

TD 02 Intégration

1 Exercices classiques

Exercice 1. *Intégrales de Bertrand.* ●○○ Étudier, selon les valeurs des réels α et β , la nature de l'intégrale

$$B(\alpha, \beta) = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}.$$

Correction. C'est en fait + simple que les séries de Bertrand.

- si $\alpha > 1$, soit $\gamma \in]1, \alpha[$. Alors $t^\beta \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$, intégrable, donc, par comparaison, l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge.

- si $\alpha < 1$, on montre que, pour $\gamma \in]\alpha, 1[$, $\frac{1}{t^\gamma} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta}\right)$.

- si $\alpha = 1$, on remarque que, pour $x \geq e$,

$$\int_e^x \frac{dt}{t \ln(t)^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \ln(x)^{1-\beta},$$

quantité qui converge si et seulement si $\beta > 1$

Exercice 2. *Suite d'intégrales* – $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt$. ●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (\ln t)^n dt$.

- Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0 .

Correction. Déjà, la fonction $t \mapsto \ln(t)^n$ est continue sur $]0, 1[$. Ensuite, par croissances comparées, $\ln(t)^n \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, intégrable en 0. Par comparaison, $t \mapsto \ln(t)^n$ est intégrable en 0. On a $I_0 = 1$.

- Pour $n \geq 1$, établir la relation $I_n = -nI_{n-1}$.

Correction. Notons $u(t) = \ln(t)^n$, $u'(t) = \frac{n}{t} \ln(t)^{n-1}$, $v(t) = t$, $v'(t) = 1$. Comme $u(t)v(t)$ admet des limites finies en 0 et en 1 (par croissances comparées), on en déduit, par intégration par parties, que

$$I_n = [\ln(t)^n t]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{t} \ln(t)^{n-1} t dt = -nI_{n-1}.$$

- En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction. On en déduit, par récurrence immédiate, que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $I_n = (-1)^n n!$.

- Retrouver le résultat en effectuant le changement de variable $t = e^{-u}$.

Correction. On note $\varphi : u \mapsto e^{-u}$. Alors φ est une bijection décroissante et $\mathcal{C}^1$ de $[0, +\infty[$ dans $]0, 1[$. Ainsi, par changement de variables,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \ln(t)^n dt \\ &= - \int_0^{+\infty} (-u)^n \times (-e^{-u}) du \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du. \end{aligned}$$

En faisant à nouveau des IPP, on retrouve le même résultat.

Exercice 3. *Formule de Wallis* – $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. ●○○

Correction. J'enfonce vraiment le clou... c'est un essentiel qu'on ne corrigera pas.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

1. Calculer W_0 et W_1 . Pour $n \geq 2$, établir par intégration par parties la relation $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.
2. En déduire W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (distinguer n pair et n impair).
3. Montrer que (W_n) est décroissante et que $W_n \rightarrow 0$. En encadrant W_{2n} entre W_{2n+1} et W_{2n-1} , montrer que $W_{2n} \sim W_{2n+1}$, puis établir la *formule de Wallis* :

$$\prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

4. En déduire un équivalent simple de W_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Correction. Exercice déjà fait !

Exercice 4. Suite d'intégrales – $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. ●○○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1. Justifier l'existence de J_n . Calculer J_1 .

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $f : t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Ensuite, $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$, intégrable en $+\infty$ ($2n > 1$). Ainsi, J_n est bien définie.

En particulier, $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$.

2. En écrivant $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2) - t^2}{(1+t^2)^n} dt$ et en intégrant par parties $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt$, établir la relation

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n.$$

3. En déduire la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Montrer que (J_n) converge et calculer sa limite.

Correction. Remarque. On peut faire le changement de variable suivant : $\tan$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $[0, +\infty[$. Ainsi, en posant le $t = \tan(\theta)$, i.e. $\theta = \text{Arctan}(t)$, on a $\frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+\tan(\theta)^2)^n} = \cos(\theta)^{2n}$. De plus, $dt = \frac{1}{1+\tan(\theta)^2} d\theta = \cos(\theta)^2 d\theta$, d'où

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{2n+1} d\theta.$$

C'est une intégrale de Wallis, d'où le fait que l'on trouve le même résultat !

Exercice 5. Sommes de Riemann. ●○○ Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$
2. $v_n = \frac{1}{n^2} \prod_{k=1}^n (n^2 + k^2)^{1/n}$
3. $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$
4. $s_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 6. Intégrale impropre – $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$. ●●○ On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

1. Justifier la convergence de I et de J .
2. Montrer que $I = J$.
3. En écrivant $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2t)\right) dt$, effectuer le changement de variable $u = 2t$ et montrer à l'aide de la relation $\sin(\pi - u) = \sin u$ que $\int_0^\pi \ln(\sin u) du = 2I$. En déduire la valeur de $I + J$ en fonction de I .
4. Conclure.

Exercice 7. Intégrale impropre à paramètre – $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$. ●●○ Pour $a > 0$, on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2 + t^2} dt$.

1. Justifier que $I(a)$ est bien définie pour tout $a > 0$.
2. Montrer que $I(1) = 0$ à l'aide du changement de variable $t \mapsto 1/t$.
3. En effectuant le changement de variable $t = au$, montrer que

$$I(a) = \frac{1}{a} \left(I(1) + \frac{\pi}{2} \ln a \right).$$

En déduire $I(a)$ pour tout $a > 0$.

Exercice 8. Intégrale de Cauchy-Frullani. ●●○ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

1. Calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{f(t)}{t} dt$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ converge et calculer sa valeur.
3. Application : montrer que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 9. Étude asymptotique – $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. ●●○ On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Justifier que F est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et préciser ses variations.
2. Montrer que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. En utilisant que $\frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}$ et en intégrant cette comparaison, établir que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.
3. En intégrant par parties, montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 10. Intégrale de Dirichlet. ●●○ Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$.

1. Calculer $I_{n+1} - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire la valeur de I_n .
2. Montrer que $\varphi : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\pi, \pi[$. En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin((2n+1)t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Montrer que $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

4. En déduire, par le changement de variable $u = (2n+1)t$, la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

2 Révisions de sup

Exercice 11. Sommes de Riemann – calculs de limites. ●○○ Déterminer la limite des suites suivantes :

1. $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n\sqrt{4n^2 - k^2}}$
2. $b_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{4n^2 - k^2}$
3. $c_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$
4. $d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

Exercice 12. *Un classique très formateur.* ●○○ Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$.

1. Calculer $I_{n,0}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Trouver, pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$. En déduire l'expression de $I_{p,q}$.
3. En calculant $I_{p,q}$ d'une seconde manière, montrer que

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p! q!}{(p+q+1)!}.$$

4. Traiter de même $J_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} dt$ et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+3} \binom{n}{k} = 2^{2n+2} \frac{n! (n+2)!}{(2n+4)!}.$$

Exercice 13. *Sommes de Riemann – au-delà du théorème.* ●●○

1. Déterminer la limite de $y_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
2. Soit $\alpha > -1$. Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 14. *Inégalité de Jensen.* ●●○ Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et convexe.

1. On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que pour tous $x, c \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \geq \varphi(c) + (x-c)\varphi'(c)$.
2. En choisissant convenablement c , établir l'inégalité de Jensen :

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(f(t)) dt.$$

3. Soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, d'intégrale égale à 1. Établir $\varphi\left(\int_a^b f g\right) \leq \int_a^b (\varphi \circ f) g$.
4. Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : x \mapsto x^2$, puis à $\varphi_2 : x \mapsto 1/x$ (pour $f > 0$), et retrouver ces deux résultats à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement positive, d'intégrale égale à 1. Montrer que $\int_0^1 h(t) \ln(h(t)) dt \geq 0$.
6. Soient h et k deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, strictement positives, d'intégrales égales à 1. Montrer que

$$\int_0^1 h(t) \ln(h(t)) dt \geq \int_0^1 h(t) \ln(k(t)) dt.$$

Exercice 15. *Formule de la moyenne et oscillations rapides.* ●●○

1. Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ avec g positive. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

2. Soient $T > 0$, $f \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T -périodique. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t) g(nt) dt$.

