

TD 03

Révisions d'algèbre linéaire

1 Exercices classiques

Exercice 1. Base de polynômes $X^k(1-X)^{n-k}$. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (X^k(1-X)^{n-k})_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2. Matrices de rang 1. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $M = XY^T$.
2. En déduire que $M^2 = \text{Tr}(M) M$, puis calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $I_n + M$ est inversible si et seulement si $\text{Tr}(M) \neq -1$, et déterminer alors son inverse.

Exercice 3. Endomorphismes de trace nulle et matrices à diagonale nulle. ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ soit liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 4. ●●○ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E t.q. $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Rang d'une somme. ●○○ Soit E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$|\text{rgf} - \text{rgg}| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rgf} + \text{rgg}.$$

Exercice 6. ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , $u \in \mathcal{L}(E)$. u est dit *nilpotent* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, où $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent. En utilisant la formule du binôme de Newton ou de Bernoulli montrer que $\text{Id} - u$ est inversible.
2. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $u^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de u .
3. On veut montrer que $p \leq n$ (où p est l'indice de nilpotence de u). Pour ce faire, on définit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$. Montrer que pour tout entier k , $N_k \subset N_{k+1}$ et que s'il existe k_0 tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors pour tout $\ell \geq k_0$, $N_\ell = N_{\ell+1}$. Conclure.
4. Retrouver le même résultat en démontrant que si x est un vecteur de E qui n'est pas dans $\ker(u^{p-1})$, alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre.
5. Un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$ est dit *ponctuellement nilpotent* si $\forall x \in E, \exists k \in \mathbb{N}, f^k(x) = 0$.
 - (a) Montrer que si E est de dimension finie, un endomorphisme ponctuellement nilpotent de E est nilpotent.
 - (b) Montrer que le résultat est faux si l'on ne suppose plus E de dimension finie (on exhibera un contre-exemple dans $\mathbb{K}[X]$).

Exercice 7. ●●● Soit E un espace vectoriel de dimension n , $u_1, \dots, u_n$ n endomorphismes nilpotents vérifiant : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Calculer $u_1 \circ \dots \circ u_n$.

Exercice 8. ●●●

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 9. Mines-Télécom 23 et 22, Mines MP 15. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$ soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $A_{i,i} = a; A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit J la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1. En déduire $\det(A)$.

Exercice 10. $\mathbb{R}$ -similitude et $\mathbb{C}$ -similitude. ●●○ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 11. *Base de polynômes* $(X + a_i)^n$. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille $((X + a_i)^n)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 12. *Familles libres de fonctions.* ●○○ On travaille dans le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles suivantes sont libres.

- $(x \mapsto |x - a|)_{a \in \mathbb{R}}$.
- $(x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha \in \mathbb{R}}$.

Exercice 13. *Rang d'une famille trigonométrique.* ●○○ Déterminer le rang, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, de la famille $(f_1, \dots, f_5)$ définie par

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \sin x, \quad f_3 : x \mapsto \sin^2 x, \quad f_4 : x \mapsto \cos^2 x, \quad f_5 : x \mapsto \cos 2x.$$

Exercice 14. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.* ●○○ Soit $F = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\}$.

- Montrer que F est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que $\Psi : u \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{C}^2$. En déduire $\dim F$.
- En déduire une base de F formée de suites géométriques.

Exercice 15. *Caractérisation de $E = \text{Im} f \oplus \ker f$.* ●○○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois assertions :

$$(i) E = \text{Im} f \oplus \ker f \quad (ii) \text{Im} f^2 = \text{Im} f \quad (iii) \ker f^2 = \ker f.$$

Exercice 16. *Noyau et image d'une composée.* ●○○ Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

- Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \text{Im} f = \{0\}$.
- Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g \iff \ker g + \text{Im} f = F$.

Exercice 17. *Sous-espaces stables par un endomorphisme qui commute.* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\ker u$ et $\text{Im} u$ sont stables par v .

Exercice 18. *Somme directe d'images.* ●○○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\text{rg} f + \text{rg} g = \dim E$ et que $E = \text{Im} f \oplus \text{Im} g$.

