

Mathématiques – DS 01– Corrigé

Exercice. 1. On écrit que

$$\begin{aligned}
 \pi\sqrt{n^2+n+1} &= \pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \pi n \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^2 + O\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^3 \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \pi n \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^2} + O\left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2} \right),
 \end{aligned}$$

d'où le résultat avec $\alpha = \frac{3}{8}$.

2. On écrit alors que

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
 &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right),
 \end{aligned}$$

donc

$$\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) = (-1)^{n+1} \frac{3}{8n} + v_n,$$

et

- la série de terme général $(-1)^{n+1} \frac{3}{8n}$ converge par le critère des séries alternées,
- $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison à une série de Riemann, $\sum v_n$ converge absolument donc converge.

Ainsi, $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3. En revanche, le calcul précédent donne que $\left| \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right) \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{8n}$, terme général d'une série divergente, ce qui assure que la série ne converge pas absolument.

Problème 1. Produits infinis

Première partie

1° On pose $a_n = \frac{1}{2}$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $p_n = \frac{1}{2^n}$, qui tend vers 0.

2° Supposons que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\ell} = 1,$$

ce qui signifie que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

3° a) On a $q_n = \frac{p_n}{p_{n_0}}$.

b) Supposons que $\sum \ln(a_n)$ converge. Alors on dispose de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=n_0+1}^n \ln(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi, $\ln\left(\prod_{k=n_0+1}^n a_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

ℓ , donc $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$.

Ainsi, $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_{n_0} e^\ell$.

Attention à ne jamais prendre le ln d'un nombre négatif...

c) On reprend le raisonnement précédent. Si $\ell = -\infty$, $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui signifie que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Si $\ell = +\infty$, $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui signifie que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

4° Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $p > 0$, alors $\sum \ln(a_n)$ converge, donc $\ln(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui signifie que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, comme $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Réciproquement, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, comme $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n=0}^N \ln(a_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $e^\ell > 0$.

5° **Attention, on ne suppose plus (u_n) à termes positifs !**

a) Comme $\sum u_n$ converge, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc on dispose de n_0 , rang à partir duquel $a_{n_0} > 0$.

$$\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2).$$

On écrit alors $a_n = u_n + v_n$, où $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$.

Si $\sum u_n^2$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge. Comme on a supposé que $\sum u_n$ converge aussi, on a $\sum \ln(a_n)$ qui converge, donc (p_n) converge vers $p = p_{n_0} e^\ell \neq 0$, où $\ell = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \ln(a_n)$.

b) Si $\sum u_n^2$ diverge, alors, par le même raisonnement que précédemment, $\sum v_n$ diverge et $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, par comparaison de séries à termes négatifs. Ainsi, comme $\sum u_n$ converge, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \ln(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty.$$

D'où $p_n = p_{n_0} e^{\sum_{k=n_0}^n \ln(a_k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

6° Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $|\ln(a_n)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |u_n|$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \ln(a_n)$ converge absolument, donc converge, donc (p_n) converge et $p = p_{n_0} e^\ell \neq 0$.

Deuxième partie

1. a) Si $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n}$, qui est positif, et $\sum u_n$ diverge, donc, par la question 4, (p_n) diverge (vers $+\infty$).

b) Si $a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$, alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Alors

- $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ est positive et tend vers 0 par croissances comparées. Montrons la décroissance (**elle n'est pas immédiate!!!!**). On pose $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$. Alors f est dérivable et pour tout $t \geq 1$,

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{t} - \frac{\ln(t)}{2\sqrt{t}}}{t} = \frac{2 - \ln(t)}{t^{3/2}},$$

négative à partir de $t = e^2$. Donc $\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Ainsi, par le critère des séries alternées, $\sum u_n$ converge.

- $u_n^2 = \frac{\ln(n)^2}{n} \geq \frac{1}{n}$ donc, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n^2$ diverge.

On en déduit, par la question 5, que (p_n) converge vers 0.

2. Ici, on cherche à déterminer la suite (u_n) . On écrit que

$$u_n = a_n - 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Il s'agit alors de démontrer la convergence ou la divergence de $\sum u_n$. Mais, par croissances comparées, $e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^3}\right)$, donc, par sommation des relations de comparaison,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2n^2}\right),$$

terme général d'une série convergente. Ainsi, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge absolument, donc, par la question 6, (p_n) converge vers $p \neq 0$.

3. a) On remarque que

$$v_n = \frac{u_n}{p_n} = \frac{1 + u_n - 1}{p_n} = \frac{\frac{p_n}{p_{n-1}} - 1}{p_n} = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}.$$

b) i) Supposons que $\sum u_n$ converge. Alors, comme $\sum u_n^2$ converge, par la question 5, (p_n) converge vers $p \neq 0$. Donc $\frac{1}{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}$.

Donc, par le lien suites-séries, $\sum \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}$ converge, donc $\sum v_n$ converge.

ii) Si $\sum v_n$ converge, alors, par le lien suites séries, $\left(\frac{1}{p_n}\right)$ converge. Cependant, il est tout à fait possible que $\frac{1}{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, i.e. que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, comme c'est le cas lorsque $u_n = \frac{1}{n}$.

c) Il faut trouver une suite telle que $\sum u_n$ converge mais pas $\sum u_n^2$. On peut par exemple prendre $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$. Dans ce cas, $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{1}{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par le lien suite-série, $\sum v_n$ diverge.

4. a) On a $u_n = \sin\left(\frac{c}{n^\alpha}\right)$. Alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{n^\alpha}$ et $u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c^2}{n^{2\alpha}}$. Pour que $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il faut :

- ou bien que $\sum u_n$ diverge (vers $-\infty$), ce qui est vrai lorsque $\alpha \leq 1$ et $c < 0$.
- ou bien que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge, ce qui est impossible, étant donnés les deux équivalents trouvés.