Correction. On suppose g positive dans un premier temps. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On écrit que

$$\int_0^T f(t)g(nt)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} f(t)g(nt)dt.$$

Par la question précédente, on dispose de $n - 1$ points $(x_{n,1}, \dots, x_{n,n-1})$ vérifiant, pour tout k , $x_{n,k} \in \left[\frac{kT}{n}, \frac{(k+1)T}{n}\right]$ tels que

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)g(nt)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \int_{\frac{kT}{n}}^{\frac{(k+1)T}{n}} g(nt)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \int_{kT}^{(k+1)T} g(u) \frac{1}{n} du \text{ en posant } u = nt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \frac{1}{n} \int_0^T g(u)du, \end{aligned}$$

car l'intégrale d'une fonction périodique sur une période est égale l'intégrale de cette fonction sur $[0, T]$. Mais, par le théorème des sommes de Riemann, $\frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{n,k}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)dt$, d'où

$$\int_0^T f(t)g(nt)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^T f(t)dt \int_0^T g(t)dt.$$

On adapte à g quelconque en décomposant g en parties positive et négative, et on obtient le même résultat !
Remarque : on retrouve le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 16. Sommes de Riemann pour une fonction monotone intégrable. ●●● Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \int_0^1 f(t)dt$ (la valeur $+\infty$ étant autorisée).

Correction. Par comparaison somme-intégrale, on peut écrire que, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t)dt,$$

la dernière intégrale valant éventuellement $+\infty$. Ainsi, en sommant, on obtient l'inégalité désirée.

2. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si la suite (S_n) converge, et qu'alors $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t)dt$.

Correction. La même comparaison à une intégrale assure que

$$S_n \leq \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

d'où

$$S_n \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + S_n - \frac{1}{n} f(1),$$

Ainsi, si f est intégrable, l'encadrement

$$\int_0^1 f(t)dt - \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \frac{f(1)}{n} \leq S_n \leq \int_0^1 f(t)dt$$

assure que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

Réciproquement, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, elle est majorée par $M > 0$ et l'inégalité

$$0 \leq \int_{1/n}^1 f(t) dt \leq S_n + \frac{f(1)}{n} \leq M + f(1)$$

assure que $\int_{1/n}^1 f(t) dt$, qui est croissante et majorée, donc converge. Par positivité de f , $\int_x^1 f(t) dt$ converge, donc f est intégrable et la première partie de la question assure que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$.

3. Variante. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f.$$

Correction. On note $\sigma(h) = \sum_{n=1}^{+\infty} h f(nh)$ pour $h > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [(n-1)h, nh]$, la décroissance de f donne

$$h f(nh) = \int_{(n-1)h}^{nh} f(nh) dt \leq \int_{(n-1)h}^{nh} f(t) dt.$$

En sommant pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, il vient $\sum_{n=1}^N h f(nh) \leq \int_0^{Nh} f(t) dt \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$, la dernière intégrale étant finie par intégrabilité de f . La série $\sum h f(nh)$ est donc à termes positifs et à sommes partielles majorées : elle converge, et $\sigma(h) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

De même, pour $t \in [nh, (n+1)h]$ on a $f(t) \leq f(nh)$, donc $\int_{nh}^{(n+1)h} f(t) dt \leq h f(nh)$, et en sommant pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\int_h^{(N+1)h} f(t) dt \leq \sum_{n=1}^N h f(nh) \leq \sigma(h).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $\int_h^{+\infty} f(t) dt \leq \sigma(h)$, d'où

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt - \int_0^h f(t) dt \leq \Sigma(h) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Comme f est intégrable sur $]0, +\infty[$, on a $\int_0^h f(t) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} h f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

3 Convergence d'intégrales et intégrabilité

3.1 Natures d'intégrales

Exercice 17. Nature d'intégrales – niveau 1. ●○○ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t \sinh t}}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t \operatorname{sh}(t)}}$. Alors

- f est continue sur $]0, 1]$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$, non intégrable en 0.

Donc l'intégrale ne converge pas.

2. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$. Alors

- f est continue sur $]0, 1[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, intégrable en 1 (intégrale de Riemann).

Donc $\int_0^1 f$ converge.

3. $\int_0^{+\infty} e^{-(t+\frac{1}{t})} dt$

Correction. Soit $f : t \mapsto e^{-(t+\frac{1}{t})}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} e^{-\frac{1}{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
- $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$, intégrable en $+\infty$.

Par théorème de comparaison, l'intégrale converge donc.

4. $\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$. Alors

- f est continue sur $]0, 1[$,
- $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.
- $f(t) \underset{t}{\sim} \frac{1}{t-1}$, qui n'est pas intégrable en 1.

L'intégrale diverge donc.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{1 - \cos t}{t^2}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1 - 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2)}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc l'intégrale est faussement impropre en 0,
- $|f(t)| \leq \frac{2}{t^2}$, intégrable en $+\infty$ (intégrales de Riemann), donc f est intégrable en $+\infty$.

Donc l'intégrale converge.

6. $\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt$

Correction. Soit $f : t \mapsto \ln(1 - e^{-t})$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(1 - 1 + t + o(t)) \underset{t \rightarrow 0}{=} \ln(t) + \ln(1 + o(1)) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$, intégrable en 0, donc, par comparaison, f est intégrable en 0,
- $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{-t}$, intégrable en $+\infty$ donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale converge.

Exercice 18. Nature d'intégrales avec paramètres. ●○○ Discuter, selon les paramètres réels indiqués, l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

1. $x \mapsto \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;
2. $x \mapsto \frac{(\ln(1/x))^\gamma}{x^\alpha(1-x)^\beta}$ sur $]0, 1[$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$;
3. $x \mapsto \frac{\ln(1+x^a)}{x^b}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où $a > 0$ et $b > 0$;
4. $x \mapsto \exp(-(\ln x)^\alpha)$ sur $[2, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

Exercice 19. Nature d'intégrales – les pièges. ●●○ Déterminer la nature des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$

Correction. Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$. Alors

- f est continue sur $]1, +\infty[$,
- $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{x-1}$, intégrable en 1, donc, par comparaison, f est intégrable en 1,
- $x^{5/4}f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^{5/4}} \rightarrow 0$, donc f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale converge.

2. $\int_e^4 \frac{dt}{\ln(\ln t)}$

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(\ln(t))}$. Alors

- f est continue sur $]e, 4]$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow e}{\sim} \frac{1}{\ln(t) - 1} = \frac{1}{\ln(e) + \ln(t/e) - 1} = \frac{1}{\ln(t/e)} \underset{t \rightarrow e}{\sim} \frac{1}{t/e - 1}$, non intégrable en e , donc l'intégrale ne converge pas.

3. $\int_0^{+\infty} \cos(e^t) dt$

Correction. La fonction $\varphi : t \mapsto e^t$ est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$, $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante. Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \cos(e^t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(e^t)}{e^t} e^t dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$$

ont même nature. La seconde intégrale converge (on l'a fait en cours avec du sinus) donc la première intégrale converge.

4. $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$

Correction. La fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ donc, par le théorème de changement de variables, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{2t} 2t dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2\sqrt{u}} du$$

ont même nature. La seconde intégrale converge (quasi-faite en classe) donc la première converge aussi.

5. $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Correction. Soit $f : t \mapsto \sin(t) \sin(1/t)$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre,
- $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{t}$, et là, **ATTENTION!!!!** On ne peut pas conclure ! Il faut se ramener à un terme absolument convergent. Ainsi, on écrit que

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \sin(t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{6t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right) \right) \\ \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(t)}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Ainsi, $f(t) = \frac{\sin(t)}{t} + g(t)$, où $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$. La première fonction est d'intégrale convergente, et la deuxième est intégrable par le critère de convergence des intégrales de Riemann. Donc $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Exercice 20. *Logarithmes itérés.* ●●○ Étudier l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{(\ln x)^{\ln(\ln x)}}.$$

3.2 Semi-convergence

Exercice 21. $\int \sin(t)/t^\alpha dt$: la discussion complète. ●●○ Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha(t) = \frac{\sin t}{t^\alpha}$ pour $t \geq 1$. Le but est de discuter, selon α , la convergence et la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} f_\alpha(t) dt$.