Exercice 19. *Un endomorphisme vérifiant $\ker f = \text{Im} f$.* ●○○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = \text{Im} f$ si et seulement si n est pair.

Exercice 20. *Inégalités de Sylvester et de Frobenius.* ●●● Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie.

- (Sylvester) Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\text{rg} f + \text{rg} g - \dim F \leq \text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg} f, \text{rg} g).$$

- (Frobenius) Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $f \in \mathcal{L}(G, H)$. Montrer que

$$\text{rg}(f \circ g) + \text{rg}(g \circ h) \leq \text{rg} g + \text{rg}(f \circ g \circ h).$$

3 Matrices

Exercice 21. *Puissances via un polynôme annulateur.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

- Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n .
- Montrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = a_p A + b_p I_n$, et les expliciter.

Exercice 22. *Matrices à diagonale strictement dominante.* ●○○ Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 23. Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$. ●●○ Soit $n \geq 2$ et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tous $i \neq j$, $H \cap \text{Vect}(I_n, E_{ij}) \neq \{0\}$, où (E_{ij}) désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 24. L'identité n'est pas un commutateur. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $AB - BA = I_n$.
2. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \circ g - g \circ f \neq \text{Id}_E$.

Exercice 25. Équation matricielle $M + M^T = \text{Tr}(M)A$. ●●○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation

$$M + M^T = \text{Tr}(M)A. \quad (\text{E})$$

Exercice 26. Matrices scalaires et trace de $M \mapsto AM$. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A : M \mapsto AM$. Vérifier que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et montrer que $\text{Tr}(\varphi_A) = n \text{Tr}(A)$.

Exercice 27. Endomorphisme nilpotent d'indice 2. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = r \geq 1$.

1. Montrer que $\text{Im } u \subset \ker u$, puis que $2r \leq n$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(bloc de taille $2r$, complété par des lignes et colonnes nulles si $2r < n$).

Exercice 28. Trace nulle et commutateurs. ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

Exercice 29. Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes. ●●● Soit $n \geq 2$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. On note $\mathcal{N}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes. Montrer que $\mathcal{N}$ est exactement l'ensemble des matrices de trace nulle.

Exercice 30. Endomorphisme vérifiant $f^2 + af + b\text{Id} = 0$ avec $a^2 - 4b < 0$. ●●● Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + af + b\text{Id}_E = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - 4b < 0$.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $(x, f(x))$ est libre, et que $\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par f .
2. Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc valant $C = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.

Exercice 31. Matrices magiques. ●●● Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* si les sommes de ses coefficients le long de chaque ligne et de chaque colonne sont toutes égales à une même valeur, notée $s(M)$. On note Mag l'ensemble des matrices magiques et J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que Mag est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $s : \text{Mag} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
2. Montrer que $\text{Mag} = \ker s \oplus \mathbb{R}J$.
3. Déterminer $\dim \text{Mag}$.

4 Endomorphismes particuliers (nilpotents, projecteurs, symétries)

Exercice 32. Matrices nilpotentes. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $I_n - N$ est inversible et son inverse est un polynôme en N .
2. Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent sont nilpotents. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de commutation.

Exercice 33. Commutation avec un projecteur. ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, p un projecteur de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \circ p = p \circ f \iff \text{Im } p \text{ et } \ker p \text{ sont stables par } f.$$

Exercice 34. *Endomorphisme nilpotent d'indice maximal.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p : u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre. En déduire que $p \leq n$.
2. On suppose $p = n$. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$.

Exercice 35. *Commutant d'un nilpotent d'indice maximal.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n (i.e. $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$). On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ son commutant. Montrer que $C(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u] = \text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ et déterminer $\dim C(u)$.

Exercice 36. *Noyaux et images itérés.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \ker u^k$ et $I_k = \text{Im } u^k$.

1. Montrer que $(N_k)_k$ est croissante et $(I_k)_k$ décroissante (pour l'inclusion), et qu'elles sont stationnaires à partir d'un même rang r .
2. Montrer que $E = I_r \oplus N_r$.
3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ avec C inversible et M nilpotente. Conclure que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une telle matrice.

Exercice 37. *Base antéduale.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E . On pose

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j .

