# TD 03
# Révisions d'algèbre linéaire

## 1 Exercices classiques

**Exercice 1.** *Base de polynômes $X^k(1-X)^{n-k}$.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Exercice 2.** *Matrices de rang 1.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $M = XY^\top$.
2. En déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)\,M$, puis calculer $M^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $I_n + M$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$, et déterminer alors son inverse.

**Exercice 3.** *Endomorphismes de trace nulle et matrices à diagonale nulle.* ●●○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, u(x)\big)$ soit liée. Montrer que $u$ est une homothétie.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que $A$ est semblable à une matrice de diagonale nulle.

**Exercice 4.** ●●○ Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f, g$ des endomorphismes de $E$ tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de $E$ est paire.
2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de $E$ t.q. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.

**Exercice 5.** *Rang d'une somme.* ●○○ Soit $E, F$ deux espaces vectoriels de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que

$$\big|\mathrm{rg}f - \mathrm{rg}g\big| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g.$$

**Exercice 6.** ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$, $u \in \mathscr{L}(E)$. $u$ est dit *nilpotent* s'il existe $k$ dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, où $u^k = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1. Soit $u$ un endomorphisme nilpotent. En utilisant la formule du binôme de Newton ou de Bernoulli montrer que $\mathrm{Id} - u$ est inversible.
2. Justifier qu'il existe un plus petit entier $p$ tel que $u^p = 0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de $u$.
3. On veut montrer que $p \leqslant n$ (où $p$ est l'indice de nilpotence de $u$). Pour ce faire, on définit, pour tout $k$ dans $\mathbb{N}$, $N_k = \ker(u^k)$. Montrer que pour tout entier $k$, $N_k \subset N_{k+1}$ et que s'il existe $k_0$ tel que $N_{k_0} = N_{k_0+1}$, alors pour tout $\ell \geqslant k_0$, $N_\ell = N_{\ell+1}$. Conclure.
4. Retrouver le même résultat en démontrant que si $x$ est un vecteur de $E$ qui n'est pas dans $\ker(u^{p-1})$, alors $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.
5. Un endomorphisme $f$ de $\mathscr{L}(E)$ est dit *ponctuellement nilpotent* si $\forall x \in E,\ \exists k \in \mathbb{N},\ f^k(x) = 0$.
   (a) Montrer que **si $E$ est de dimension finie**, un endomorphisme ponctuellement nilpotent de $E$ est nilpotent.
   (b) Montrer que le résultat est faux si l'on ne suppose plus $E$ de dimension finie (on exhibera un contre-exemple dans $\mathbb{K}[X]$).

**Exercice 7.** ●●◐ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $u_1, \ldots, u_n$ $n$ endomorphismes nilpotents vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Calculer $u_1 \circ \cdots \circ u_n$.

**Exercice 8.** ●●◐

1. (question de quasi-cours) Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f$ est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que $A$ est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

**Exercice 9.** *Mines-Télécom 23 et 22, Mines MP 15.* Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$ soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $A_{i,i} = a; A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit $J$ la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1 . En déduire $\det(A)$.

**Exercice 10.** *$\mathbb{R}$-similitude et $\mathbb{C}$-similitude.* ●●○ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que $A$ et $B$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

# 2 Espaces vectoriels et applications linéaires

**Exercice 11.** *Base de polynômes $(X+a_i)^n$.* ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille $\big((X+a_i)^n\big)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Exercice 12.** *Familles libres de fonctions.* ●○○ On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles suivantes sont libres.

1. $\big(x \mapsto |x-a|\big)_{a\in\mathbb{R}}$.
2. $\big(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\big)_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

**Exercice 13.** *Rang d'une famille trigonométrique.* ●○○ Déterminer le rang, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, de la famille $(f_1,\dots,f_5)$ définie par

$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \sin x, \quad f_3 : x \mapsto \sin^2 x, \quad f_4 : x \mapsto \cos^2 x, \quad f_5 : x \mapsto \cos 2x.$$

**Exercice 14.** *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.* ●○○ Soit $F = \big\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\big\}$.

1. Montrer que $F$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $\Psi : u \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de $F$ sur $\mathbb{C}^2$. En déduire $\dim F$.
2. En déduire une base de $F$ formée de suites géométriques.