1. Traiter le cas $\alpha > 1$.
2. Pour $\alpha \in]0, 1]$, établir la convergence de l'intégrale par une intégration par parties.
3. Étudier la convergence absolue.
4. Pour $\alpha \leq 0$, minorer $\int_1^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} f_\alpha - \int_1^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} f_\alpha$ et conclure à une contradiction avec la convergence.
5. Récapituler dans un tableau.

Exercice 22. $\int \ln(1 + \sin(t)/t^\alpha) dt$. ●●○ Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de $\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{t^\alpha}\right) dt$, puis commenter en comparant avec la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$.

Exercice 23. Le théorème des équivalents ne s'applique pas aux fonctions de signe variable. ●●○

1. Étudier le comportement, lorsque $x \rightarrow +\infty$, de $u(x) = \int_2^x \frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} dt$.
2. En déduire l'existence de deux fonctions f et g continues sur $[2, +\infty[$, équivalentes en $+\infty$, telles que $\int_2^{+\infty} f$ converge et $\int_2^{+\infty} g$ diverge.

3. Mêmes questions avec $\int_2^x \frac{\cos t}{\ln t} dt$ et $\int_2^x \frac{\cos t}{\ln t + \cos t} dt$.

3.3 Exercices théoriques

Exercice 24. f et $1/f$ intégrables. ●●○ Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On suppose que f et $1/f$ sont toutes deux intégrables sur I . Montrer que I est borné.

Exercice 25. f et f'' intégrables. ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, puis que cette limite est nulle.
2. En déduire que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, puis que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. Montrer que $f f'$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Exercice 26. *Domaine de définition d'une transformée de Laplace.* ●●○

1. Soient $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at} dt$ converge. Montrer que pour tout $x > a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ converge.
2. Soit $g \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{+\infty} g$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 27. *Que manque-t-il pour tendre vers 0 ?* ●●○ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge.

1. Donner un exemple d'une telle fonction, à valeurs positives, intégrable et non bornée.
2. On suppose f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \mapsto \int_x^{x+1} f'(t)^2 dt$ bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 28. *Un monstre.* ●●● Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + x^\alpha |\sin x|^\beta}.$$

4 Calcul d'intégrales

Exercice 29. *Batterie de calculs.* ●○○ Vérifier l'existence puis calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1}$
2. $\int_0^1 \frac{\ln(1 - t^2)}{t^2} dt$
3. $\int_0^\pi \frac{dt}{2 + \cos t}$
4. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$
5. $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}$, où $a < b$

Exercice 30. $\int_0^{+\infty} \ln(1 + 1/t^2) dt$. ●○○

1. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ et calculer sa valeur.

Correction. On note $f : t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) = -2\ln(t) + \ln(t^2 + 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -2\ln(t)$, intégrable en 0, donc f est intégrable en 0,
- $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, ce qui assure, par comparaison, que f est intégrable en $+\infty$,

donc l'intégrale converge bien.

Ensuite on note $u(t) = \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$, $u'(t) = \frac{-\frac{2}{t^3}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{-2}{t^3 + t}$ et $v(t) = t$, $v'(t) = 1$. Le crochet $\left[t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty}$ converge, ce qui assure, par intégration par parties, que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt &= \left[t \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^3 + t} t dt \\ &= 0 + \int_0^{+\infty} \frac{2}{t^2 + 1} dt = \pi. \end{aligned}$$

2. Même travail pour $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right) dt$.

Correction. On note $f : t \mapsto \frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}$. Alors :

- f est continue sur $[1, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$, intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

D'où la convergence de l'intégrale. On fait ensuite une intégration par parties, en intégrant 1 et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}$. Le crochet converge bien (il est tard et j'en ai marre), et

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right) dt &= \left[1 - t \operatorname{Arctan}\frac{1}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_1^{+\infty} t \times \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{t^2}}\right) dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t}{1 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Soit $A > 1$. Alors $\int_1^A \frac{1}{t} - \frac{t}{1 + t^2} dt = \ln(A) - \ln(1 + A^2) = \ln\left(\frac{A}{1 + A^2}\right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, l'intégrale vaut 0.

Exercice 31. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4}$ et $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$. ●●○

1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{1 + t^4}$.
2. Établir l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1 + t^4}$.
3. En calculant la somme de ces deux intégrales, en déduire leur valeur commune.
4. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t} dt$.

Exercice 32. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}$. ●●○

1. Soit $n \geq 2$. Vérifier l'existence puis calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}.$$

2. Généralisation. Soient $n \geq 2$, $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire, simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et dont toutes les racines sont strictement négatives, et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ et en donner une expression.

Exercice 33. Une intégrale avec des bornes variables. ●●○ On pose $g : t \mapsto \frac{t \operatorname{Arctan} t}{(1+t^2)^2}$.

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{t \operatorname{Arctan}(t)}{(1+t^2)^2}$. Alors

- f est continue sur $[0 + \infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t^3}$, positive et intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Ainsi, I converge.

2. Soit $F : x \mapsto \int_x^{1/x} g(t) dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer une expression de F' ne faisant pas intervenir Arctan .

Correction.

Soit G une primitive de f . Alors $F(x) = G(x) - G(1/x)$. Ainsi, F est dérivable, de dérivée continue car f est continue, et, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= G'(x) + \frac{1}{x^2} G'(1/x) \\ &= \frac{x \operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\frac{1}{x} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{x \operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\frac{1}{x} \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x^4} (x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{x \operatorname{Arctan}(x)}{(1+x^2)^2} + \frac{x \operatorname{Arctan}(\frac{1}{x})}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$F(x) = C - \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+x^2}.$$

Or, $F(1) = 0$, ce qui assure que $C = \frac{\pi}{8}$. Donc, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+x^2}$.

3. En déduire la valeur de I .

Correction. On en déduit que $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} I$, ce qui signifie que $I = \frac{\pi}{8}$.

Exercice 34. Parties entières et constante d'Euler. ●●○ On note γ la constante d'Euler, c'est-à-dire la limite de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

- Montrer l'existence et calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^3} dx$.
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2} dx$ converge et vaut $1 - \gamma$.
- Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}}{x} dx$ converge.

Exercice 35. Une intégrale et une somme. ●●○

1. Montrer que $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ réalise une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ est bien définie, et la calculer.
3. Montrer que $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer sa limite lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 36. $\int_0^{+\infty} \exp(-a^2/t^2 - b^2 t^2) dt$. ●●○ Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{t^2} - b^2 t^2\right) dt.$$

Exercice 37. Fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$. ●●○

1. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x \frac{dt}{t - \omega}$.
2. Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle de degré ≤ -2 , à pôles simples et non réels. En déduire une expression de $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ à l'aide des coefficients de la décomposition en éléments simples de F associés aux pôles de partie imaginaire strictement positive.
3. Application : calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 38. Intégrale de Poisson. ●●○

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) x + 1 \right).$$

2. En déduire, à l'aide de sommes de Riemann, la valeur de $\int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos \theta + r^2) d\theta$ pour $|r| < 1$, puis pour $|r| > 1$.
3. Que se passe-t-il lorsque $r \rightarrow 1$? Commenter.

5 Asymptotique

Exercice 39. Logarithme intégral. ●●○ On pose, pour $x > 1$, $\text{li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que $\text{li}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$.

Correction. Soit $x > 2$. On fait une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ et en intégrant $t \mapsto 1$ en $t \mapsto t$. Ainsi, toutes les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur $[2, x]$, on obtient

$$\begin{aligned} \text{li}(x) &= \left[\frac{t}{\ln(t)} \right]_2^x + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2} dt \\ &= \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Mais $\frac{1}{\ln(t)^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$, et $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est positive et non intégrable en $+\infty$, car $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t}$ pour t assez grand. Ainsi, par intégration des relations de comparaison, on a :

$$\text{li}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}\right),$$

ce qui assure que $\text{li}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$.

2. Déterminer un développement asymptotique de $\text{li}(x)$ à deux termes en $+\infty$, puis à n termes.

Correction. On a déterminé un premier équivalent. On écrit désormais que

$$\operatorname{li}(x) - \frac{x}{\ln(x)} = -\frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2} dt$$

En refaisant une intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)^2}$ et en intégrant $t \mapsto 1$, on obtient que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2} dt = -\frac{\ln(2)}{2} + \left[\frac{t}{\ln(t)^2} \right]_2^x + 2 \int_2^x \frac{1}{\ln(t)^3} dt.$$

Déjà, comme $\frac{t}{\ln(t)^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que $\frac{1}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(t)^2}\right)$ ce qui assure que $\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2} dt$ diverge.