Exercice 38. *Inclusion de noyaux de formes linéaires.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et φ des formes linéaires sur E . Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \iff \varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p).$$

Exercice 39. *Inverse à droite et projecteur associé.* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de f et de g ?
2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur, et déterminer $\text{Im } p$ et $\ker p$.
3. En déduire que $E = \ker f \oplus \text{Im } g$.

Exercice 40. *Projecteurs qui commutent.* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau.

Exercice 41. *Endomorphismes cycliques.* ●●● Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E (f est dit *cyclique*).

1. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que g est entièrement déterminé par $g(x_0)$, puis que $g \in \mathbb{K}[f]$.
3. En déduire que le commutant de f est $\mathbb{K}[f] = \text{Vect}(\text{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$, de dimension n .

Exercice 42. *Une formule de Burnside.* ●●● Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$, de cardinal N . On pose $p = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} g$.

1. Montrer que $h \circ p = p$ pour tout $h \in G$, puis que p est un projecteur.
2. Montrer que $\text{Im } p = \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}_E)$ (les vecteurs invariants par G).
3. En déduire que $\dim \left(\bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}_E) \right) = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \text{Tr}(g)$.

5 Déterminants

Exercice 43. Déterminant de Vandermonde. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On considère la matrice de Vandermonde

$$V = (x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.
2. En déduire que V est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts, et retrouver ainsi l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de degré $\leq n-1$ en n points d'abscisses distinctes.

Exercice 44. Déterminant tridiagonal et polynômes de Tchebychev. ●●○ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $D_n(x)$ le déterminant de la matrice tridiagonale d'ordre n

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & & (0) \\ 1 & 2x & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2x & 1 \\ (0) & & & 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

1. Établir, pour tout $n \geq 1$, la relation $D_{n+2}(x) = 2x D_{n+1}(x) - D_n(x)$ (avec les conventions $D_0 = 1$, $D_1(x) = 2x$).
2. Pour $x = \cos \theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$, calculer $D_n(x)$.

Exercice 45. Matrice antisymétrique d'ordre impair. ●○○ Soit n un entier impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A n'est pas inversible.

Exercice 46. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. ●○○ Soit $A, B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\det M = \det A \det D$.
2. En déduire que M est inversible si et seulement si A et D le sont.

Exercice 47. Déterminants par blocs et positivité. ●●○ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$.
2. On suppose de plus $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$, et donner un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.

Exercice 48. Comatrice de la comatrice. ●●● Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\text{Com}(A)$ sa comatrice, et on rappelle la relation $A^T \text{Com}(A) = {}^T \text{Com}(A) A = \det(A) I_n$.

1. Lorsque A est inversible, exprimer $\text{Com}(A)$ en fonction de A , puis calculer $\det(\text{Com}(A))$ et $\text{Com}(\text{Com}(A))$.
2. En déduire que $\text{Com}(\text{Com}(A)) = (\det A)^{n-2} A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 49. Déterminant de Smith. ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ définie par $m_{ij} = i \wedge j$ (le pgcd de i et j). Calculer $\det M$.

6 Du côté des oraux...

Exercice 50. CCINP 24. Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^4$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(B_1) + \text{rg}(B_2)$; puis que : $\text{rg}(A) \leq \sum_{k=1}^4 \text{rg}(A_k)$.
2. Montrer que si $\text{rg}(A_1) = \text{rg}(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est inversible. Que vaut alors A^{-1} ?

Exercice 51. Centrale 24. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension n . Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \text{rg}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.
2. En considérant $g_k : \begin{cases} f^k(E) \rightarrow f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$, montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

Exercice 52. Mines-Ponts 24. Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose P de rang r et l'on considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Psi(X) = PX - XP.$$

Déterminer la trace de Ψ en fonction de n et r .

Exercice 53. CCINP 24. Soit $(A, B, P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AP = PB$. On écrit $P = P_1 + iP_2$ avec $(P_1, P_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose : $Q(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$.
2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $Q(x_0) \neq 0$.
3. En déduire qu'il existe $P_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AP_0 = P_0B$. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 54. Mines 24, ex-X MP. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \text{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Indication donnée par l'examinateur : montrer que pour tout k , $E = F + \text{Im}(u^k)$.

