

Chapitre 03 – Révisions d'algèbre linéaire

1 Rappels brefs

1.1 Sous-espaces vectoriels et familles

Définition 1. Une partie F d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si $0 \in F$ et : $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Définition 2. Une famille $(e_1, \dots, e_n)$ d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est dite

- libre si : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \right) \Rightarrow (\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0)$,
- génératrice si : $\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$,
- une base si elle est libre et génératrice ou si : $\forall x \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

On adapte les définitions dans le cadre de familles indexées sur un ensemble quelconque avec la notion de « famille presque nulle ».

Proposition 3. Toute famille de polynômes à degrés échelonnés (ne contenant pas le polynôme nul) est libre.

Proposition 4 (Dimension finie, bases).

1. Étant données une famille libre $\mathcal{L}$, une famille génératrice $\mathcal{G}$, vérifiant $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. D'où :
 - toute famille libre peut être complétée en une base **en sélectionnant les vecteurs dans une famille génératrice donnée**.
 - de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
2. Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **de dimension finie** n :
 - (a) toute famille libre possède moins de n éléments, et toute famille libre de n éléments est une base.
 - (b) toute famille génératrice possède au moins n éléments, et toute famille génératrice de n éléments est une base.
 - (c) tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension inférieure ou égale à n et tout sous-espace vectoriel F de E de dimension n est égal à E .

Proposition 5 (Formule de Grassmann). Si E est un $\mathbb{K}$ -evdf n , si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E ,

1. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
2. on a les équivalences :
 - $F \oplus G = E$
 - $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
 - $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$

1.2 Applications linéaires

Définition 6. Si E et F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, une application $\varphi : E \rightarrow F$ est linéaire si : $\forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$.

Proposition 7.

1. Une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective ssi $\ker(\varphi) = \{0_E\}$ où le noyau de φ est défini par $\ker(\varphi) = \{x \in E, \varphi(x) = 0_F\}$.
2. Soit $y \in F$. L'ensemble des solutions de $\varphi(x) = y$ est
 - ou bien vide si $y \notin \text{Im}(\varphi)$,
 - ou bien égal à $\{x_0 + h, h \in \ker(\varphi)\}$ sinon, où x_0 est une solution particulière de l'équation.

Proposition 8. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Définition 9. Le rang de $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est la dimension de l'image de φ . Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , c'est $\dim(\text{Vect}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)))$.

Proposition 10 (Théorème du rang). Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. (version géométrique) φ réalise un isomorphisme entre tout supplémentaire de $\ker(\varphi)$ et $\text{Im}(\varphi)$.
2. Si E est de dimension finie,
 - (a) $\dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(E)$
 - (b) si F est de dimension finie, $\dim(E) = \dim(F)$, on a les équivalences entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de φ .

Exemple 11 (Interpolation de Lagrange). Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, deux à deux distincts.

1. $P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$ définit un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. L'image de la base canonique par φ^{-1} est la base d'interpolation de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$. On a $L_k = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq k}} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$.
3. Pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n P(x_k) L_k$.

Proposition 12 (Formes linéaires et hyperplans). Soit H un sous-espace vectoriel de E . On a les équivalences entre

1. $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), H = \ker(\varphi)$,
2. $\exists u \in E \setminus \{0\}, H \oplus \text{Vect}(u) = E$,
3. $\forall u \in E \setminus H, H \oplus \text{Vect}(u) = E$,
4. (si E est de dimension finie) $\dim(H) = n - 1$.

1.3 Matrices

Définition 13 (Matrices, calcul matriciel).

1. Si A est dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B est dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^p [A]_{i,k} [B]_{k,j}$.
2. En notant $E_{a,b} = (\delta_{ia} \delta_{jb})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, on a la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Dans le cas de matrices carrées, $E_{a,b} E_{c,d} = \delta_{bc} E_{a,d}$.

Proposition 14 (Mieux comprendre les matrices).

1. **Une matrice est une application linéaire** : si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application linéaire canoniquement associée à A est l'application $f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$. On définit $\ker(A)$, $\text{Im}(A)$, $\text{rg}(A)$.
2. **Une application linéaire est une (des) matrice(s)** : si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, si $\mathcal{E}$ est une base de E et $\mathcal{F}$ est une base de F , on peut représenter φ par $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\varphi) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et l'application $\Psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\varphi) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Définition 15.

1. Deux matrices rectangulaires A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$.
2. Deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe P dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

Proposition 16.

1. $\text{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(\varphi) = \text{Mat}_{\mathcal{F}'}(\mathcal{F}) \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\varphi) \text{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(\varphi) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$
2. Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang (si et seulement si elles représentent la même application linéaire).
3. Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même **endomorphisme** (en prenant, pour chaque représentation, la même base au départ qu'à l'arrivée).

Proposition 17 (Interprétation du rang d'une matrice). Si A est une matrice, le rang de A est :

- le rang de l'application linéaire canoniquement associée,
- le rang de n'importe quelle application linéaire représentée par A ,
- le rang des colonnes de A ,
- le rang des lignes de A ,
- le nombre de pivots non nuls après échelonnement de A en ligne comme en colonne,
- l'unique r tel que A est équivalente à $J_{n,p,r}$ (matrice avec que des 0 sauf une diagonale de r « 1 »).

Proposition 18 (Inversibilité d'une matrice). Si A est une matrice carrée, A est inversible si et seulement si :

- il existe B telle que $AB = I_n$,
- il existe B telle que $BA = I_n$,
- $\text{rg}(A) = n$,
- $\ker(A) = \{0_{n,1}\}$,
- A représente un isomorphisme,
- A est équivalente en lignes ou en colonnes à l'identité,
- $\det(A) \neq 0$.