Mais $\frac{1}{\ln(t)^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(t)^2}\right)$, positive et non intégrable en $+\infty$, ce qui assure, par sommation des relations de comparaison, que

$$\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^3} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^2} dt\right).$$

Ainsi, $\int_2^x \frac{1}{\ln(t)^3} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)^2}$. On en déduit donc que

$$\operatorname{li}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{\ln(x)} + \frac{x}{\ln(x)^2} + o\left(\frac{x}{\ln(x)^2}\right).$$

On obtient le même résultat pour n , en pensant aux coefficients qui se rajoutent :

$$\operatorname{li}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{\ln x} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln x)^k} + o\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right).$$

Exercice 40. $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. ●●○ On considère la fonction $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Déterminer le domaine de définition naturel de f et justifier que f y est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 41. Étude complète de $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$. ●●○

1. Déterminer le domaine de définition de F et calculer F' .
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $F(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$, puis, en poussant le calcul, $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right)$.
3. Déterminer un équivalent simple de F en 0^+ , puis montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} -\ln x + C + o(1)$.
4. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.

Exercice 42. $\int_0^x e^{it^2} dt$. ●●○ On pose $f(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$ pour $x \geq 0$.

1. Montrer que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
2. Vérifier que

$$\ell - f(x) = -\frac{e^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{e^{it^2}}{t^2} dt,$$

et en déduire un équivalent de $\ell - f(x)$ en $+\infty$.

3. En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ et de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$.

Exercice 43. Équivalents en $+\infty$. ●●○ Trouver un équivalent simple, lorsque $x \rightarrow +\infty$, de :

1. $\int_1^x e^t t^\alpha dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. $\int_x^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$, où $\alpha > 0$;
3. $\int_1^x e^{(\ln t)^\alpha} dt$, où $\alpha > 0$;
4. $\int_1^x t^t dt$;
5. $\int_x^{+\infty} t^{-t} dt$.

Exercice 44. $f'/f \sim \mu/x$. ●●○ Soient $f \in \mathcal{C}^1([1, +\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mu}{x}$.

1. On suppose $\mu > -1$ et $\mu \neq 0$. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ et que

$$\int_1^x f \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x f(x)}{\mu + 1}.$$

2. Énoncer et démontrer un résultat analogue lorsque $\mu < -1$.

3. Que peut-on dire si l'on suppose seulement $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a$ avec $a < 0$?

Exercice 45. *Moyenne d'une fonction périodique.* ●●○ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, T -périodique, de moyenne $\mu = \frac{1}{T} \int_0^T f$.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mu \ln x + c + o(1)$.
2. À quelle condition l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge-t-elle ? À quelle condition la fonction $t \mapsto f(t)/t$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
3. On suppose cette condition réalisée et on note ℓ la limite en $+\infty$ de $F(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$. Montrer que $F(x) - \ell = O(1/x)$. Que dire de f si l'on a de plus $F(x) - \ell = o(1/x)$?

Exercice 46. *Termes généraux définis par une intégrale.* ●●○ Déterminer la nature des séries de terme général suivant ($\alpha > 0$, $a \geq 0$).

1. $u_n = \int_0^{1/n^\alpha} \sqrt{|\ln t|} dt$
2. $u_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$
3. $u_n = \int_0^1 t^n \ln(1-t) dt$
4. $u_n = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$; $v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$
5. $u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n \sin(nt) dt$
6. $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$

6 Du côté des concours

Exercice 47. CCINP MP 2015. Soient $p \in \mathbb{N}$ fixé et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t + 1} e^{-nt} dt$.

1. Montrer l'existence de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, $T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt$. Déterminer l'expression de $T(a, b)$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}} - S_n$.
- Montrer que la suite (S_n) converge.
- Montrer que $S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{p+1}}$.

Correction.

- La fonction est continue en 0 donc il n'y a pas de problème d'intégrabilité en 0. En $+\infty$, on a $\frac{t^p}{e^t + 1} e^{-nt} \sim t^p e^{-(n+1)t} = o(1/t^2)$ par croissances comparées. D'où l'intégrabilité.
- En effectuant une intégration par parties avec $u(t) = t^a$, $v'(t) = e^{-bt}$, on trouve

$$T(a, b) = \frac{a}{b} T(a-1, b) = \frac{a!}{b^{a+1}},$$

car $T(0, b) = 1/b$.

- On montre le résultat par récurrence. **Initialisation.** $S_0 = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t + 1} e^t e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^p (e^t + 1 - 1)}{e^t + 1} e^{-t} dt = p! - S_1$. **Hérédité.** De même, $S_n = \frac{p!}{n^{p+1}} - S_{n+1}$, d'où le résultat par récurrence.
- L'intégrande tend ponctuellement vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et est majoré uniformément par $t^p/(e^t + 1)$, intégrable, donc S_n tend vers 0 par convergence dominée.
- Le résultat se déduit immédiatement en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente.

Exercice 48. Mines-Télécom MP 2017. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, continue, décroissante, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
- Montrer que $f(x) = o(x) \rightarrow +\infty \left(\frac{1}{x}\right)$.
- Trouver un contre-exemple aux questions précédentes si f n'est plus décroissante.

Correction.

- On sait que f est décroissante donc, par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite en $+\infty$. Soit ℓ cette limite. Si ℓ est finie et $\ell \neq 0$, alors f est de signe constant au voisinage de $+\infty$, et on dispose de $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \geq M, |f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2}$. Donc $\int_M^x |f(t)| dt \geq (x - M) \frac{|\ell|}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f . Si ℓ est infinie, on fait de même avec 1 à la place de $\frac{|\ell|}{2}$. Donc $\ell = 0$.
- Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors, comme f tend vers 0, f est positive, donc

$$0 \leq x f(2x) \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq \int_x^{+\infty} f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $x f(2x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $2x f(2x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $x f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $f(x) = o(x) \rightarrow +\infty \left(\frac{1}{x}\right)$.

- Il suffit de prendre pour f une fonction faite de pics : on définit pour tout n dans $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $f\left(n - \frac{1}{n^3}\right) = 0$, $f(n) = n$ et $f\left(n + \frac{1}{n^3}\right) = 0$, tous ces points étant reliés par des segments (en particulier f est nulle en-dehors des segments $\left[n - \frac{1}{n^3}, n + \frac{1}{n^3}\right]$, affine par morceaux sur $\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right]$ et sur $\left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$. Et

$$\int_0^{n + \frac{1}{n^3}} f(t) dt = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2n^2},$$

qui converge quand n tend vers $+\infty$. Pourtant f n'est même pas bornée !

Exercice 49. Mines-Ponts MP 2026. Soit $\alpha > 1$.

1. Montrer que l'équation $x^\alpha = \sin(x)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on appellera a .

Correction. On note $f : x \mapsto x^\alpha - \sin(x)$. Déjà, pour $x \geq 1$, on a immédiatement $f(x) > 0$: il suffit d'étudier cette fonction sur $]0, 1[$.

$f(0) = 0$ et f est dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée égale à $f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} - \cos(x)$. Il faut étudier le signe de f' .

Pour ce faire, on étudie $f'' : x \mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \sin(x) > 0$ sur $]0, 1[$.

Donc f' croît strictement sur $]0, 1[$. De plus, $f'(0) = -1 < 0$, et $f'(1) > 0$ car $\cos(1) < 1$. Ainsi, f' s'annule en un unique $b \in]0, 1[$.

On en déduit que f décroît puis croît sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) > 0$, on en déduit que f s'annule en $a \in]0, 1[$.

2. Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{|t^\alpha - \sin(t)|}} dt$.

