

MP – Programme de colles

Semaine 01 – du 14 au 18 septembre 2026

Programme en bref

- séries numériques.
- familles sommables.
- intégration : le début.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Théorème de comparaison des séries à termes positifs.
2. Théorème de sommation des relations de comparaison.
3. Une série absolument convergente est convergente.
4. Séries de Riemann.
5. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
6. Critère des séries alternées.
7. Exemple d'étude d'une série alternée avec la série de terme général $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.
8. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes
9. Application à $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.
10. Intégrales de Riemann.
11. Intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$.
12. Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Séries numériques et vectorielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie complexes	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.
b) Compléments sur les séries numériques	
Technique de comparaison série-intégrale.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
Règle de d'Alembert.	
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.	La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.

Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.

Les démonstrations ne sont pas exigibles.

Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.

La démonstration n'est pas exigible.

Familles sommables

Révisions du programme de sup.

Intégration sur un intervalle quelconque – COURS/EXOS PROCHES DU COURS

a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.

Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente en $+\infty$.

Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Un calcul montrant que $\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$.

Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente en b , en a .

Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Inégalité triangulaire.

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx$.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».

Fonction intégrable en b , en a .

Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.

La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est réelle de signe constant.
