

TD 03b Polynômes

1 Quelques classiques, très très classiques

Exercice 1. ●●○

- Décomposer $X^n - 1$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer, pour (a, b) entiers, le pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$.

Exercice 2. ●●○ Déterminer l'image et le noyau de

$$\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases} \text{ et de } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}.$$

Exercice 3. ●●○ Déterminer les polynômes P vérifiant $P' | P \dots$

- en étudiant les racines de P
- via la formule de Taylor pour les polynômes
- en utilisant une décomposition en éléments simples

Exercice 4. ●●○

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé à racines simples. Montrer que P' est scindé à racines simples.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé. Montrer que P' est scindé.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, scindé. Montrer que $1 + P^2$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5. ●●● Seule les deux premières questions sont « très classique ». Le reste est « classique dur ». Soit n un entier naturel. On définit

$$\mathcal{Q}_n = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ unitaires à coefficients entiers de racines de module } \leq 1\},$$

et

$$\mathcal{R}_n = \{\omega \in \mathbb{C}, \exists P \in \mathcal{Q}_n, P(\omega) = 0\}.$$

- Soit P dans $\mathcal{Q}_n$. Montrer que les racines non nulles de P sont de module 1.
- Démontrer que $\mathcal{Q}_n$ est fini et majorer son cardinal. En déduire que $\mathcal{R}_n$ est fini et majorer son cardinal.
- Soit P dans $\mathcal{Q}_n$. Écrivons $P(X) = K \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P_k(X) = K \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i^{2^k})$.
 - Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $P_{k+1}(X^2) = (-1)^n P_k(X) P_k(-X)$. En déduire que pour tout k dans $\mathbb{N}$, P_k est à coefficients entiers.
 - En déduire que si $z \in \mathcal{R}_n$, $z^{2^k} \in \mathcal{R}_n$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.
- En considérant l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}_n \\ k \mapsto z^{2^k} \end{matrix}$ et en montrant qu'elle n'est pas injective, en déduire que z est nul ou une racine de l'unité.

2 Autres exos

Exercice 6. RMS 2019-2020, 235 – quand P'' divise P . ●●● Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P .

- Montrer que P est à racines simples.
- Montrer que les racines de P sont alignées.

Exercice 7. ENS MP 2026 – concours magistère Rennes. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.

- Montrer que P est positif sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P est somme de deux carrés ($\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2, P = Q^2 + R^2$). On pourra montrer que l'ensemble des polynômes qui s'écrivent comme somme de deux carrés est stable par produit.

2. En vous inspirant de la question précédente, montrer que P est positif sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement s'il existe $(A, B, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^4$ tels que $P = A^2 + B^2 + X(Q^2 + R^2)$.

Exercice 8. ENS MP 2016. Soit P un polynôme réel de degré au moins trois scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P .

Exercice 9. Mines MP 23. 1. Montrer qu'il existe $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de polynômes à coefficients entiers telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, P_n\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$.

2. Montrer que les polynômes définis précédemment sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(a\pi) \in \mathbb{Q}$. Montrer que $2\cos(a\pi) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10. Centrale MP 23. (BEOS 7380) On définit la suite des polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$T_0 = 1, T_1 = X, \forall n \geq 0, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

On admet : pour tout n dans $\mathbb{N}$, T_n est de degré n et, si $n \geq 1$, de coefficient dominant 2^{n-1} .

1. [Py] Écrire une fonction `tcheby(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie le n -ième polynôme de Tchebychev. On utilisera la classe `Polynomial` du module `numpy.polynomial` comme indiqué sur l'aide.

2. [Py] Tracer les polynômes T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 sur $[-1, 1]$ et dénombrer le nombre de zéros de ces polynômes.

On dit que deux polynômes P et Q **commutent** si $P \circ Q = Q \circ P$, le $\circ$ désignant la composition de polynômes : si

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k, P \circ Q = \sum_{k=0}^d a_k Q^k. \text{ On rappelle que } (P \circ Q)' = P' \circ Q \times Q'.$$

1. [Py] Vérifier sur quelques exemples que les polynômes de Tchebychev commutent. Tous les polynômes commutent-ils avec les polynômes de Tchebychev ?

2. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout θ dans $\mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

3. Démontrer que pour tous n et m dans $\mathbb{N}$ tels que $m \leq n$,

$$(a) \quad 2T_m T_n = T_{n+m} + T_{n-m},$$

$$(b) \quad T_m \circ T_n = T_n \circ T_m.$$

(en particulier, les polynômes de Tchebychev commutent)

4. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et (E_n) l'équation différentielle suivante d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$

$$(1 - X^2)(P'(X))^2 = n^2(1 - P(X)^2) \quad (E_n)$$

- (a) Démontrer que T_n et $-T_n$ sont solutions de (E_n) .

- (b) Soit P une solution non constante de (E_n) .

- i. Démontrer que $\deg(P) = n$.

On pourra dériver (E_n) .

- ii. En nommant a_n le coefficient dominant de P , et en considérant $2^{n-1}P - a_n T_n$, conclure que $P = \pm T_n$.

On pourra utiliser la même technique qu'à la question précédente.

5. Soit maintenant un polynôme P commutant avec un certain T_n avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $k = \deg(P)$ et $G(X) = (1 - X^2)(P'(X))^2 - k^2(1 - P(X)^2)$.

- (a) Démontrer que $\deg(G) < 2k$.

- (b) Démontrer, en utilisant la relation de commutation $P \circ T_n = T_n \circ P$ et l'équation différentielle (E_n) , que

$$n^2 G \circ T_n = (T'_n(P))^2 G,$$

et conclure que, si G est non nul, $\deg(G) = 2k$.

- (c) Conclure que $P = \pm T_k$, et, plus précisément, que $P = \pm T_k$ si k est impair, $P = T_k$ si k est pair.