Correction. Il faut écrire cette intégrale (nommons-la I) comme

$$I = \int_0^a \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t) - t^\alpha}} dt + \int_a^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t^\alpha - \sin(t)}} dt.$$

Déjà,

- $\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t) - t^\alpha}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, intégrable en 0, donc la fonction est intégrable en 0.
- en a , $\sin(t) - t^\alpha \underset{t \rightarrow a}{\sim} -f'(a)(t - a)$, car $f'(a) > 0$, donc

$$\frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t) - t^\alpha}} \underset{t \rightarrow a}{\sim} \frac{\cos(a)}{\sqrt{f'(a)}\sqrt{a - t}},$$

intégrable en a . Ceci assure que la première intégrale converge.

- La deuxième intégrale converge bien en a .
- Enfin, on s'intéresse au comportement en $+\infty$. On écrit que

$$\begin{aligned} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t^\alpha - \sin(t)}} &= \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sin(t)}{t^\alpha}}} \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} + o\left(\frac{\sin(t)}{t^\alpha}\right) \right) \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Or, $\int_{a+1}^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha/2}} dt$ converge par IPP. De plus, $\frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$, ce qui assure la convergence de la deuxième partie de l'intégrale.

Donc I converge.

Exercice 50. CCINP 2016. ●○○

1. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction. On sait qu'un tel triplet (a, b, c) existe :

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

Pour déterminer a , on multiplie par x et on évalue en 0 :

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2},$$

donc, en évaluant en 0, $1 = a$.

Ensuite, pour déterminer c , on multiplie par $(x+1)^2$ et on évalue en -1 :

$$\frac{2x+1}{x} = \frac{a(x+1)^2}{x} + b(x+1) + c$$

donc, en évaluant en -1 , $1 = c$. Puis, pour déterminer b , on peut, par exemple, multiplier par x et faire tendre vers $+\infty$. On a

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x+1} + \frac{cx}{(x+1)^2},$$

donc, en faisant tendre x vers $+\infty$, $0 = a + b$, donc $b = -1$. Finalement,

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Montrer que $\int_0^1 t \lfloor 1/t \rfloor dt$ converge puis calculer sa valeur, en admettant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Correction. Montrer la convergence d'une intégrale, c'est déjà voir où il y a potentiellement des problèmes. Ici c'est en 0.

La fonction $f : t \mapsto t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$ est continue par morceaux sur $]0, 1]$, et on sait que pour tout t dans $]0, 1]$,

$$\frac{1}{t} - 1 \leq \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq \frac{1}{t},$$

donc

$$1 - t \leq t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \leq 1,$$

donc, en faisant tendre t vers 0 et par encadrement, on obtient que $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 1$, donc f est prolongeable par continuité en 0 : l'intégrale est faussement impropre.

Pour calculer l'intégrale, on va faire du découpage.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, comme $\left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor = k$ pour t dans $\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{1/n}^1 t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k t dt \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k t^2}{2} \right]_{1/(k+1)}^{1/k} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} - \frac{k}{2(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^2 - k^2}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 51. CCINP 23. 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx. \text{ Montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Correction. C'est le lemme de Riemann-Lebesgue : un grand classique ! Effectuons une intégration par parties, en dérivat $x \mapsto f(x)$ et en primitivant $x \mapsto \sin(nx)$. On obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\frac{f(x) \cos(nx)}{n} \right]_a^b + \int_a^b f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \\ &= \frac{f(a) \cos(na)}{n} - \frac{f(b) \cos(nb)}{n} + \int_a^b f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\left| \frac{f(a) \cos(na)}{n} \right| \leq \frac{|f(a)|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc, par encadrement, $\frac{f(a) \cos(na)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. De même, $\frac{f(b) \cos(nb)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \right| &\leq \int_a^b \left| f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} \right| dx \\ &\leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc $\int_a^b f'(x) \frac{\cos(nx)}{n} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par encadrement, donc $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

(a) Montrer que I est bien convergente.

Correction. Déjà vu dans le cours (mais c'est important !).

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.

Correction. Effectuons le changement de variables $u = nx$. Comme ce changement de variables est affine, on ne le détaille pas !

$$K_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

Ainsi, comme I est bien convergente, $K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x} dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.

Correction. On remarque que

$$J_n - K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx) f(x) dx,$$

où $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)}$. Il reste à démontrer que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

- déjà, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x}{6} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc f est bien prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$.

- ensuite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)^2} \\ &= -\frac{\sin(x)^2 - x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x)^2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2 \sin(x)^2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^2 \sin(x)^2} \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Donc, par le théorème du prolongement de la classe $\mathcal{C}^1$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Le théorème de la question précédente peut donc être appliqué, et on conclut alors que $J_n - K_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- (d) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$. En déduire la valeur de I.

Correction. Soit p dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} J_{2p+1} - J_{2p-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p+1)x)}{\sin x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p-1)x)}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2p+1)x) - \sin((2p-1)x)}{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(2px) \sin(x)}{\sin x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2px) dx = 2 \left[\frac{\sin(2px)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Donc $J_{2p+1} = J_{2p-1}$ donc, par récurrence immédiate, $J_{2p+1} = J_1 = \frac{\pi}{2}$ pour tout x . Ainsi,

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{p \rightarrow +\infty} J_{2p+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 52. Mines-Ponts 19, Centrale 17. Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction. On note $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue en x , donc g est bien définie en x .

Ensuite, $\left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$, fonction d'intégrale en $+\infty$ convergente. Donc, par théorème de comparaison, f est bien définie.

Soit désormais G une primitive de g . Par convergence de l'intégrale, G admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) = \ell - G(x)$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = -g(x)$.

2. Montrer que $\frac{\sin t - t}{t^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0^+ .

Correction. C'est une question à laquelle on aurait pu répondre à l'exercice précédent. Notons $h : t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$.

- $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$ donc h est prolongeable par continuité en 0,
- Par majoration, $|h(t)| \underset{t \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme h est continue, h est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrons-le.

Déjà, $|h(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc on dispose de $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, $|h(t)| \leq 1$.

De plus, $|h|$ est continue sur le segment $[0, T]$, donc, par le théorème des bornes atteintes, $|h|$ est majorée sur $[0, T]$, par $M > 0$.

Sur $\mathbb{R}_+$, $|h|$ est donc majorée par $\max(M, 1)$ donc h est bornée.

Ensuite, la question est vraiment + délicate en 0. On remarque que $\frac{\sin(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$. On a donc envie de remplacer $\frac{\sin(t)}{t^2}$ par $\frac{1}{t}$, mais juste au voisinage de 0 !! Voilà pourquoi on fait tout le découpage qui va venir ensuite. On écrit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &= \int_x^1 \frac{\sin(t) - t + t}{t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &= \int_x^1 h(t) dt + \int_x^1 \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &= -\ln(x) + \int_x^1 h(t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Or, $|h|$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$, par, disons M , donc

$$\left| \int_x^1 h(t) dt \right| \leq M$$

Ainsi, $f(x) = -\ln(x) + k(x)$ où k est bornée, donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$.

3. Montrer que $f(x)$ est dominée par $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction. On étudie $x^2 f(x)$ et on montre que cette quantité tend vers 0 en $+\infty$. On calcule

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\left(\frac{t}{x}\right)^2} dt \\ &= x \int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2} du. \end{aligned}$$

Et là, on pense au lemme de Riemann-Lebesgue ! On fait une intégration par parties, en primitivant $\sin(ux)$ et en dérivant $\frac{1}{u^2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(ux)}{u^2} du &= x \left[\frac{-\cos(ux)}{xu^2} \right]_1^{+\infty} - 2x \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{xu^3} du \\ &= \cos(x) - 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3} du. \end{aligned}$$

L'intégration par parties était bien licite car les crochets étaient convergents. Or,

$$\begin{aligned} \left| \cos(x) - 2 \int_1^{+\infty} \frac{\cos(ux)}{u^3} du \right| &\leq |\cos(x)| + 2 \int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(ux)}{u^3} \right| du \\ &\leq 1 + 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^3} du. \end{aligned}$$

Donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

4. En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; puis établir que $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

Correction. On sait que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$, de signe constant et dont l'intégrale converge en 0, et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc, par comparaison, l'intégrale de f converge en $+\infty$.

Ensuite, pour calculer $\int_{\mathbb{R}_+} f$, on va faire une intégration par parties, en dérivant f et en intégrant 1, ce qui est licite car on sait que $[xf(x)]_0^{+\infty}$ converge grâce à l'asymptotique que nous avons faite sur f . On écrit donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)dx &= [xf(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} x \frac{-\sin(x)}{x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Exercice 53. Mines-Ponts 22. Soit f une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_n^{n+1} f(t)dt = f(n) - \int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t)dt$.