**Exercice 15.** *Caractérisation de $E = \mathrm{Im}f \oplus \ker f$.* ●○○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois assertions :

$$\text{(i) } E = \mathrm{Im}f \oplus \ker f \qquad \text{(ii) } \mathrm{Im}f^2 = \mathrm{Im}f \qquad \text{(iii) } \ker f^2 = \ker f.$$

**Exercice 16.** *Noyau et image d'une composée.* ●○○ Soit $E, F, G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\ker(g\circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}g \iff \ker g + \mathrm{Im}f = F$.

**Exercice 17.** *Sous-espaces stables par un endomorphisme qui commute.* ◐○○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\ker u$ et $\mathrm{Im}u$ sont stables par $v$.

**Exercice 18.** *Somme directe d'images.* ●○○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g\circ f = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g = \dim E$ et que $E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}g$.

**Exercice 19.** *Un endomorphisme vérifiant $\ker f = \mathrm{Im}f$.* ●○○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = \mathrm{Im}f$ si et seulement si $n$ est pair.

**Exercice 20.** *Inégalités de Sylvester et de Frobenius.* ●●● Soit $E, F, G$ des espaces vectoriels de dimension finie.

1. (Sylvester) Soit $g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $f \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que
$$\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g - \dim F \ \leqslant\ \mathrm{rg}(f\circ g) \ \leqslant\ \min(\mathrm{rg}f, \mathrm{rg}g).$$
2. (Frobenius) Soit $h \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $f \in \mathcal{L}(G,H)$. Montrer que
$$\mathrm{rg}(f\circ g) + \mathrm{rg}(g\circ h) \leqslant \mathrm{rg}g + \mathrm{rg}(f\circ g\circ h).$$

# 3 Matrices

**Exercice 21.** *Puissances via un polynôme annulateur.* ◐○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

1. Montrer que $A$ est inversible et exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et $I_n$.
2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = a_pA + b_pI_n$, et les expliciter.

**Exercice 22.** *Matrices à diagonale strictement dominante.* ●○○ Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que $A$ est inversible.

**Exercice 23.** *Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.* ●◐○ Soit $n \geqslant 2$ et $H$ un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tous $i \neq j$, $H \cap \text{Vect}(I_n, E_{i,j}) \neq \{0\}$, où $(E_{i,j})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que $H$ contient une matrice inversible.

**Exercice 24.** *L'identité n'est pas un commutateur.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $AB - BA = I_n$.
2. En déduire que si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \circ g - g \circ f \neq \text{Id}_E$.

**Exercice 25.** *Équation matricielle $M + M^\top = \text{Tr}(M)A$.* ●◐○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation

$$M + M^\top = \text{Tr}(M)\, A. \tag{E}$$

**Exercice 26.** *Matrices scalaires et trace de $M \mapsto AM$.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A : M \mapsto AM$. Vérifier que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et montrer que $\text{Tr}(\varphi_A) = n\,\text{Tr}(A)$.

**Exercice 27.** *Endomorphisme nilpotent d'indice 2.* ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}u = r \geqslant 1$.

1. Montrer que $\text{Im}u \subset \ker u$, puis que $2r \leqslant n$.
2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de $u$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(bloc de taille $2r$, complété par des lignes et colonnes nulles si $2r < n$).

**Exercice 28.** *Trace nulle et commutateurs.* ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

**Exercice 29.** *Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes.* ●●● Soit $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. On note $\mathcal{N}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes. Montrer que $\mathcal{N}$ est exactement l'ensemble des matrices de trace nulle.

**Exercice 30.** *Endomorphisme vérifiant $f^2 + af + b\,\text{Id} = 0$ avec $a^2 - 4b < 0$.* ●●● Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + af + b\,\text{Id}_E = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - 4b < 0$.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $(x, f(x))$ est libre, et que $\text{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par $f$.
2. Montrer que $n$ est pair et qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale par blocs, chaque bloc valant $C = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.

