2}dt = \int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}\times 9\frac{du}{3} = 3\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2}du.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)^3}{t^2}dt &= -\frac{1}{4}\int_{3x}^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt+\frac{3}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t^2}dt\\ &= \int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt.\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

4. Montrer que $g(t)=\dfrac{\sin(t)-t}{t^2}$ est définie et prolongeable par continuité sur $]0,+\infty[$.

5. En déduire la valeur de I.

Correction. On sait que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,

$$t-\frac{t^3}{6}\leqslant\sin(t)\leqslant t$$

(l'inégalité de droite est claire, celle de gauche se fait par étude de fonction ou par la série entière par exemple) Ainsi,

$$\int_x^{3x}\frac{t-\frac{t^3}{6}}{t^2}dt\leqslant\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt\leqslant\int_x^{3x}\frac{t}{t^2}dt.$$

Or,

$$\int_x^{3x}\frac{t}{t^2}dt=\ln(3x)-\ln(x)=\ln(3),$$

et

$$\int_x^{3x}\frac{t-\frac{t^3}{6}}{t^2}dt=\ln(3)-\frac{(3x)^2}{12}+\frac{x^2}{12}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\ln(3).$$

Ainsi, par encadrement, $\mathrm{I}=\ln(3)$.

Exercice 55. *Mines 24*. Soit $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction. On sait que $t\mapsto\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $t^2\mathrm{e}^{-t^2}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$. Donc

$$\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_0^{x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction. Notons $R(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Effectuons une intégration par parties, en posant $u(t) = \frac{1}{t}$, donc $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $v(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}$ donc $v'(t) = t\mathrm{e}^{-t^2}$. Ainsi, comme le crochet $u(t)v(t)$ converge bien, on a

$$R(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}dt.$$

Mais

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{t^2}dt \leqslant \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{x^2}dt = \frac{R(x)}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o(R(x)).$$

Ainsi, on a

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} \underset{x\to+\infty}{=} R(x) + o(R(x)),$$

donc

$$R(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 56. *CCINP 24.* Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ on pose : $\mathrm{I}_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln(x)^n \mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $\mathrm{I}_{n,p}$.

Correction. Déjà, la fonction $f : x \mapsto x^p \ln(x)^n$ est continue sur $]0,1]$. Le seul problème est en 0. *Pour montrer l'intégrabilité en* 0*, on va comparer à une intégrale de référence.*
On remarque que, par croissances comparées, $x^{1/2}f(x) = x^{p+1/2}\ln(x)^n \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x) \underset{x\to0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, qui est intégrable en 0.
On en déduit alors, par comparaison, que f est intégrable en 0.

2. Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, trouver une relation entre $\mathrm{I}_{n,p}$ et $\mathrm{I}_{n-1,p}$.

Correction. On va faire une intégration par parties. *Attention à la manière de rédiger !* Sous réserve de convergence des intégrales et du crochet, en posant $u(x) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}$, $u'(x) = x^p$, $v(x) = \ln(x)^n$, $v'(x) = \frac{n}{x}\ln(x)^{n-1}$, on a l'égalité

$$\mathrm{I}_{n,p} = \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1}x^{p+1}\frac{n}{x}\ln(x)^{n-1}dx.$$

Or, par croissances comparées, $\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^n \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{p+1}x^{p+1}\ln(x)^n \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$ par continuité, donc l'intégration par parties est licite et

$$\mathrm{I}_{n,p} = -\frac{n}{p+1}\int_0^1 x^p\ln(x)^{n-1}dx = -\frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p}.$$

Remarque : le changement de signe est cohérent avec le changement de puissance du ln.

3. En déduire la valeur de $\mathrm{I}_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Correction. *Là, tout dépend de si on est à l'écrit ou à l'oral. Je vais répondre comme à l'oral.* On remarque alors que

$$\mathrm{I}_{n,p} = -\frac{n}{p+1}\mathrm{I}_{n-1,p} = \frac{n(n-1)}{(p+1)^2}\mathrm{I}_{n-2,p} = \cdots = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^n}\mathrm{I}_{0,p} = \boxed{\frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}}.$$

On démontrerait le résultat par récurrence sur n.