Correction. Partons de l'intégrale $\int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t)dt$. Dans cette intégrale, faisons une intégration par parties, en posant $u(t) = f(t)$, donc $u'(t) = f'(t)$, et $v(t) = t-n-1$ donc $v'(t) = 1$. Les fonctions u et v sont bien $\mathcal{C}^1$, donc

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t)dt &= [f(t)(t-n-1)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)dt \\ &= f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt, \end{aligned}$$

ce qui est l'égalité à établir.

2. On suppose que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_1^n f(t)dt\right)$ converge.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(k) &= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt \\ &= \int_1^{n+1} f(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt \right| &\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |(t-k-1)f'(t)| dt \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} |f'(t)| dt \text{ car sur } [k, k+1], |t-k-1| \leq 1 \\ &\leq \int_1^n |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

Comme f' est intégrable, la série de terme général $\int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt$ est absolument convergente, donc convergente. Donc $\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)dt$ admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, on a bien

équivalence entre la convergence de la série de terme général $f(k)$ et l'intégrale $\int_1^{n+1} f(t)dt$.

3. Application à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n^a}$ pour $a > \frac{1}{2}$.

Correction. Dans cet exemple précis, $f(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a}$, et $f'(t) = \frac{-\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} t^a + a \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^{a+1}}$. On a alors, très grossièrement, $|f'(t)| \leq \frac{1}{t^{a+1/2}}$ sur $[1, +\infty[$, qui est bien intégrable. Ainsi, la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{n}}{n^a}$ équivaut à celle de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a} dt$. Pour déterminer la convergence de cette intégrale, on peut faire une intégration par parties. *La première fois que j'ai fait cet exercice, j'ai voulu intégrer le $1/t^a$ et dériver le $\cos$: ça ne marche pas !* On pose $u(t) = 2 \sin(\sqrt{t})$, donc $u'(t) = \frac{\cos(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ et $v(t) = \frac{1}{t^{a-1/2}}$, donc $v'(t) = \frac{\frac{1}{2} - a}{t^{a+1/2}}$. Or, le crochet

$$\left[\sin(\sqrt{t}) \frac{1}{t^{a-1/2}} \right]_1^{+\infty}$$

converge, donc les intégrales $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{t^a} dt$ et

$$I_2 = \int_1^{+\infty} 2 \sin(\sqrt{t}) \frac{\frac{1}{2} - a}{t^{a+1/2}} dt$$

sont de même nature. Mais on remarque que

$$\left| \frac{\sin(\sqrt{t})}{t^{a+1/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{a+1/2}},$$

qui est intégrable (intégrale de Riemann). Par théorème de comparaison, on en déduit que I_2 converge, donc I_1 converge, donc la série de terme général $\left(\frac{\cos \sqrt{n}}{n^a} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 54. On définit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

1. Justifier la convergence de I .

Correction. On note $f(t) = \frac{\sin^3(t)}{t^2}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3}{t^2} = t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, donc f est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable en 0,
- $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$, intégrable en $+\infty$, donc, par comparaison, f est intégrable en $+\infty$.

Donc I converge bien.

2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, \sin^3(t) = -\frac{1}{4} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin(t)$.

Correction. On calcule

$$\begin{aligned} \sin^3(t) &= \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{3it}) \\ &= -\frac{\sin(3t)}{4} + \frac{3}{4} \sin(t). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. Montrer que $I = \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

Correction. On ne peut pas utiliser la question précédente et séparer l'intégrale en 2... On sait que $I = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2} dt$. Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2} dt &= \int_x^{+\infty} \frac{-\frac{1}{4} \sin(3t) + \frac{3}{4} \sin(t)}{t^2} dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt, \end{aligned}$$

la séparation étant licite car les deux intégrales convergent. Dans la première intégrale, on fait le changement de variables $u = 3t$ et on obtient

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2} dt = \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} \times 9 \frac{du}{3} = 3 \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2} du.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{t^2} dt &= -\frac{1}{4} \int_{3x}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt + \frac{3}{4} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \\ &= \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

4. Montrer que $g(t) = \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est définie et prolongeable par continuité sur $]0, +\infty[$.
5. En déduire la valeur de I .

Correction. On sait que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin(t) \leq t$$

(l'inégalité de droite est claire, celle de gauche se fait par étude de fonction ou par la série entière par exemple)
Ainsi,

$$\int_x^{3x} \frac{t - \frac{t^3}{6}}{t^2} dt \leq \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt \leq \int_x^{3x} \frac{t}{t^2} dt.$$

Or,

$$\int_x^{3x} \frac{t}{t^2} dt = \ln(3x) - \ln(x) = \ln(3),$$

et

$$\int_x^{3x} \frac{t - \frac{t^3}{6}}{t^2} dt = \ln(3) - \frac{(3x)^2}{12} + \frac{x^2}{12} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(3).$$

Ainsi, par encadrement, $I = \ln(3)$.

Exercice 55. Mines 24. Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction. On sait que $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$). Donc

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Correction. Notons $R(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Effectuons une intégration par parties, en posant $u(t) = \frac{1}{t}$, donc $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$, $v(t) = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ donc $v'(t) = te^{-t^2}$. Ainsi, comme le crochet $u(t)v(t)$ converge bien, on a

$$R(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt.$$

Mais

$$0 \leq \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \leq \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x^2} dt = \frac{R(x)}{2x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(R(x)).$$

Ainsi, on a

$$\frac{e^{-x^2}}{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} R(x) + o(R(x)),$$

donc

$$R(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

Exercice 56. CCINP 24. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ on pose : $I_{n,p} = \int_0^1 x^p \ln(x)^n dx$.

1. Justifier l'existence de $I_{n,p}$.

Correction. Déjà, la fonction $f : x \mapsto x^p \ln(x)^n$ est continue sur $]0, 1]$. Le seul problème est en 0. Pour montrer l'intégrabilité en 0, on va comparer à une intégrale de référence.

On remarque que, par croissances comparées, $x^{1/2} f(x) = x^{p+1/2} \ln(x)^n \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, qui est intégrable en 0.

On en déduit alors, par comparaison, que f est intégrable en 0.

2. Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, trouver une relation entre $I_{n,p}$ et $I_{n-1,p}$.

Correction. On va faire une intégration par parties. Attention à la manière de rédiger ! Sous réserve de convergence des intégrales et du crochet, en posant $u(x) = \frac{1}{p+1} x^{p+1}$, $u'(x) = x^p$, $v(x) = \ln(x)^n$,

$v'(x) = \frac{n}{x} \ln(x)^{n-1}$, on a l'égalité

$$I_{n,p} = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} \ln(x)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{p+1} x^{p+1} \frac{n}{x} \ln(x)^{n-1} dx.$$

Or, par croissances comparées, $\frac{1}{p+1} x^{p+1} \ln(x)^n \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\frac{1}{p+1} x^{p+1} \ln(x)^n \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ par continuité, donc l'intégration par parties est licite et

$$I_{n,p} = -\frac{n}{p+1} \int_0^1 x^p \ln(x)^{n-1} dx = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p}.$$

Remarque : le changement de signe est cohérent avec le changement de puissance du $\ln$.

3. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$.

Correction. Là, tout dépend de si on est à l'écrit ou à l'oral. Je vais répondre comme à l'oral. On remarque alors que

$$I_{n,p} = -\frac{n}{p+1} I_{n-1,p} = \frac{n(n-1)}{(p+1)^2} I_{n-2,p} = \dots = \frac{(-1)^n n!}{(p+1)^n} I_{0,p} = \boxed{\frac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}}.$$

On démontrerait le résultat par récurrence sur n .

Exercice 57. Mines-Télécom 23. 1. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ quand t tend vers $+\infty$.

Correction. Quand t tend vers $+\infty$, $\frac{1}{t} \rightarrow 0$. De plus, $\text{Arctan}(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$. On en déduit donc que

$$\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{t} - \frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + o\left(\frac{1}{t^3}\right).$$

Donc $\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$.