**Exercice 31.** *Matrices magiques.* ●●● Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* si les sommes de ses coefficients le long de chaque ligne et de chaque colonne sont toutes égales à une même valeur, notée $s(M)$. On note $\mathcal{M}ag$ l'ensemble des matrices magiques et $J$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $\mathcal{M}ag$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $s : \mathcal{M}ag \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.
2. Montrer que $\mathcal{M}ag = \ker s \oplus \mathbb{R}J$.
3. Déterminer $\dim \mathcal{M}ag$.

# 4 Endomorphismes particuliers (nilpotents, projecteurs, symétries)

**Exercice 32.** *Matrices nilpotentes.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $I_n - N$ est inversible et son inverse est un polynôme en $N$.
2. Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent sont nilpotents. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de commutation.

**Exercice 33.** *Commutation avec un projecteur.* ●○○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p$ un projecteur de $E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \circ p = p \circ f \iff \text{Im}p \text{ et } \ker p \text{ sont stables par } f.$$

**Exercice 34.** *Endomorphisme nilpotent d'indice maximal.* ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p$ : $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$.
2. On suppose $p = n$. Écrire la matrice de $u$ dans la base $\mathcal{B} = \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$.

**Exercice 35.** *Commutant d'un nilpotent d'indice maximal.* ●●○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $n$ (i.e. $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$). On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ son commutant. Montrer que $C(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ et déterminer $\dim C(u)$.

**Exercice 36.** *Noyaux et images itérés.* ●●○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \ker u^k$ et $I_k = \mathrm{Im} u^k$.

1. Montrer que $(N_k)_k$ est croissante et $(I_k)_k$ décroissante (pour l'inclusion), et qu'elles sont stationnaires à partir d'un même rang $r$.
2. Montrer que $E = I_r \oplus N_r$.
3. En déduire qu'il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ avec $C$ inversible et $M$ nilpotente. Conclure que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une telle matrice.

**Exercice 37.** *Base antéduale.* ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur $E$. On pose

$$\Phi : E \to \mathbb{K}^n, \qquad x \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big).$$

1. Montrer que $\Phi$ est un isomorphisme.
2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $E$ vérifiant $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j$.

**Exercice 38.** *Inclusion de noyaux de formes linéaires.* ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et $\varphi$ des formes linéaires sur $E$. Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i \subset \ker\varphi \iff \varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p).$$

**Exercice 39.** *Inverse à droite et projecteur associé.* ●○○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de $f$ et de $g$ ?
2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur, et déterminer $\mathrm{Im} p$ et $\ker p$.
3. En déduire que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} g$.

**Exercice 40.** *Projecteurs qui commutent.* ●○○ Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q$ deux projecteurs de $E$ tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau.

**Exercice 41.** *Endomorphismes cycliques.* ●●● Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de $E$ ($f$ est dit *cyclique*).

1. Écrire la matrice de $f$ dans $\mathcal{B}$.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $g$ est entièrement déterminé par $g(x_0)$, puis que $g \in \mathbb{K}[f]$.
3. En déduire que le commutant de $f$ est $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$, de dimension $n$.

**Exercice 42.** *Une formule de Burnside.* ●●● Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $G$ un sous-groupe fini de $GL(E)$, de cardinal $N$. On pose $p = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{g \in G} g$.

1. Montrer que $h \circ p = p$ pour tout $h \in G$, puis que $p$ est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im} p = \displaystyle\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)$ (les vecteurs invariants par $G$).
3. En déduire que $\dim\Big(\displaystyle\bigcap_{g \in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\Big) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g)$.

# 5 Déterminants

**Exercice 43.** *Déterminant de Vandermonde.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On considère la matrice de Vandermonde

$$V = \left(x_i^{j-1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det V = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
2. En déduire que $V$ est inversible si et seulement si les $x_i$ sont deux à deux distincts, et retrouver ainsi l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de degré $\leqslant n-1$ en $n$ points d'abscisses distinctes.

**Exercice 44.** *Déterminant tridiagonal et polynômes de Tchebychev.* ●◐○ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $D_n(x)$ le déterminant de la matrice tridiagonale d'ordre $n$

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & & (0) \\ 1 & 2x & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2x & 1 \\ (0) & & & 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

1. Établir, pour tout $n \geqslant 1$, la relation $D_{n+2}(x) = 2x\, D_{n+1}(x) - D_n(x)$ (avec les conventions $D_0 = 1$, $D_1(x) = 2x$).
2. Pour $x = \cos\theta$ avec $\theta \in ]0, \pi[$, calculer $D_n(x)$.