Exercice 57. *Mines-Télécom 23.* **1.** Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

Correction. Quand t tend vers $+\infty$, $\frac{1}{t} \to 0$. De plus, $\text{Arctan}(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. On en déduit donc que

$$\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Donc $\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$.

2. Après avoir justifié sa convergence, calculer $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right) \mathrm{d}t$.

Correction. Comme $f(t) = \frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$, qui est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.
Pour la calculer, on sait déjà qu'on ne peut pas séparer directement les deux morceaux, car les deux intégrales ne convergent pas a priori. Deux possibilités : s'arrêter jusqu'à un certain x, ou bien utiliser une des deux techniques classiques (IPP/cdv). Vu qu'il y a $1/t$ que l'on sait facilement intégrer, on va essayer en s'arrêtant jusqu'à un certain x. Soit $x > 1$. Alors

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

La première intégrale vaut $\ln(x)$. Pour la seconde, on fait une intégration par parties, en posant $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v(t) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$, $v'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_1^x \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[t\text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right]_1^x + \int_1^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(2)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t)dt &= \ln(x) - x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(2)\right) \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.\end{aligned}$$

Mais $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, $x\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc, en faisant tendre x vers $+\infty$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} - 1}.$$

Exercice 58. *Centrale 23.*
Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ soit convergente. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, \mathrm{d}t$ converge pour tout $\alpha > 0$.

Correction. *ATTENTION ! La fonction f n'est* **PAS** *positive. C'est ça la difficulté essentielle ! Il faut ruser.*
Soit F une primitive de f. On sait que F possède une limite finie en $+\infty$ par convergence de l'intégrale. Soit $\alpha > 0$.
Dans $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a}\, \mathrm{d}t$, on pose $u(t) = F(t)$ donc $u'(t) = f(t)$, puis $v(t) = \frac{1}{t^a}$ donc $v'(t) = \frac{-a}{t^{a+1}}$. Or,

- $[u(t)v(t)]_1^{+\infty}$ converge car F converge et $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$ aussi.
- $-a\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{a+1}}dt$ converge : la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$, possède une limite finie en $+\infty$, donc est bornée au voisinage de $+\infty$. (en fait on peut même démontrer qu'elle est bornée sur tout $\mathbb{R}_+$: exercice ?). Donc $\dfrac{F(t)}{t^{a+1}} \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^{a+1}}\right)$. Or, $\dfrac{1}{t^{a+1}}$ est intégrable en $+\infty$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{a+1}}dt$ est convergente.

Donc, par théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}dt$ converge.

7 Pour aller plus loin

Exercice 59. *Lemme de Riemann-Lebesgue.* ●●○ Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On veut montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1. Traiter le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact.
2. Traiter le cas où f est une fonction en escalier à support compact.
3. Conclure dans le cas général.
4. Application : soit $g \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{C})$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^\pi g(t)\sin\left(\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 60. *Multiplicateurs et contre-exemples.* ●●○ Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les $u \in E$ telles que, pour toute $v \in E$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction uv soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer les $u \in E$ telles que, pour toute $v \in E$ bornée sur $\mathbb{R}_+$, la fonction uv soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Existe-t-il une fonction f lipschitzienne et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ diverge ?

Exercice 61. *Non-convergence des sommes de Riemann.* ●●◐

1. Construire une fonction f continue, strictement positive et intégrable sur $]0,1[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2.$$

Correction. On note I_n l'intervalle $\mathrm{I}_n = \left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4}, \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^4}\right]$. On remarque qu'on a toujours $\mathrm{I}_n \cap \mathrm{I}_{n+1} = \emptyset$ car $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)} > \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{(n+1)^4}$ pour $n \geqslant 2$.

On définit alors g nulle en-dehors de $\displaystyle\bigsqcup_{n\geqslant 2} \mathrm{I}_n$, affine sur $\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4}, \dfrac{1}{n}\right]$, égale à 0 en $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4}$, à $n^2 - 1$ en $\dfrac{1}{n}$, et affine à nouveau sur $\left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^4}\right]$, égale à $n^2 - 1$ en $\dfrac{1}{n}$ et à 0 en $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^4}$.