Exemple 19.

1. Inversibilité et inverse de la matrice des coefficients binomiaux.
2. Définition et inversibilité d'une matrice de Vandermonde.

Proposition 20 (Méthodes de calcul de déterminant). On rappelle les quelques méthodes fondamentales suivantes :

- la « grosse formule » $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n [A]_{\sigma(j),j}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- utilisation de la n -linéarité,
- opérations élémentaires,
- développement selon une ligne ou une colonne.

Exemple 21.

1. Déterminant de Vandermonde : deux manières de le calculer.
2. Déterminant tridiagonal.

Proposition et Définition 22.

1. **Prop.** Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.
2. **Déf.** On définit la trace/le déterminant d'un endomorphisme u de E comme la trace/le déterminant de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, et ce quelle que soit la base $\mathcal{B}$.

Définition 23. On définit la comatrice de A par $[\text{Com}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Proposition 24. On a $A \times \text{Com}(A)^{\top} = \text{Com}(A)^{\top} \times A = \det(A) \times I_n$.

2 Prolongements

2.1 Somme directe de n sous-espaces vectoriels

Proposition 25. Un produit cartésien de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels possède une structure naturelle de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension égale à la somme des dimensions quand elles sont finies : $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$.

Définition 26. La somme d'une famille finie de sous-espaces $(E_i)_{1 \leq i \leq q}$ d'un espace E est l'image de l'application : $E_1 \times \cdots \times E_q \longrightarrow E, (x_1, \dots, x_q) \mapsto x_1 + \cdots + x_q$.

Lorsque cette application est injective, on dit que la somme est directe. On la note alors $\bigoplus_{i=1}^q E_i$ tandis que dans le cas général la somme est simplement notée $\sum_{i=1}^q E_i$.

Remarque 27.

- $F + G = \text{Vect}(F \cup G) = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G .
- on a l'équivalence « $F + G$ est directe » et « $F \cap G = \{0_E\}$ ». C'est **très faux** dès trois sous-espaces. En revanche, on peut dire que la somme $F + G + H$ est directe si $F \cap G = \{0_E\}$ et $(F \oplus G) \cap H = \{0_E\}$.

Proposition 28. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E .

$$\dim \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \dim(F_i),$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Remarque 29. Si E est la somme directe de sous-espaces de dimensions finies, toute réunion de bases de ces sous-espaces constitue une base de E . Une telle base est dite adaptée à la somme directe. Inversement, si E est de dimension finie, toute partition d'une base de E fournit une décomposition de E en somme directe.

2.2 Sous-espaces stables et produit par blocs

Définition 30. On dit qu'un sous-espace F d'un espace E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $u(F) \subset F$. En ce cas, l'endomorphisme induit par u sur F est $u_F : F \rightarrow F; x \mapsto u(x)$.

Proposition 31. Si $E = \bigoplus_{i=1}^q E_i$ et si $\mathcal{B}$ est une base adaptée, un endomorphisme stabilise chacun des E_i si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs.

Définition 32 (Opérations par blocs).

1. Si A, B, C, D, R, S, T, U sont des matrices,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AR + BT & AS + BU \\ CR + DT & CS + DU \end{pmatrix},$$

du moment que les formats sont compatibles.

2. En particulier, $A \times (C_1 \cdots C_n) = (AC_1 \cdots AC_n)$ et $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \vdots \\ L_n B \end{pmatrix}$.

Proposition 33. Si deux endomorphismes f et g commutent, alors le noyau et l'image de f sont stables par g .

3 Polynômes de matrices et d'endomorphismes

3.1 Évaluation

Définition 34. Pour $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k$.

On fait de même pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 35. On a : $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$ et $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Proposition 36. Le noyau d'un polynôme en u est stable par u .

3.2 Un peu de structures algébriques

3.2.1 $\mathbb{K}$ -algèbres

Définition 37. Une $\mathbb{K}$ -algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ est un ensemble muni de deux lois de composition internes $+$ et $\times$, d'une loi de composition externe $\cdot$ sur $\mathbb{K} \times A$, tel que

1. $(A, +, \times)$ est un anneau,
2. $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
3. pour tous x, y dans A et λ dans $\mathbb{K}$, $(\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$.

On définit les morphismes de $\mathbb{K}$ -algèbres comme les morphismes de groupes/anneaux/corps/espaces vectoriels.

Exemple 38.

1. $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$ -algèbres.
2. $\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre. L'évaluation $P \mapsto P(u)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres.

3.2.2 Idéaux

Définition 39. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, $\mathcal{I}$ une partie de A . On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal de A si :

1. $\mathcal{I}$ est un sous-groupe de $(A, +)$,
2. pour tout x dans $\mathcal{I}$ et tout y dans A , $x \times y \in \mathcal{I}$.

Définition et Proposition 40. Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, $x \in A$.

1. **Déf.** L'idéal engendré par x est l'ensemble $xA = \{x \times y, y \in A\}$.
2. **Prop.** Il s'agit bien d'un idéal de A .

Proposition 41.

1. Les idéaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{Z}$.
2. Les idéaux de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ sont de la forme $P\mathbb{K}[X]$, où $P \in \mathbb{K}[X]$.

Proposition et Définition 42. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. **Prop.** L'ensemble $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X], P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
2. **Déf.** Il est engendré par un unique polynôme unitaire, appelé polynôme minimal de u et noté π_u .

On fait de même pour les matrices.

Exemple 43. Si u est un endomorphisme nilpotent, alors tout polynôme P vérifiant $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est un multiple de X^p , où p est l'indice de nilpotence de u .