**Exercice 45.** *Matrice antisymétrique d'ordre impair.* ◐○○ Soit $n$ un entier impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que $A$ n'est pas inversible.

**Exercice 46.** *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.* ●○○ Soit $A, B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\det M = \det A \det D$.
2. En déduire que $M$ est inversible si et seulement si $A$ et $D$ le sont.

**Exercice 47.** *Déterminants par blocs et positivité.* ●◐○ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.
2. On suppose de plus $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$, et donner un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.

**Exercice 48.** *Comatrice de la comatrice.* ●●● Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Com}(A)$ sa comatrice, et on rappelle la relation $A\, {}^{\top}\mathrm{Com}(A) = {}^{\top}\mathrm{Com}(A)\, A = \det(A)\, I_n$.

1. Lorsque $A$ est inversible, exprimer $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de $A$, puis calculer $\det\big(\mathrm{Com}(A)\big)$ et $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big)$.
2. En déduire que $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big) = (\det A)^{n-2} A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Exercice 49.** *Déterminant de Smith.* ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ définie par $m_{i,j} = i \wedge j$ (le pgcd de $i$ et $j$). Calculer $\det M$.

# 6 Du côté des oraux...

**Exercice 50.** *CCINP 24.* Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}\,(B_1) + \mathrm{rg}\,(B_2)$ ; puis que : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \sum_{k=1}^{4} \mathrm{rg}\,(A_k)$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}\,(A_1) = \mathrm{rg}\,(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, $A$ est inversible. Que vaut alors $A^{-1}$ ?

**Exercice 51.** *Centrale 24*. Soit $f$ un endomorphisme d'un C-espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \text{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite $(r_k)$ est décroissante et stationnaire.
2. En considérant $g_k : \left| \begin{array}{c} f^k(E) \to f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$, montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

**Exercice 52.** *Mines-Ponts 24*. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur $p$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose $P$ de rang $r$ et l'on considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Psi(X) = PX - XP.$$

Déterminer la trace de $\Psi$ en fonction de $n$ et $r$.

**Exercice 53.** *CCINP 24*. Soit $(A, B, P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AP = PB$. On écrit $P = P_1 + \text{i}P_2$ avec $(P_1, P_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose : $Q(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$.
2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $Q(x_0) \neq 0$.
3. En déduire qu'il existe $P_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AP_0 = P_0B$. Qu'a-t-on démontré ?

**Exercice 54.** *Mines 24, ex-X MP*. Soient $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, $F$ est sous-espace vectoriel de $E$ tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \text{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.
*Indication donnée par l'examinateur : montrer que pour tout $k$, $E = F + \text{Im}(u^k)$.*

**Exercice 55.** *Variations autour du Vandermonde*.

1. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels et $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ une famille de polynômes telle que $\deg(P_i) = i$. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \ldots, x_n)$.
2. Calculer $\left| \begin{array}{ccccc} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos((n-1)\theta_n) \end{array} \right|$.

**Exercice 56.** *Mines PC 23*. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre l'équation $X + \text{Tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $B = 0$. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension et une base.
2. Résoudre l'équation dans le cas général.

**Exercice 57.** *Centrale PSI 2025*. Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f, g$ des endomorphismes de $E$ tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \ker(f - \text{Id}_E)$, $B_f = \ker(f + \text{Id}_E)$, $A_g = \ker(g - \text{Id}_E)$, $B_g = \ker(g + \text{Id}_E)$.

1. Démontrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$.
2. En déduire que la dimension de $E$ est paire.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de $E$ t.q. $\text{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \text{I}_n & 0 \\ 0 & -\text{I}_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \text{I}_n \\ \text{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.
   *Indication : partir d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $A_f$. Que dire que $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ ?*

**Exercice 58.** *Centrale PC 22*. (RMS 2022-2023 1136) Pour $a, b$ dans $C$, on pose $D_1(a, b) = a$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_n(a,b) = \left| \begin{array}{ccccc} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{array} \right| \text{ et } A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & & (0) \\ -1 & 0 & -b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -b \\ (0) & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_n(a, b)$ pour $n \leqslant 3$
2. Donner une relation de récurrence linéaire reliant $D_n(a, b)$, $D_{n+1}(a, b)$ et $D_{n+2}(a, b)$.