Une telle fonction est continue et intégrable car la somme des aires est $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{2(n^2-1)}{n^4} < +\infty$. En définissant $g = f + 1$, on a de plus la stricte positivité.

2. Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n\geqslant 2}$?

Correction. On a immédiatement

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

donc la somme de Riemann ne converge pas vers $\displaystyle\int_0^1 f$.

3. Comparer avec le cas d'une fonction monotone intégrable. Quelle hypothèse a été perdue ?

Correction. Dans le cas monotone intégrable (exercice 16), on a convergence des sommes de Riemann. On a donc construit un contre-exemple !

Exercice 62. *Inégalité de Hardy L^2.* ●●◐ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } x > 0, \qquad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En intégrant par parties, montrer que pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^a g^2 \leqslant 2\int_0^a gf$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2 \leqslant 4\int_0^{+\infty} f^2$.
4. Montrer que la constante 4 est optimale.

Exercice 63. *Inégalité de Hilbert.* ●●◐

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
   (a) Prouver l'égalité $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\int_0^\pi P\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) En déduire l'inégalité $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \big|P\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)\big|^2\,\mathrm{d}t$.
2. Établir alors l'*inégalité de Hilbert* : pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \leqslant \pi \sum_{p=0}^n a_p^2.$$

Exercice 64. *Contrôle de $\int f'^2$ par $\int f^2$ et $\int f''^2$.* ●●◐

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f^2 et f''^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x ff''$, puis que ff' admet des limites nulles en $\pm\infty$.
   (b) En déduire que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f'^2 \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} f''^2}$.
   (c) Montrer que l'égalité n'a lieu que pour $f = 0$, mais que la constante 1 ne peut pas être remplacée par une constante strictement plus petite.
2. On suppose maintenant $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, avec f^2 et f''^2 intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Établir l'identité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \big(f^2 + f''^2 - f'^2\big) = \int_{\mathbb{R}_+} \big(f'' + f' + f\big)^2 + \big(f(0) + f'(0)\big)^2$.
   (b) En remplaçant f par $x \mapsto f(\lambda x)$ pour un $\lambda > 0$ bien choisi, en déduire $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f'^2 \leqslant 2\sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2 \times \int_{\mathbb{R}_+} f''^2}$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 65. *Fonctions à moments nuls.* ●●◐

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0,1[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire une fonction f continue, non identiquement nulle, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrale nulle.

Exercice 66. *Inégalité de Weyl.* ●●● Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f'^2 et $x \mapsto x^2 f(x)^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Établir l'égalité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 = -2\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$.

3. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

et étudier le cas d'égalité.

Reformulée à l'aide de la transformée de Fourier, cette inégalité est une forme du principe d'incertitude de Heisenberg (Weyl, 1928).

Exercice 67. *Inégalité de Carlson.* ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que

$$S = \int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x < +\infty \qquad \text{et} \qquad T = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

1. Justifier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

Correction. On montre l'intégrabilité sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$:

(a) sur $]0,1]$, on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{1+f(x)^2}{2}$, intégrable sur $]0,1]$, d'où le résultat,

(b) sur $[1,+\infty[$, on a, pour $x>1$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\int_1^x |f(t)|dt = \int_1^x \frac{t}{t}|f(t)|dt &\leqslant \sqrt{\int_1^x t^2 f(t)^2}\sqrt{\int_1^x \frac{1}{t^2}dt} \\ &\leqslant \sqrt{\int_1^{+\infty} t^2 f(t)^2}\sqrt{\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt},\end{aligned}$$

ce qui assure que $\displaystyle\int_1^x |f(t)|dt$ converge quand x tend vers $+\infty$, donc que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f| \leqslant \sqrt{\pi}\sqrt[4]{ST}$, et étudier le cas d'égalité.