2. Après avoir justifié sa convergence, calculer $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.

Correction. Comme $f(t) = \frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$, qui est intégrable en $+\infty$ (intégrale de Riemann), l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

Pour la calculer, on sait déjà qu'on ne peut pas séparer directement les deux morceaux, car les deux intégrales ne convergent pas a priori. Deux possibilités : s'arrêter jusqu'à un certain x , ou bien utiliser une des deux techniques classiques (IPP/cdv). Vu qu'il y a $1/t$ que l'on sait facilement intégrer, on va essayer en s'arrêtant jusqu'à un certain x . Soit $x > 1$. Alors

$$\int_1^x f(t) dt = \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

La première intégrale vaut $\ln(x)$. Pour la seconde, on fait une intégration par parties, en posant $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v(t) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$, $v'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$. Ainsi, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} \int_1^x \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[t \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \right]_1^x + \int_1^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= x \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} (\ln(1+x^2) - \ln(2)). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_1^x f(t) dt &= \ln(x) - x \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln(1+x^2) - \ln(2)) \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - x \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

Mais $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ donc

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0.$$

De plus, $x \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$ donc, en faisant tendre x vers $+\infty$,

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2} - 1}.$$

Exercice 58. Centrale 23.

Soit f une application continue de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$ converge pour tout $a > 0$.

Correction. ATTENTION ! La fonction f n'est **PAS** positive. C'est ça la difficulté essentielle ! Il faut ruser.

Soit F une primitive de f . On sait que F possède une limite finie en $+\infty$ par convergence de l'intégrale. Soit $a > 0$.

Dans $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^a} dt$, on pose $u(t) = F(t)$ donc $u'(t) = f(t)$, puis $v(t) = \frac{1}{t^a}$ donc $v'(t) = \frac{-a}{t^{a+1}}$. Or,

- $[u(t)v(t)]_1^{+\infty}$ converge car F converge et $t \mapsto \frac{1}{t^a}$ aussi.
- $-a \int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{a+1}} dt$ converge : la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$, possède une limite finie en $+\infty$, donc est bornée au voisinage de $+\infty$. (en fait on peut même démontrer qu'elle est bornée sur tout $\mathbb{R}_+$: exercice?).
Donc $\frac{F(t)}{t^{a+1}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{a+1}}\right)$. Or, $\frac{1}{t^{a+1}}$ est intégrable en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{a+1}} dt$ est convergente.

Donc, par théorème d'intégration par parties, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

7 Pour aller plus loin

Exercice 59. *Lemme de Riemann-Lebesgue.* ●●○ Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On veut montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

1. Traiter le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact.
2. Traiter le cas où f est une fonction en escalier à support compact.
3. Conclure dans le cas général.
4. Application : soit $g \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{C})$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) dt$.

Exercice 60. *Multiplicateurs et contre-exemples.* ●●○ Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les $u \in E$ telles que, pour toute $v \in E$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction uv soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer les $u \in E$ telles que, pour toute $v \in E$ bornée sur $\mathbb{R}_+$, la fonction uv soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
3. Existe-t-il une fonction f lipschitzienne et intégrable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ diverge ?

Exercice 61. *Non-convergence des sommes de Riemann.* ●●●

1. Construire une fonction f continue, strictement positive et intégrable sur $]0, 1[$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2.$$

Correction. On note I_n l'intervalle $I_n = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right]$. On remarque qu'on a toujours $I_n \cap I_{n+1} = \emptyset$ car $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{n^4} + \frac{1}{(n+1)^4}$ pour $n \geq 2$.

On définit alors g nulle en-dehors de $\bigcup_{n \geq 2} I_n$, affine sur $\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}, \frac{1}{n}\right]$, égale à 0 en $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}$, à $n^2 - 1$ en $\frac{1}{n}$, et affine à nouveau sur $\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}\right]$, égale à $n^2 - 1$ en $\frac{1}{n}$ et à 0 en $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}$.

Une telle fonction est continue et intégrable car la somme des aires est $\sum_{n \geq 2} \frac{2(n^2 - 1)}{n^4} < +\infty$. En définissant $g = f + 1$, on a de plus la stricte positivité.

2. Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{n \geq 2}$?

Correction. On a immédiatement

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1} n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc la somme de Riemann ne converge pas vers $\int_0^1 f$.

3. Comparer avec le cas d'une fonction monotone intégrable. Quelle hypothèse a été perdue ?

Correction. Dans le cas monotone intégrable (exercice 16), on a convergence des sommes de Riemann. On a donc construit un contre-exemple !

Exercice 62. Inégalité de Hardy L^2 . ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad \text{si } x > 0, \quad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. En intégrant par parties, montrer que pour tout $a > 0$, $\int_0^a g^2 \leq 2 \int_0^a gf$.
3. En déduire que g^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2$.
4. Montrer que la constante 4 est optimale.

Exercice 63. Inégalité de Hilbert. ●●●

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - (a) Prouver l'égalité $\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{it}) e^{it} dt$.
 - (b) En déduire l'inégalité $\int_{-1}^1 P(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi |P(e^{it})|^2 dt$.
2. Établir alors l'inégalité de Hilbert : pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{0 \leq p, q \leq n} \frac{a_p a_q}{p+q+1} \leq \pi \sum_{p=0}^n a_p^2.$$

Exercice 64. Contrôle de $\int f'^2$ par $\int f^2$ et $\int f''^2$. ●●●

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f^2 et f''^2 soient intégrables sur $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''$, puis que $f f'$ admet des limites nulles en $\pm\infty$.
 - (b) En déduire que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} f'^2 \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2 \times \int_{\mathbb{R}} f''^2}$.
 - (c) Montrer que l'égalité n'a lieu que pour $f = 0$, mais que la constante 1 ne peut pas être remplacée par une constante strictement plus petite.
2. On suppose maintenant $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, avec f^2 et f''^2 intégrables sur $\mathbb{R}_+$.
 - (a) Établir l'identité $\int_{\mathbb{R}_+} (f^2 + f''^2 - f'^2) = \int_{\mathbb{R}_+} (f'' + f' + f)^2 + (f(0) + f'(0))^2$.
 - (b) En remplaçant f par $x \mapsto f(\lambda x)$ pour un $\lambda > 0$ bien choisi, en déduire $\int_{\mathbb{R}_+} f'^2 \leq 2 \sqrt{\int_{\mathbb{R}_+} f^2 \times \int_{\mathbb{R}_+} f''^2}$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 65. Fonctions à moments nuls. ●●●

1. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 t^k f(t) dt = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0, 1[$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{+\infty} x^n e^{-(1+i)x} dx$.
3. En déduire une fonction f continue, non identiquement nulle, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et d'intégrale nulle.

Exercice 66. Inégalité de Weyl. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f'^2 et $x \mapsto x^2 f(x)^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Établir l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) f'(x) dx$.

3. En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)^2 dx \right)^{1/2},$$

et étudier le cas d'égalité.

Reformulée à l'aide de la transformée de Fourier, cette inégalité est une forme du principe d'incertitude de Heisenberg (Weyl, 1928).

Exercice 67. Inégalité de Carlson. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que

$$S = \int_0^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty \quad \text{et} \quad T = \int_0^{+\infty} x^2 f(x)^2 dx < +\infty.$$

1. Justifier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} |f| \leq \sqrt{\pi} \sqrt[4]{ST}$, et étudier le cas d'égalité.

3. En déduire que pour toute suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ non identiquement nulle,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < \sqrt{\pi} \sqrt[4]{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2}.$$

Exercice 68. Inégalité de Wirtinger. ●●● Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Pour $f \in E$, montrer la convergence des intégrales

$$I(f) = \int_0^1 2f(t)f'(t) \cotan(\pi t) dt \quad \text{et} \quad J(f) = -\pi \int_0^1 (1 + \cotan^2(\pi t)) f(t)^2 dt,$$

puis comparer $I(f)$ et $J(f)$.

2. En déduire que pour toute $f \in E$,

$$\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 f'^2,$$

et déterminer les fonctions de E réalisant l'égalité.

Exercice 69. Exponentielle imaginaire oscillant rapidement. ●●● Soient $\mu > 0$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f'' \geq \mu$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $g = \frac{1}{1 + |f|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{if(t)} dt$ converge.

