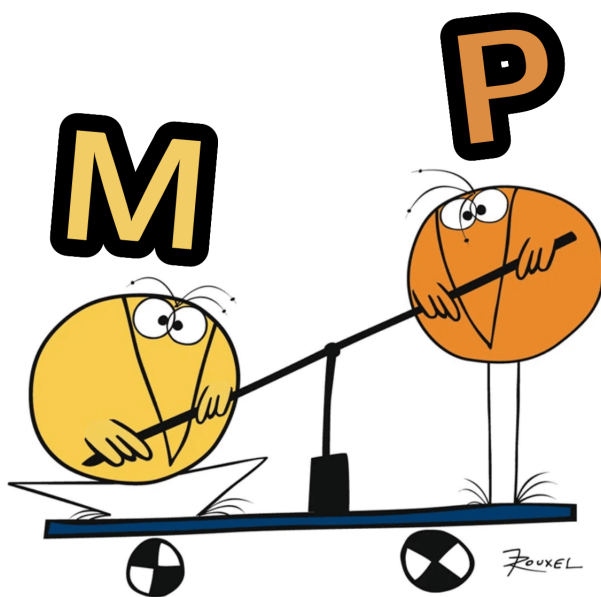




Mathématiques

DS 01

Samedi 12 septembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♪ Bon courage ! ♪

Exercice. Banque CCINP.

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge.
3. $\sum_{n \geq 1} \cos \left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1} \right)$ converge-t-elle absolument ?

Problème 1. Produits infinis – E3A PSI 2003

$\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et n est un entier naturel non nul.

Dans tout l'exercice, (a_n) est une suite d'éléments non nuls de $\mathbf{R}$. On lui associe la suite

(p_n) définie par : $p_n = \prod_{k=1}^n a_k$. Lorsque (p_n) converge, on note p sa limite.

Lorsque (p_n) diverge vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$), on dit que (p_n) admet $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) pour limite.

Première partie

1° Donner un exemple de suite (a_n) , telle que (p_n) converge vers $p = 0$.

2° Prouver que, si (p_n) converge vers p différent de 0, alors (a_n) converge vers 1.

3° On suppose dans cette question qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$a_n > 0, \text{ pour } n > n_0.$$

On pose, pour n supérieur à n_0 , $q_n = \prod_{k=n_0+1}^n a_k$.

- a) Pour n supérieur à n_0 , exprimer q_n en fonction de p_n et de p_{n_0} .
- b) Montrer que, si la série $\sum \ln(a_n)$ converge, alors la suite (p_n) converge et que p est non nul.
- c) On suppose que la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln(a_n)$ diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$. Préciser dans chacun de ces deux cas la limite de la suite (p_n) .

Dans ce qui suit, on définit u_n par : $a_n = 1 + u_n$.

4° On suppose dans cette question que, pour tout n , on a : $u_n \geq 0$.

Démontrer que la suite (p_n) converge vers $p > 0$ si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

5° On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ converge, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

b) Montrer que, si la série $\sum u_n^2$ diverge, alors la suite (p_n) converge et $p = 0$.

6° Prouver que, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la suite (p_n) converge et p est non nul.

Deuxième partie

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre. On pourra les traiter en utilisant les résultats établis dans la première partie, à condition de s'y référer de manière très précise.

1° Etudier la convergence et déterminer la limite de (p_n) dans les deux cas suivants :

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.

b) $a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$.

2° On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pose : $a_n = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^n e^{-t^2} dt$. La suite (p_n) est-elle convergente ?

3° Soit (u_n) une suite de nombres réels vérifiant : $1 + u_n \neq 0$ pour $n \geq 1$. On pose :

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \quad , \quad v_n = \frac{u_n}{p_n}.$$

a) Pour $n > 1$, exprimer v_n en fonction de $\frac{1}{p_n}$ et de $\frac{1}{p_{n-1}}$.

b) On suppose dans cette question que la série $\sum u_n^2$ converge.

i) Etablir que la convergence de la série $\sum u_n$ implique la convergence de la série $\sum v_n$.

ii) La convergence de la série $\sum v_n$ implique-t-elle la convergence de la série $\sum u_n$? Justifier.

c) Déterminer une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ converge et la série $\sum v_n$ diverge.

4° Soit α un réel strictement positif, et $a_n = 1 + \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$ où c est un nombre réel tel que pour tout n , a_n soit non nul.

a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et c pour que (p_n) converge vers 0.

b) On suppose que : $\alpha = 1$.

Etudier la convergence de la série $\sum p_n$.

On pourra utiliser, en le démontrant, qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$.

Problème 2. Extrait de X-ENS MP 2024, Maths C

Notations

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , ce que l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geq 0, \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k,$$

et la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geq 0, e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n \geq 0} a_n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N,$$

et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geq 0, R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

1 Lemme de Cesàro

Le but de cette partie est de démontrer le lemme de Cesàro, voir question 1, d'en proposer des applications et d'établir certaines variantes puis des réciproques partielles.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \right). \quad (\text{Cesàro})$$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Applications

2. En utilisant (Cesàro), calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}$. Puis, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $(v_n)_{n \geq 1}$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \alpha$. En utilisant (Cesàro), donner un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Démontrer que le résultat subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = ab.$$

6. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries de nombres complexes, convergentes de sommes respectives

A et B . On note $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des

sommes partielles associées définie par $C_n = \sum_{k=0}^n c_k$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n C_k \right) = AB. \quad (\text{Cauchy})$$

Réciproques partielles

7. Vérifier que la réciproque de (Cesàro) n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monotone} \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right).$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy faible})$$

Indication : on pourra démontrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^n k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k.$$

10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \text{ et } e_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy fort})$$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

(a) Soit $0 \leq n < m$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n) u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) e_j.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leq n < m$, on a

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right).$$

et

$$|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

(c) En déduire (Hardy fort). *Indication : on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.*