Correction. On suit l'indication. SOient α et β deux réels strictement positifs. Alors

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty}|f|\right)^2 &= \left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\alpha+\beta x^2}}\left(|f(x)|\sqrt{\alpha+\beta x^2}\right)\mathrm{d}x\right)^2 \\ &\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha+\beta x^2}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}(\alpha+\beta x^2)f(x)^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\beta}}(\alpha S+\beta T) \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\left(\gamma S+\frac{1}{\gamma}T\right),\end{aligned}$$

en posant $\gamma = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$. Ceci est vrai pour tout $\gamma>0$, il suffit donc de chercher quand cette quantité (en γ) est minimale. On étudie la fonction de γ, de dérivée $\gamma \mapsto S - \dfrac{1}{\gamma^2}T$, nulle en $\sqrt{\dfrac{T}{S}}$, négative avant, positive ensuite. Ainsi, en évaluant en $\gamma = \sqrt{\dfrac{T}{S}}$, on obtient

$$\left(\int_0^{+\infty}|f|\right)^2 \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{T}{S}}S+\sqrt{\frac{S}{T}}T\right) = \pi\sqrt{ST},$$

d'où la majoration !

Pour le cas d'égalité, il y a égalité ssi $\gamma = \sqrt{\dfrac{T}{S}}$ et il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire que $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{T}{S}$ et, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $|f(x)| = \dfrac{1}{\alpha+\beta x^2}$, i.e., f ne s'annulant pas et étant continue,

$f(x) = \pm\dfrac{1}{\alpha+\beta x^2}$.
Les fonctions qui donnent l'égalité sont donc les

$$x \mapsto \frac{1}{\alpha+\beta x^2},\ \text{où } \alpha,\beta>0 \text{ et } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{T}{S}.$$

3. En déduire que pour toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ non identiquement nulle,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sqrt{\pi}\ \sqrt[4]{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2}.$$

Correction. Il faut passer des fonctions continues au suites. On remarque que les deux questions précédentes sont aussi valables si f est continue par morceaux.
n suppose $\sum n^2a_n^2 < +\infty$ (sinon le membre de droite est infini). Comme $a_n^2 \leqslant n^2a_n^2$, la série $\sum a_n^2$ converge aussi.
On pose $f(x) = a_n$ pour $x \in]n-1, n]$, $n \geqslant 1$. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $N \geqslant 1$,

$$\int_0^N f^2 = \sum_{n=1}^N a_n^2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^N x^2 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N a_n^2 \int_{n-1}^n x^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^N a_n^2\Big(n^2 - n + \frac{1}{3}\Big).$$

Les intégrales sont celles de fonctions positives et les séries convergent. On en déduit

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\Big(n^2 - n + \frac{1}{3}\Big) < +\infty.$$

D'après la question 1, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme $\displaystyle\int_0^N f = \sum_{n=1}^N a_n$, la série $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. La question 2 donne alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leqslant \sqrt{\pi}\,\sqrt[4]{ST}.$$

Enfin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2a_n^2 - T = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\Big(n - \frac{1}{3}\Big) > 0,$$

car la suite (a_n) n'est pas identiquement nulle et $n - \dfrac{1}{3} > 0$. Comme $S > 0$, la stricte croissance de $t \mapsto \sqrt[4]{t}$ donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sqrt{\pi}\ \sqrt[4]{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2}.$$

Exercice 68. *Inégalité de Wirtinger*. ●●● Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Pour $f \in E$, montrer la convergence des intégrales

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^1 2f(t)f'(t)\cot(\pi t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J(f) = -\pi\int_0^1 \big(1+\cot^2(\pi t)\big)\,f(t)^2\,\mathrm{d}t,$$

puis comparer $\mathrm{I}(f)$ et $J(f)$.

2. En déduire que pour toute $f \in E$,

$$\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2,$$

et déterminer les fonctions de E réalisant l'égalité.

Exercice 69. *Exponentielle imaginaire oscillant rapidement*. ●●● Soient $\mu > 0$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f'' \geqslant \mu$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g = \dfrac{1}{1+|f|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}f(t)}\,\mathrm{d}t$ converge.