**3.** Coder en Python une fonction `D(n,a,b)` renvoyant $D_n(a,b)$.

**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \mapsto D_n(a,b)$ est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.

**5.** Pour $b \in [\![1,n]\!]$ et $n \in [\![3,5]\!]$, donner une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a,b)$ sur $[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$. Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a,b)$.

**6.** Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$ ?

**7.** Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour $n \geqslant 0$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des termes de la suite $(T_n(\cos\theta))_n$.

**8.** Calculer les racines du polynôme $T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**9.** Déterminer alors les zéros de $a \longmapsto D_n(a,b)$ en fonction du nombre complexe $b$.

**Exercice 59.** *Mines-Ponts MP 2015*. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ C & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ C & \cdots & C & x_n \end{pmatrix}$ et $J$ la matrice de taille $n$ constituée uniquement de 1. On définit $P(X) = \det(A + XJ)$.

**1.** Majorer le degré de $P$.

**2.** Que vaut $\det(A)$ ? (on distinguera les cas $C \neq 1$ et $C = 1$).

**Exercice 60.** *Centrale MP 2016*. Python. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sont dans $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $y = (y1, \ldots, yn)^\top$ et $t = (t1, \ldots, tn)^\top$ sont dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que chaque élément $a_{i,j}$ de $A$ est la moyenne de ses quatre voisins dans $M$ (au-dessus, en dessous, à droite et à gauche).

**1.** Montrer que la donnée de $A$ ne définit pas $x, y, z, t$ de manière unique (on pourra commencer par $x$, $y$, $z$ et $t$ nuls).

**2.** (a) Écrire une fonction qui à une matrice $M$ écrite comme $M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$ mais ne érifiant pas nécessairement la condition des moyennes, associe $M' = F(M) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & B & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$ où, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on a $b_{ij} = \dfrac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}$.

(b) On définit alors une suite $(A_p)$ d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $A_0 = 0$ et, pour $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A_{p+1} & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A_p & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Écrire une fonction qui à $A_0$ et $p$ associe $A_p$ et la tester pour $n = 3$ et $n = 4$ avec $p = 100$, $p = 1000$. Que peut-on conjecturer ?

(c) Prouver la conjecture.

**Exercice 61.** *ENS MP 2016*. Soit $n \geqslant 2$.

**1.** Montrer qu'on a : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2,\ M^\top = PMQ$.

**2.** A-t-on : $\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2,\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ M^\top = PMQ$ ?

**3.** Montrer qu'on a : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists P \in GL_n(\mathbb{C})^2,\ M^\top = PMP^{-1}$.

**Exercice 62.** *Mines-Ponts MP 2016*. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n$.

**1.** Soit $A$ un sous-espace de $E$ de dimension $a$. Montrer que $\alpha = \{u \in \mathscr{L}(E), A \subset \ker(u)\}$ et $\beta = \{u \in \mathscr{L}(E), u(A) \subset A\}$ sont des sous-espaces de $\mathscr{L}(E)$ et donner leurs dimensions.

**2.** Soient $F$, $G$ deux sous-espaces de $E$. On note $f, g, h$ les dimensions respectives de $F$, $G$, $F \cap G$. Déterminer la dimension de $\gamma = \{u \in \mathscr{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$.

**Exercice 63.** *Mines-Ponts MP 2016*. Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ tels que $u+v=\mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)\leqslant n$. Montrer que $u$ et $v$ sont des projecteurs.

**Exercice 64.** *Mines-Ponts PSI 2016*. Soient $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $f\in GL(E)$. Soit $g\in\mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f+g\in GL(E)\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(g\circ f^{-1})\neq -1$.

**Exercice 65.** *CCINP MP 2018*. Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension au moins égale à 2 et $\ell\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, non nulle. Soit $a\in E\setminus\{0\}$.

