

DM 02
à rendre le lundi 21 septembre

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules

1. **Bases.** Problème 1, questions 1 et 2 ; problème 2, parties A et B-I. Durée : 3h.
2. **+ d'algèbre.** Problème 1, questions 1 et 2 ; problème 2 en entier. Durée : 4h.
3. **+ d'analyse** Problème 1 ; problème 2, parties A et B-I. Durée : 4h.
4. **La totale.** Durée : 6h.

Problème 1. Intégration – BECEAS 2020

1. *Les sous-questions sont indépendantes.*

(a) On considère la fonction

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On **admet** l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

(c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

(d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t , on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leq K$.

(b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}.$$

(b) En déduire, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt).$$

(c) En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$.

5. Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$

(a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.

ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq 2 \frac{\ln^4 n}{n}.$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Problème 2. Algèbre linéaire – d'après Mines PC 2001

Racines carrées de l'endomorphisme $P \mapsto \lambda P + P'$

Soit V un espace vectoriel réel, $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V .

Si $f \in V$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \text{Id}_V$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels et, étant donné un $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

On note alors D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$; on note D_n l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$D : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right. \text{ et } D_n : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right.$$

L'objectif du problème est déterminer, en fonction de la valeur du paramètre réel λ , s'il existe g un endomorphisme de E (respectivement de E_n) tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$ (respectivement $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$).

A. Préliminaires

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V .

5. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes f^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels emboîtés :

$$\ker(f^0) \subset \ker(f^1) \subset \ker(f^2) \subset \dots \subset \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \subset \dots$$

On l'appelle *suite des noyaux itérés*.

6. Démontrer que, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, alors : $\forall q \geq p, \ker(f^q) = \ker(f^{q+1})$.
En déduire que pour tout entier $k \geq p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$.

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n , la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang $p \leq n$. En particulier les noyaux $\ker(f^n)$, $\ker(f^{n+1})$ sont égaux.

7. Démontrer que, si $u \in \mathcal{L}(V)$, s'il existe $q \geq 1$ tel que $u^q = 0_{\mathcal{L}(V)}$, alors $u^n = 0_{\mathcal{L}(V)}$.

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

8. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}$, D_n est nilpotent. Expliciter la suite des noyaux itérés $(\ker(D_n^\ell))_{0 \leq \ell \leq n+1}$.
9. Soit P un polynôme de degré n . Démontrer que $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^n(P))$ est une base de E_n .

B. Premiers résultats

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple. On note toujours $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

B-I. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Démontrer que, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$, alors g commute avec D_n .
 En déduire que E_p est **stable** par g , i.e. pour tout Q dans E_p , $g(Q) \in E_p$.

On note $g_p : \begin{cases} E_p \rightarrow E_p \\ P \mapsto g(P) \end{cases}$. Démontrer la relation : $(g_p)^2 = \lambda \text{Id}_{E_p} + D_p$.

On admet que, de même, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$, tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$, alors g commute avec D ; de même pour tout n dans $\mathbb{N}$, E_n est stable par g .

Et, en notant $g_n : \begin{cases} E_n \rightarrow E_n \\ P \mapsto g(P) \end{cases}$, on a encore $(g_n)^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$.

On fixe alors g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$.

11. Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension $n+1$, stable par D .
 Démontrer qu'il existe un polynôme P de F de degré maximal d .
 Démontrer que la famille $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^d(P))$ est une famille libre et dans F , puis que $d \leq n$.
 En déduire que F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.
 Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D .
12. Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par g , il faut et il suffit qu'il soit stable par D .

B-II. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

13. Démontrer que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_0)$ tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_0} + D_0$, alors $\lambda \geq 0$.
14. Soit $\lambda < 0$. Déduire des résultats précédents les deux propriétés :
- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$.
 - Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n vérifiant $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$.

B-III. Un exemple pour $n = 2$

15. Soit $h \in \mathcal{L}(E_2)$. Démontrer que h commute avec D_2 si et seulement s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a \text{Id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2$. On pourra utiliser la question 9.
16. Démontrer que $(\text{Id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_2)$. En déduire que si $\lambda > 0$, il existe exactement deux $g \in \mathcal{L}(E_2)$ tels que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_2} + D_2$.

C. Cas $\lambda = 0$

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul, et d'étendre le résultat à une situation plus générale. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

17. Montrer que, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et $\dim \ker g^2 \geq 2$.
18. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$, puis qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

D. Existence dans le cas $\lambda > 0$

19. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$. Préciser en particulier les valeurs de a_0, a_1, a_2 , et démontrer que pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}} \binom{2k-1}{k}$.

20. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on note $h_n = a_0 \text{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \dots + a_n D_n^n$.

21. Démontrer que $h_n^2 = \text{Id}_{E_n} + D_n$.
22. En déduire un élément g_n dans $\mathcal{L}(E_n)$ tel que $g_n^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$, puis un élément g de E tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$.