Exercice 55. Variations autour du Vandermonde.

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille de polynômes telle que $\deg(P_i) = i$. Calculer le déterminant $\det(P_{j-1}(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.

$$2. \text{ Calculer } \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}.$$

Exercice 56. Mines PC 23. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $B = 0$. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension et une base.
2. Résoudre l'équation dans le cas général.

Exercice 57. Centrale PSI 2025. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \ker(f - \text{Id}_E)$, $B_f = \ker(f + \text{Id}_E)$, $A_g = \ker(g - \text{Id}_E)$, $B_g = \ker(g + \text{Id}_E)$.

1. Démontrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$.
2. En déduire que la dimension de E est paire.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E t.q. $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \text{I}_n & 0 \\ 0 & -\text{I}_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \text{I}_n \\ \text{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.

Indication : partir d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de A_f . Que dire que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$?

Exercice 58. Centrale PC 22. (RMS 2022-2023 1136) Pour a, b dans $\mathbb{C}$, on pose $D_1(a, b) = a$ et, pour tout $n \geq 2$,

$$D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & \cdots & (0) \\ 1 & a & b & \cdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix} \text{ et } A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & \cdots & (0) \\ -1 & 0 & -b & \cdots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -b \\ (0) & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_n(a, b)$ pour $n \leq 3$
2. Donner une relation de récurrence linéaire reliant $D_n(a, b)$, $D_{n+1}(a, b)$ et $D_{n+2}(a, b)$.

3. Coder en Python une fonction $D(n, a, b)$ renvoyant $D_n(a, b)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \mapsto D_n(a, b)$ est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.
5. Pour $b \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $n \in \llbracket 3, 5 \rrbracket$, donner une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a, b)$ sur $[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$. Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a, b)$.
6. Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$?
7. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour $n \geq 0$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des termes de la suite $(T_n(\cos \theta))_n$.
8. Calculer les racines du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. Déterminer alors les zéros de $a \mapsto D_n(a, b)$ en fonction du nombre complexe b .

Exercice 59. Mines-Ponts MP 2015. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ C & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ C & \cdots & C & x_n \end{pmatrix}$ et J la matrice de taille n constituée uniquement

de 1. On définit $P(X) = \det(A + XJ)$.

1. Majorer le degré de P .
2. Que vaut $\det(A)$? (on distinguera les cas $C \neq 1$ et $C = 1$).

Exercice 60. Centrale MP 2016. Python. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$, où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ sont dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ et $t = (t_1, \dots, t_n)^T$ sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que chaque élément a_{ij} de A est la moyenne de ses quatre voisins dans M (au-dessus, en dessous, à droite et à gauche).

1. Montrer que la donnée de A ne définit pas x, y, z, t de manière unique (on pourra commencer par x, y, z et t nuls).

2. (a) Écrire une fonction qui à une matrice M écrite comme $M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$ mais ne vérifiant pas nécessairement la condition des moyennes, associe $M' = F(M) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & B & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$ où, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a
$$b_{ij} = \frac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}.$$

(b) On définit alors une suite (A_p) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A_0 = 0$ et, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A_{p+1} & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} = F \left(\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A_p & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Écrire une fonction qui à A_0 et p associe A_p et la tester pour $n = 3$ et $n = 4$ avec $p = 100, p = 1000$. Que peut-on conjecturer ?

(c) Prouver la conjecture.

Exercice 61. ENS MP 2016. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer qu'on a : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2, M^T = PMQ$.
2. A-t-on : $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M^T = PMQ$?
3. Montrer qu'on a : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in GL_n(\mathbb{C})^2, M^T = PMP^{-1}$.

Exercice 62. Mines-Ponts MP 2016. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

1. Soit A un sous-espace de E de dimension a . Montrer que $\alpha = \{u \in \mathcal{L}(E), A \subset \ker(u)\}$ et $\beta = \{u \in \mathcal{L}(E), u(A) \subset A\}$ sont des sous-espaces de $\mathcal{L}(E)$ et donner leurs dimensions.
2. Soient F, G deux sous-espaces de E . On note f, g, h les dimensions respectives de $F, G, F \cap G$. Déterminer la dimension de $\gamma = \{u \in \mathcal{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$.