1. Déterminer $\dim(\ker(\ell))$.
2. Soit $\ell'\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})\setminus\{0\}$ telle que $\ker(\ell)\subset\ker(\ell')$. Montrer que $\ell$ et $\ell'$ sont proportionnelles.
3. Soit $f$ définie par $f:x\mapsto\ell(a)x-\ell(x)a$. Montrer que $f$ est un endomorphisme.
4. On suppose $\ell(a)\neq 0$.
   (a) Déterminer $\ker(f)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et espaces propres de $f$. $f$ est-elle diagonalisable ?

**Exercice 66.** *ENS Saclay 24*. Soit $E$ l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$. On définit $F:E\to E$ par :
Pour $u\in E$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$F(u)_n=u_{n+1}$$

1. Montrer que $F$ est linéaire.
2. Est-elle injective ? Surjective ?
3. Construire $G$ endomorphisme linéaire de $E$ tel que $F\circ G=\mathrm{Id}_E$.
4. Que vaut $G\circ F$ ?
5. Conclure.

On note désormais $E$ l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$. On définit $H:E\to E$ par :
Pour $u\in E$, et, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ :

$$H(u)_n=u_{n+1}+u_{n-1}$$

6. Montrer que $H$ est linéaire. Est-elle injective ?
7. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $u\in\ker(H-\mathrm{Id}_E)$. Trouver $M_\lambda\in M_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix}u_k\\u_{k+1}\end{pmatrix}=M_\lambda^k\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}$$

8. Pour $|\lambda|\neq 2$, montrer que $M_\lambda$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.
9. Existe-t-il des suites de $\ker(H-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$ périodiques ? Les caractériser.
10. Étudier le cas $|\lambda|=2$.

**Exercice 67.** *Mines-Ponts MP 2026*.

1. Soit $P(X)=X^2+aX+b$, $x_1,x_2$ ses deux racines. On note $N_1=x_1+x_2$ et $N_2=x_1^2+x_2^2$. Calculer $\begin{vmatrix}2&N_1\\N_1&N_2\end{vmatrix}$.
2. Soit $P(X)=X^3+pX+q$, soient $x_1,x_2,x_3$ les trois racines de $P$ (non nécessairement distinctes). On note $N_k=\sum_{i=1}^{3}x_i^k$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix}3&N_1&N_2\\N_1&N_2&N_3\\N_2&N_3&N_4\end{vmatrix}$.
3. Généraliser à un $n$ quelconque : pour $P=X^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$, trouver un lien entre $\begin{pmatrix}n&N_1&\dots\\\vdots&&\\N_{n-1}&&N_{2n-2}\end{pmatrix}$ et la matrice de Vandermonde de $(x_1,\dots,x_n)$.

**Exercice 68.** *Mines-Télécom MP 2026*. Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi:M\mapsto AMB$. Déterminer la trace de $\phi$.

**Exercice 69.** *Mines-Ponts MP 2019*. (RMS 2018-2019 517) Soient $A$ et $B$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $U$ et $V$ inversibles telles que $\mathrm{rg}(UA+BV)=\min(n,\mathrm{rg}A+\mathrm{rg}B)$.
2. Montrer que, si $\mathrm{rg}(A)+\mathrm{rg}(B)\geqslant n$, il existe U et V inversibles telles que UA + BV soit inversible.

# 7 Exercices en + (TD 29/09)

**Exercice 70.** *Mines-Ponts 24*. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x+i+j-2)$. Montrer que $A$ n'est pas inversible.

**Exercice 71.** *Mines-Ponts 2015*. Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.
*Indication :* Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)$.

**Exercice 72.** *Mines 24*. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $A$ et $B$ pour que $M$ soit inversible. Calculer alors $M^{-1}$.

**Exercice 73.** *Mines 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice $n$.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$. En déduire que la famille $\left(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est libre.
2. Montrer que $A$ est semblable à $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note, si $N$ est nilpotente d'indice $p$, $\mathrm{e}^N = \sum_{k=0}^{p} \frac{N^k}{k!}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\lambda\left(e^{J_n} - \mathrm{I}_n\right)$ est nilpotente. Préciser son indice de nilpotence.
4. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \lambda P^{-1} e^{J_n} P$.
5. En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = e^B$.