3. Application : retrouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 70. *Valeur principale de Cauchy*. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et qu'il existe $\alpha \in]0,1]$ et $C > 0$ tels que

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|^{\alpha}\,.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\mathrm{I}_\varepsilon(f) = \displaystyle\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\mathrm{I}_\varepsilon(f)$ est bien défini pour tout $\varepsilon \in]0,1]$.

2. Montrer que $\mathrm{I}_\varepsilon(f)$ admet une limite finie lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

Indications

Ex 1. On distinguera les cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, et $\alpha = 1$.

Ex 5. **4.** On comparera avec des intégrales de Riemann de $t \mapsto 1/t$.
Penser à transformer un produit en somme et à faire apparaître des sommes de Riemann.

Ex 8. **2.** On écrira $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'un changement de variable, puis on fera tendre $\varepsilon \to 0^+$ et $X \to +\infty$.

Ex 13. **1.** On encadrera $\sin u$ à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange.
2. Attention : pour $\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ n'est pas continue sur $[0,1]$; le théorème du cours ne s'applique pas tel quel.

Ex 14. **6.** On pourra montrer que $x\ln(x) \geqslant x-1$ pour tout $x > 0$.

Ex 15. **2.** On découpera $[0,T]$ en n intervalles de même longueur et on appliquera la première question sur chacun d'eux.

Ex 16. **1.** Comme dans la comparaison série-intégrale, encadrer chaque terme $\dfrac{1}{n}f(k/n)$.
2. Séparer en deux l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{1/n}$ d'un côté et $\displaystyle\int_{1/n}^1$ de l'autre.

Ex 18. Comparer à chaque fois à une intégrale de Riemann ou bien à $\ln(x)$.

Ex 19. Pour les 3 et 4, chercher le changement de variable qui ramène à une intégrale du type $\displaystyle\int \frac{\sin u}{u^\gamma}\,\mathrm{d}u$.

Ex 20. On écrira ces expressions sous la forme $\mathrm{e}^{-\varphi(x)}$ et on comparera $\varphi(x)$ à $\alpha\ln x$ pour un α bien choisi.

Ex 21. **3.** Utiliser $|\sin t| \geqslant \sin^2 t$ pour tout t réel.

Ex 22. Un développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ ne suffit pas : pousser à l'ordre 2 et traiter à part le terme en $\sin^2(t)/t^{2\alpha}$, soit par intégration par parties, soit par comparaison à une somme avec découpage par la relation de Chasles.

Ex 23. **1.** Écrire $\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}+\cos t} = \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{\cos t}{\sqrt{t}}}$, et faire un dl à l'ordre 2.

Ex 24. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sur un segment de I.

Ex 25. **3.** Démontrer d'abord que f'^2 est intégrable en écrivant $\displaystyle\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''$, et conclure par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Ex 26. **1.** Poser $F : y \mapsto \displaystyle\int_0^y f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$, puis considérer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-\delta t}\,\mathrm{d}t$ avec $\delta = x - a > 0$.

Ex 27. **2.** Majorer $|f(x)|$ en intégrant f sur un intervalle suffisamment petit autour de x.
3. Pour $y > x$, écrire $f(y)-f(x)$ comme une intégrale, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation de Chasles.

Ex 28. On découpera $\mathbb{R}_+$ en intervalles $[n\pi,(n+1)\pi]$ et, sur chacun d'eux, on isolera un voisinage des points où sin s'annule, de longueur bien choisie en fonction de n.

Ex 29. **2.** Intégrer par parties.
3. Poser $u = \tan(t/2)$.
5. Poser $t = a + (b-a)\sin^2\theta$.

Ex 30. **1.** Intégrer par parties.

Ex 31. **2.** Changement de variable $u = 1/t$.
3. Poser $u = t - 1/t$.

Ex 32. **1.** Décomposer en éléments simples, puis regrouper les logarithmes avant de passer à la limite.