Exercice 63. Mines-Ponts MP 2016. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , u et v deux endomorphismes de E tels que $u + v = \text{Id}_E$ et $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Exercice 64. Mines-Ponts PSI 2016. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in GL(E)$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f + g \in GL(E) \Leftrightarrow \text{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq -1$.

Exercice 65. CCINP MP 2018. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension au moins égale à 2 et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, non nulle. Soit $a \in E \setminus \{0\}$.

- Déterminer $\dim(\ker(\ell))$.
- Soit $\ell' \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $\ker(\ell) \subset \ker(\ell')$. Montrer que ℓ et ℓ' sont proportionnelles.
- Soit f définie par $f : x \mapsto \ell(a)x - \ell(x)a$. Montrer que f est un endomorphisme.
- On suppose $\ell(a) \neq 0$.
 - Déterminer $\ker(f)$.
 - Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f . f est-elle diagonalisable ?

Exercice 66. ENS Saclay 24. Soit E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$. On définit $F : E \rightarrow E$ par : Pour $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(u)_n = u_{n+1}$$

- Montrer que F est linéaire.
- Est-elle injective ? Surjective ?
- Construire G endomorphisme linéaire de E tel que $F \circ G = \text{Id}_E$.
- Que vaut $G \circ F$?
- Conclure.

On note désormais E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$. On définit $H : E \rightarrow E$ par : Pour $u \in E$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$H(u)_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

- Montrer que H est linéaire. Est-elle injective ?
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \ker(H - \lambda \text{Id}_E)$. Trouver $M_\lambda \in M_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = M_\lambda^k \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

- Pour $|\lambda| \neq 2$, montrer que M_λ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.
- Existe-t-il des suites de $\ker(H - \lambda \text{Id}_E)$ périodiques ? Les caractériser.
- Étudier le cas $|\lambda| = 2$.

Exercice 67. Mines-Ponts MP 2026. 1. Soit $P(X) = X^2 + aX + b$, x_1, x_2 ses deux racines. On note $N_1 = x_1 + x_2$ et

$$N_2 = x_1^2 + x_2^2. \text{ Calculer } \begin{vmatrix} 2 & N_1 \\ N_1 & N_2 \end{vmatrix}.$$

2. Soit $P(X) = X^3 + pX + q$, soient x_1, x_2, x_3 les trois racines de P (non nécessairement distinctes). On note

$$N_k = \sum_{i=1}^3 x_i^k. \text{ Calculer le déterminant } \begin{vmatrix} 3 & N_1 & N_2 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}.$$

3. Généraliser à un n quelconque : pour $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, trouver un lien entre $\begin{pmatrix} n & N_1 & \dots \\ \vdots & & \\ N_{n-1} & & N_{2n-2} \end{pmatrix}$ et la matrice de Vandermonde de $(x_1, \dots, x_n)$.

Exercice 68. Mines-Télécom MP 2026. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi : M \mapsto AMB$. Déterminer la trace de ϕ .

Exercice 69. Mines-Ponts MP 2019. (RMS 2018-2019 517) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe U et V inversibles telles que $\text{rg}(UA + BV) = \min(n, \text{rg}A + \text{rg}B)$.
- Montrer que, si $\text{rg}(A) + \text{rg}(B) \geq n$, il existe U et V inversibles telles que $UA + BV$ soit inversible.