**Exercice 74.** *Mines PC 23*. Soit $(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{L}(E, \mathbb{C}))^p$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

1. $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre,
2. l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right.$ est surjective,
3. $\exists (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $\det\left(\left(f_i(x_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\right) \neq 0$

**Exercice 75.** *CCINP 22*. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f$ un endomorphisme d'un espace $E$, représenté par $A$ dans une base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\left(f^2\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)$.
2. Trouver un vecteur de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ qui ne soit pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Trouver une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle $f$ soit représenté par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que si un endomorphisme $g$ commute avec $f$ alors $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ est stable par $g$.
5. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme $g$ tel que $g \circ g = f$.

**Exercice 76.** *Navale MP 24*. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :

**(i)** $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(MAB) = \mathrm{Tr}(MBA)$,

**(ii)** $M$ est une homothétie (c'est-à-dire de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

*Indication.* Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, que vaut $\mathrm{Tr}(ME_{ij})$ ?

**Exercice 77.** Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer la matrice $A_\alpha$ de $f_\alpha$ dans la base précédente.
4. À quelle condition sur $\alpha$ l'endomorphisme $f_\alpha$ est-il inversible ?

**Exercice 78.** *X 24*. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

**Exercice 79.** *Navale 2025*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit :

$$D_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top + M = \mathrm{Tr}(M)A \right\}.$$

Déterminer l'ensemble $D_A$ et sa dimension.

**Exercice 80.** *Centrale PSI 2025*.

1. Montrer que pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
2. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_p(\mathbb{C}))$ telle que pour toutes matrices $A$ et $B$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Soit $\phi : \left| \begin{array}{c} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ M \longmapsto \mathrm{Tr}(f(M)) \end{array} \right.$ Montrer que pour toutes $A$ et $B$, $\phi(AB) = \phi(BA)$
3. En déduire que $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour toute matrice $M$, $\mathrm{Tr}(f(M)) = \alpha \,\mathrm{Tr}(M)$

**Exercice 81.** *Mines-Telecom PSI 2025*. **1.** Rappeler la définition de deux matrices semblables.

2. Soit $A$ une matrice non inversible et non nulle.
   (a) Démontrer que $A$ est semblable à une matrice $A'$ de première colonne nulle.
   (b) Démontrer qu'il existe $(i,j)$ dans $\{1,\dots,n\}^2$ tels que $A'E_{ij} = E_{ij}A' = 0$, où $E_{ij}$ est la matrice avec des zéros partout, sauf sur la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne.
   (c) En déduire qu'il existe $B$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.
3. Étudier la réciproque de la propriété précédente.

**Exercice 82.** *CCINP PSI 2015*. Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme $f$ de $E$ tel que $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\ker(f) = G$.

**Exercice 83.** *Navale MP 2017*. (BEOS 3430-2)

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$u_A : \left| \begin{array}{c} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ x \mapsto (\det(C_1, \dots, C_{j-1}, x, C_{j+1}, \dots, C_n))_{1 \leqslant j \leqslant n} \end{array} \right.$$

L'application $u_A$ est-elle :

- linéaire ?
- injective/surjective/bijective ?
- continue ?

**Exercice 84.** *Mines-Télécom MP 2026*. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence $A^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{Tr}(A) \\ \mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - A) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n - A) \end{cases}$.

# Indications

**Ex 1.** Regarder la valuation (le terme de plus bas degré) de chaque polynôme $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

**Ex 2.** **1.** Une matrice de rang 1 a son image engendrée par un seul vecteur : toutes ses colonnes lui sont proportionnelles.
**3.** Chercher l'inverse sous la forme $I_n + \lambda M$.

**Ex 3.** **1.** Traiter d'abord chaque vecteur, puis comparer les scalaires sur deux vecteurs libres.
**2.** Récurrence sur $n$ : si $A \neq 0$, elle n'est pas une homothétie, donc il existe $x$ avec $(x, Ax)$ libre.

**Ex 5.** Pour la majoration, penser à $\mathrm{Im}(f+g)$. Pour la minoration, écrire $f = (f+g) + (-g)$.

**Ex 7.** On pourra regarder les induits de $u_1, \dots, u_{n-1}$ sur $\mathrm{Im}(u_n)$ (en vérifiant déjà qu'ils stabilisent cet espace).