3. Application : retrouver la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$.

Exercice 70. Valeur principale de Cauchy. ●●● Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, et qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ et $C > 0$ tels que

$$\forall (x, y) \in [-1, 1]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $I_\varepsilon(f) = \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$.

1. Montrer que $I_\varepsilon(f)$ est bien défini pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$.

2. Montrer que $I_\varepsilon(f)$ admet une limite finie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Indications

- Ex 1.** On distinguera les cas $\alpha > 1$, $\alpha < 1$, et $\alpha = 1$.
- Ex 5.** 4. On comparera avec des intégrales de Riemann de $t \mapsto 1/t$.
Penser à transformer un produit en somme et à faire apparaître des sommes de Riemann.
- Ex 8.** 2. On écrira $\int_{\varepsilon}^X \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ à l'aide d'un changement de variable, puis on fera tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $X \rightarrow +\infty$.
- Ex 13.** 1. On encadrera $\sin u$ à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange.
2. Attention : pour $\alpha < 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ n'est pas continue sur $[0, 1]$; le théorème du cours ne s'applique pas tel quel.
- Ex 14.** 6. On pourra montrer que $x \ln(x) \geq x - 1$ pour tout $x > 0$.
- Ex 15.** 2. On découpera $[0, T]$ en n intervalles de même longueur et on appliquera la première question sur chacun d'eux.
- Ex 16.** 1. Comme dans la comparaison série-intégrale, encadrer chaque terme $\frac{1}{n} f(k/n)$.
2. Séparer en deux l'intégrale, $\int_0^{1/n}$ d'un côté et $\int_{1/n}^1$ de l'autre.
- Ex 18.** Comparer à chaque fois à une intégrale de Riemann ou bien à $\ln(x)$.
- Ex 19.** Pour les 3 et 4, chercher le changement de variable qui ramène à une intégrale du type $\int \frac{\sin u}{u^\gamma} du$.
- Ex 20.** On écrira ces expressions sous la forme $e^{-\varphi(x)}$ et on comparera $\varphi(x)$ à $\alpha \ln x$ pour un α bien choisi.
- Ex 21.** 3. Utiliser $|\sin t| \geq \sin^2 t$ pour tout t réel.
- Ex 22.** Un développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ ne suffit pas : pousser à l'ordre 2 et traiter à part le terme en $\sin^2(t)/t^{2\alpha}$, soit par intégration par parties, soit par comparaison à une somme avec découpage par la relation de Chasles.
- Ex 23.** 1. Écrire $\frac{\cos t}{\sqrt{t} + \cos t} = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}}$, et faire un dl à l'ordre 2.
- Ex 24.** Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$ sur un segment de I .
- Ex 25.** 3. Démontrer d'abord que f'^2 est intégrable en écrivant $\int_0^x f'^2 = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f f''$, et conclure par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
- Ex 26.** 1. Poser $F : y \mapsto \int_0^y f(t)e^{-at} dt$, puis considérer $\int_0^{+\infty} F(t)e^{-\delta t} dt$ avec $\delta = x - a > 0$.
- Ex 27.** 2. Majorer $|f(x)|$ en intégrant f sur un intervalle suffisamment petit autour de x .
3. Pour $y > x$, écrire $f(y) - f(x)$ comme une intégrale, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation de Chasles.
- Ex 28.** On découpera $\mathbb{R}_+$ en intervalles $[n\pi, (n+1)\pi]$ et, sur chacun d'eux, on isolera un voisinage des points où $\sin$ s'annule, de longueur bien choisie en fonction de n .
- Ex 29.** 2. Intégrer par parties.
3. Poser $u = \tan(t/2)$.
5. Poser $t = a + (b-a)\sin^2 \theta$.
- Ex 30.** 1. Intégrer par parties.
- Ex 31.** 2. Changement de variable $u = 1/t$.
3. Poser $u = t - 1/t$.
- Ex 32.** 1. Décomposer en éléments simples, puis regrouper les logarithmes avant de passer à la limite.
- Ex 33.** Remarquer que $F(1) = 0$ et que $F(x) \rightarrow I$ lorsque $x \rightarrow 0^+$, puis intégrer l'expression de F' entre x et 1

- Ex 34. 3.** Contrairement aux précédentes, cette intégrale n'est pas absolument convergente : on regroupera les contributions sur les intervalles $[n, n+1]$.
- Ex 36.** Poser $u = bt - \frac{a}{t}$: cette application réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On pourra aussi effectuer le changement de variable $t \mapsto a/(bt)$ et combiner les deux écritures obtenues.
- Ex 37.** Rappel : le coefficient de la DES associé à un pôle simple ω de $1/Q$ vaut $1/Q'(\omega)$
- Ex 39.** Utiliser des intégrations par parties et l'intégration des relations de comparaison.
- Ex 40.** Écrire $f(x) = \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1} \right) dt + \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1}$: la première fonction se prolonge par continuité en 1, et la seconde intégrale se calcule explicitement.
- Ex 41. 4.** On donne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.
- Ex 43.** Dans chaque cas, une intégration par parties bien choisie fait apparaître l'intégrale de départ multipliée par un $o(1)$
- Ex 45. 1.** Écrire $f = \mu + (f - \mu)$: une primitive G de $f - \mu$ est T -périodique, donc bornée, ce qui permet d'intégrer par parties $\int_1^x \frac{f(t) - \mu}{t} dt$
- Ex 46.** Selon les cas : changement de variable ramenant à une intégrale indépendante de n , découpage de l'intervalle en deux, ou intégration par parties.
- Ex 59. 3.** Approcher f par une fonction en escalier à support compact, au sens où $\int_{\mathbb{R}} |f - \varphi|$ est arbitrairement petit.
- Ex 60. 1.** La condition est le caractère borné de u . Pour la réciproque, faire une contraposée.
3. Penser aussi à des pics.
- Ex 61. 1.** Qui s'y frotte...
- Ex 62. 1.** Reconnaître un taux d'accroissement en 0.
2. Déterminer d'abord une primitive de g^2 en fonction de $F : x \mapsto \int_0^x f$.
4. Tester des fonctions du type $x \mapsto x^{-\alpha}$ tronquées.
- Ex 63. 1.a.** L'expression est linéaire en P : il suffit de traiter le cas $P = X^k$
2. Appliquer ce qui précède à $P = \sum_{p=0}^n a_p X^p$.
- Ex 64.** Pour l'optimalité de la constante 1, tester des fonctions du type $x \mapsto \varphi(x/n) \cos x$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ à support inclus dans un segment.
- Ex 65. 1.** Raisonner par l'absurde : si f ne change de signe qu'en $x_1 < \dots < x_m$ avec $m \leq n$, considérer $Q = \prod_{i=1}^m (X - x_i)$.
3. Chercher f sous la forme $x \mapsto e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})$ et se ramener, par le changement de variable $x = u^4$, à la question précédente
- Ex 66. 1.** Sur $[-1, 1]$, f est continue donc bornée. Si $|x| \geq 1$, $f(x)^2 \leq x^2 f(x)^2$.
- Ex 67. 2.** Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, écrire $\int_0^{+\infty} |f| = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha + \beta x^2}} \left(|f(x)| \sqrt{\alpha + \beta x^2} \right) dx$, appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis optimiser en α et β .
- Ex 68. 1.** Pour la convergence, utiliser $f(0) = f(1) = 0$ et le caractère $\mathcal{C}^1$ de $f : f(t) = O(t)$ en 0 et $O(1-t)$ en 1, alors que $\cotan(\pi t)$ y est équivalent à $\frac{1}{\pi t}$ et $\frac{-1}{\pi(1-t)}$; pour la comparaison, intégrer $I(f)$ par parties
2. Développer $\int_0^1 (f'(t) - \pi \cotan(\pi t) f(t))^2 dt \geq 0$.
- Ex 69. 1.** Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Là où f' ne s'annule pas, écrire $e^{if} = \frac{1}{if'} (e^{if})'$ et intégrer par parties ; contrôler séparément un voisinage du point où f' s'annule.

Ex 70. 2. Exploiter la symétrie $x \mapsto -x$ sur $[-1, 1]$ pour faire apparaître $f(x) - f(-x)$.