Indications

- Ex 1.** Regarder la valuation (le terme de plus bas degré) de chaque polynôme $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.
- Ex 2.** 1. Une matrice de rang 1 a son image engendrée par un seul vecteur : toutes ses colonnes lui sont proportionnelles.
3. Chercher l'inverse sous la forme $I_n + \lambda M$.
- Ex 3.** 1. Traiter d'abord chaque vecteur, puis comparer les scalaires sur deux vecteurs libres.
2. Récurrence sur n : si $A \neq 0$, elle n'est pas une homothétie, donc il existe x avec (x, Ax) libre.
- Ex 5.** Pour la majoration, penser à $\text{Im}(f + g)$. Pour la minoration, écrire $f = (f + g) + (-g)$.
- Ex 7.** On pourra regarder les induits de $u_1, \dots, u_{n-1}$ sur $\text{Im}(u_n)$ (en vérifiant déjà qu'ils stabilisent cet espace).
- Ex 10.** Écrire $P = P_1 + iP_2$ avec P_1, P_2 réelles, et considérer la fonction $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$.
- Ex 11.** Développer $(X + a_i)^n$ par la formule du binôme et se ramener à un système de Vandermonde.
- Ex 12.** 1. Une combinaison de ces fonctions est affine par morceaux : regarder les ruptures de pente.
2. Ordonner les exposants et factoriser par la plus grande exponentielle.
- Ex 13.** Chercher les relations linéaires évidentes entre ces fonctions.
- Ex 14.** 2. Chercher les suites géométriques (r^n) appartenant à F .
- Ex 18.** Traduire $g \circ f = 0$ en une inclusion, et comparer $\text{Im}(f + g)$ à $\text{Im}f + \text{Im}g$.
- Ex 20.** 1. Appliquer le théorème du rang à la restriction de f à $\text{Im}g$.
2. Réutiliser l'égalité $\text{rg}(f \circ g) = \text{rg}g - \dim(\ker f \cap \text{Im}g)$.
- Ex 21.** 2. Le polynôme $X^2 - 3X + 2$ se factorise. Effectuer la division euclidienne de X^p par ce polynôme.
- Ex 22.** Raisonner par l'absurde sur une coordonnée de plus grand module d'un vecteur du noyau.
- Ex 23.** 1. Comparer les dimensions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Ex 24.** 1. Penser à la trace.
- Ex 25.** Décomposer M en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.
- Ex 26.** 1. Il suffit d'écrire la commutation avec chaque E_{ij} .
- Ex 27.** 2. Partir d'une base d'un supplémentaire de $\ker u$; ses images forment une base de $\text{Im}u$.
- Ex 28.** Sens réciproque : un commutateur est de trace nulle. Sens direct : se ramener, par similitude, à une matrice de diagonale nulle, puis chercher A diagonale à coefficients distincts.
- Ex 29.** Pour l'inclusion réciproque, engendrer les E_{ij} ($i \neq j$) puis écrire $E_{i,i} - E_{j,j}$ comme somme de deux matrices nilpotentes.
- Ex 30.** 2. Le polynôme $X^2 + aX + b$ étant irréductible sur $\mathbb{R}$, munir E d'une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel en posant $z \cdot x$ via l'action de f .
- Ex 31.** 3. Calculer d'abord $\dim \text{Ker } S$, c'est-à-dire la dimension de l'espace des matrices dont toutes les sommes de lignes et de colonnes sont nulles.
- Ex 32.** 2. Utiliser la formule du binôme, valable car les matrices commutent.
- Ex 34.** 1. Appliquer u^{p-1} , puis u^{p-2} , etc. à une relation de dépendance linéaire.
- Ex 35.** Fixer x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$; la famille $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base. Comparer v et un polynôme en u bien choisi sur x_0 .
- Ex 37.** 1. Si Φ n'était pas surjective, son image serait incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.
- Ex 38.** Pour le sens direct, introduire $\Psi : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$ et factoriser φ par Ψ .
- Ex 41.** 2. Décomposer $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$ et introduire le polynôme correspondant.
- Ex 43.** 1. Fixer $x_1, \dots, x_{n-1}$ et voir $\det V$ comme un polynôme en x_n .
- Ex 44.** 1. Développer selon la première colonne, puis à nouveau selon la première ligne du mineur obtenu.

Ex 46. 1. Distinguer selon que A est inversible ou non.

Ex 47. 1. Effectuer des opérations par blocs sur les colonnes puis les lignes.

Ex 48. 2. Les deux membres sont polynomiaux en les coefficients de A ; utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{R})$.

Ex 49. Introduire $T = (t_{i,j})$ avec $t_{i,j} = 1$ si $i \mid j$ et 0 sinon, $D = \text{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$ (φ = indicatrice d'Euler), et utiliser $\sum_{d \mid k} \varphi(d) = k$.