**Ex 10.** Écrire $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2$ réelles, et considérer la fonction $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$.

**Ex 11.** Développer $(X + a_i)^n$ par la formule du binôme et se ramener à un système de Vandermonde.

**Ex 12.** **1.** Une combinaison de ces fonctions est affine par morceaux : regarder les ruptures de pente.
**2.** Ordonner les exposants et factoriser par la plus grande exponentielle.

**Ex 13.** Chercher les relations linéaires évidentes entre ces fonctions.

**Ex 14.** **2.** Chercher les suites géométriques $(r^n)$ appartenant à $F$.

**Ex 18.** Traduire $g \circ f = 0$ en une inclusion, et comparer $\mathrm{Im}(f+g)$ à $\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$.

**Ex 20.** **1.** Appliquer le théorème du rang à la restriction de $f$ à $\mathrm{Im}g$.
**2.** Réutiliser l'égalité $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}g - \dim(\ker f \cap \mathrm{Im}g)$.

**Ex 21.** **2.** Le polynôme $X^2 - 3X + 2$ se factorise. Effectuer la division euclidienne de $X^p$ par ce polynôme.

**Ex 22.** Raisonner par l'absurde sur une coordonnée de plus grand module d'un vecteur du noyau.

**Ex 23.** **1.** Comparer les dimensions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Ex 24.** **1.** Penser à la trace.

**Ex 25.** Décomposer $M$ en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.

**Ex 26.** **1.** Il suffit d'écrire la commutation avec chaque $E_{i,j}$.

**Ex 27.** **2.** Partir d'une base d'un supplémentaire de $\ker u$ ; ses images forment une base de $\mathrm{Im}u$.

**Ex 28.** Sens réciproque : un commutateur est de trace nulle. Sens direct : se ramener, par similitude, à une matrice de diagonale nulle, puis chercher $A$ diagonale à coefficients distincts.

**Ex 29.** Pour l'inclusion réciproque, engendrer les $E_{i,j}$ $(i \neq j)$ puis écrire $E_{i,i} - E_{j,j}$ comme somme de deux matrices nilpotentes.

**Ex 30.** **2.** Le polynôme $X^2 + aX + b$ étant irréductible sur $\mathbb{R}$, munir $E$ d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel en posant $z \cdot x$ via l'action de $f$.

**Ex 31.** **3.** Calculer d'abord $\dim\ker s$, c'est-à-dire la dimension de l'espace des matrices dont toutes les sommes de lignes et de colonnes sont nulles.

**Ex 32.** **2.** Utiliser la formule du binôme, valable car les matrices commutent.

**Ex 34.** **1.** Appliquer $u^{p-1}$, puis $u^{p-2}$, etc. à une relation de dépendance linéaire.

**Ex 35.** Fixer $x_0$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ ; la famille $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base. Comparer $v$ et un polynôme en $u$ bien choisi sur $x_0$.

**Ex 37.** **1.** Si $\Phi$ n'était pas surjective, son image serait incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

**Ex 38.** Pour le sens direct, introduire $\Psi : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$ et factoriser $\varphi$ par $\Psi$.

**Ex 41.** **2.** Décomposer $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$ et introduire le polynôme correspondant.

**Ex 43.** **1.** Fixer $x_1, \dots, x_{n-1}$ et voir $\det V$ comme un polynôme en $x_n$.

**Ex 44.** **1.** Développer selon la première colonne, puis à nouveau selon la première ligne du mineur obtenu.

**Ex 46. 1.** Distinguer selon que $A$ est inversible ou non.

**Ex 47. 1.** Effectuer des opérations par blocs sur les colonnes puis les lignes.

**Ex 48. 2.** Les deux membres sont polynomiaux en les coefficients de $A$ ; utiliser la densité de $GL_n(\mathbb{R})$.

**Ex 49.** Introduire $T = (t_{i,j})$ avec $t_{i,j} = 1$ si $i \mid j$ et 0 sinon, $D = \mathrm{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$ ($\varphi$ = indicatrice d'Euler), et utiliser $\displaystyle\sum_{d|k} \varphi(d) = k$.