Ex 33. Remarquer que $F(1) = 0$ et que $F(x) \to \mathrm{I}$ lorsque $x \to 0^+$, puis intégrer l'expression de F' entre x et 1

Ex 34. **3.** Contrairement aux précédentes, cette intégrale n'est pas absolument convergente : on regroupera les contributions sur les intervalles $[n, n+1]$.

Ex 36. Poser $u = bt - \dfrac{a}{t}$: cette application réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On pourra aussi effectuer le changement de variable $t \mapsto a/(bt)$ et combiner les deux écritures obtenues.

Ex 37. Rappel : le coefficient de la DES associé à un pôle simple ω de $1/Q$ vaut $1/Q'(\omega)$

Ex 39. Utiliser des intégrations par parties et l'intégration des relations de comparaison.

Ex 40. Écrire $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) \mathrm{d}t + \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1}$: la première fonction se prolonge par continuité en 1, et la seconde intégrale se calcule explicitement.

Ex 41. **4.** On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Ex 43. Dans chaque cas, une intégration par parties bien choisie fait apparaître l'intégrale de départ multipliée par un $o(1)$

Ex 45. **1.** Écrire $f = \mu + (f - \mu)$: une primitive G de $f - \mu$ est T-périodique, donc bornée, ce qui permet d'intégrer par parties $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t) - \mu}{t}\,\mathrm{d}t$

Ex 46. Selon les cas : changement de variable ramenant à une intégrale indépendante de n, découpage de l'intervalle en deux, ou intégration par parties.

Ex 59. **3.** Approcher f par une fonction en escalier à support compact, au sens où $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi|$ est arbitrairement petit.

Ex 60. **1.** La condition est le caractère borné de u. Pour la réciproque, faire une contraposée.
3. Penser aussi à des pics.

Ex 61. **1.** Qui s'y frotte...

Ex 62. **1.** Reconnaître un taux d'accroissement en 0.
2. Déterminer d'abord une primitive de g^2 en fonction de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f$.
4. Tester des fonctions du type $x \mapsto x^{-\alpha}$ tronquées.

Ex 63. **1.a.** L'expression est linéaire en P : il suffit de traiter le cas $P = X^k$
2. Appliquer ce qui précède à $P = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.

Ex 64. Pour l'optimalité de la constante 1, tester des fonctions du type $x \mapsto \varphi(x/n)\cos x$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support inclus dans un segment.

Ex 65. **1.** Raisonner par l'absurde : si f ne change de signe qu'en $x_1 < \cdots < x_m$ avec $m \leqslant n$, considérer $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - x_i)$.
3. Chercher f sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^{1/4}} \sin\left(x^{1/4}\right)$ et se ramener, par le changement de variable $x = u^4$, à la question précédente

Ex 66. **1.** Sur $[-1, 1]$, f est continue donc bornée. Si $|x| \geqslant 1$, $f(x)^2 \leqslant x^2 f(x)^2$.

Ex 67. **2.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}} \left(|f(x)| \sqrt{\alpha + \beta x^2}\right) \mathrm{d}x$, appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis optimiser en α et β.

Ex 68. **1.** Pour la convergence, utiliser $f(0) = f(1) = 0$ et le caractère $\mathcal{C}^1$ de f : $f(t) = \mathrm{O}(t)$ en 0 et $\mathrm{O}(1-t)$ en 1, alors que $\operatorname{cotan}(\pi t)$ y est équivalent à $\dfrac{1}{\pi t}$ et $\dfrac{-1}{\pi(1-t)}$; pour la comparaison, intégrer $\mathrm{I}(f)$ par parties
2. Développer $\displaystyle\int_0^1 \left(f'(t) - \pi \operatorname{cotan}(\pi t) f(t)\right)^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$.

Ex 69. **1.** Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Là où f' ne s'annule pas, écrire $\mathrm{e}^{\mathrm{i}f} = \dfrac{1}{\mathrm{i}f'}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}f}\right)'$ et intégrer par parties ; contrôler séparément un voisinage du point où f' s'annule.

Ex 70. 2. Exploiter la symétrie $x \mapsto -x$ sur $[-1, 1]$ pour faire apparaître $f(x) - f(-x)$.