Ainsi, la seule possibilité est $\boxed{\alpha \leq 1 \text{ et } c < 0}$.

b) (question très difficile !)

- si $c \geq 0$, alors $\sum p_n$ diverge grossièrement,
- si $c < 0$, alors on écrit que

$$\begin{aligned} \ln(p_n) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{c}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\ln\left(1 + \sin\left(\frac{c}{k}\right)\right) - \frac{c}{k}\right] + cH_n. \end{aligned}$$

Or,

$$\left[\ln\left(1 + \sin\left(\frac{c}{k}\right)\right) - \frac{c}{k}\right] \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{c^3}{6k^3},$$

terme général d'une série absolument convergente, donc $\sum_{k=1}^n \left[\ln\left(1 + \sin\left(\frac{c}{k}\right)\right) - \frac{c}{k}\right]$ tend vers une limite finie ℓ en $+\infty$.

Ensuite, on sait que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$. Ainsi, on peut écrire que

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\ell + c \ln(n) + c\gamma + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\ell + c\gamma}}{n^{-c}},$$

terme général d'une série convergente si et seulement si $c < -1$.

Problème 2. X-ENS MP 2024

1. C'est une question de cours.

- si $\ell \neq 0$ et est réelle, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ell$, terme général d'une série divergente. Par sommation des relations de comparaison, $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n \ell = (n+1)\ell$, ce qui assure que $\sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$. Dans le cas où $\ell \in \mathbb{C}$, on conclut en séparant parties réelle et imaginaire.
- si $\ell = 0$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1)$, terme général d'une série divergente, ce qui assure, par sommation des relations de comparaison, que $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n+1)$, i.e. $\sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.
- si $\ell = +\infty$, alors $1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$, et on conclut de même. Pareil pour $\ell = -\infty$.

2. On sait que $\frac{1}{k} \underset{k \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure, par (Cesàro), que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ensuite, par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$, on a, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t},$$

ce qui assure, pour tout $n \geq 2$, que

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t},$$

en notant $H_n = \ln(n)$. D'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq H_n \leq \ln(n) + 1,$$

d'où, par encadrement, $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

3. On sait que $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \alpha$ donc, par le théorème de Cesàro, on en déduit que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \alpha,$$

ce qui signifie que $\frac{1}{n+1} (u_{n+1} - u_0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha$, i.e. que $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha(n+1)$, ou encore que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$.

La deuxième partie de la question est un peu bête car on a prouvé Cesàro par sommation des relations de comparaison.

4. L'hypothèse signifie que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell)$. le théorème de Cesàro assure que

$$\frac{1}{n+1} \ln(u_{n+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln(\ell),$$

i.e. que $\sqrt[n+1]{u_{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui est le résultat attendu.

Pour $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$, on a $\frac{1}{n+1} \ln(u_{n+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$ par le théorème de Cesàro, et la conclusion est la même.

Ainsi, si $u_n = n!$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui assure que $\sqrt[n]{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De même, si $u_n = \frac{n^n}{n!}$, alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e, \end{aligned}$$

ce qui assure que $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e$.

Remarque : on aurait pu s'en sortir avec l'équivalent de Stirling.

5. Attention ! Là, on ne peut pas immédiatement appliquer le théorème de Cesàro, car on somme sur k des termes dépendant de k et de n .

Là, on revient à des preuves epsilonlesques. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n - a$ et $v_n = b_n - b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (a + u_k) (b + v_{n-k}) = ab + \frac{a}{n} \sum_{k=0}^n v_k + \frac{b}{n} \sum_{k=0}^n u_k + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, le théorème de Cesàro assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n v_k = 0$. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k = 0$.

Ensuite, comme (u_n) et (v_n) sont convergentes, elles sont bornées : on dispose de $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, on dispose de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$ et $|v_n| \leq \varepsilon$. Pour tout $n \geq 2n_0$, on a donc :

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k| |v_{n-k}| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |u_k| |v_{n-k}| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} M \times \varepsilon + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n \varepsilon \times M = M\varepsilon,$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0.$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = 0.$$

$$\text{On conclut donc que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = ab.$$

6. Question difficile aussi. Si on note $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$, alors la question précédente assure que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB.$$

Il faut alors relier la première somme à celle recherchée. On va montrer qu'elles sont égales. On écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k} &= \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n \\ k+\ell=n}} A_k B_\ell \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n \\ k+\ell=n}} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} a_i b_j \\ &= \sum_{\substack{i, j \\ 0 \leq i+j \leq n}} (n - i - j + 1) a_i b_j, \end{aligned}$$

car, à (i, j) fixés, il y a $n - i - j$ couples $(k, n - k)$ tels que $i \leq k$ et $j \leq n - k$.
Mais, de même,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_k &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j=\ell}} a_i b_j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i+j \leq k}} a_i b_j \\ &= \sum_{\substack{i, j \\ 0 \leq i+j \leq n}} (n - i - j + 1) a_i b_j, \end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux termes !

7. On prend $u_n = (-1)^n$.
8. On suppose (u_n) monotone. Par le théorème de la limite monotone, elle tend vers une limite $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. Par le théorème de Cesàro, on a alors $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$. Donc $\ell' = \ell$, d'où le résultat.
9. On suppose que $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et que $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k e_k &= \sum_{k=0}^n k u_{k+1} - k u_k \\ &= \sum_{k=0}^n (k+1) u_{k+1} - k u_k - u_{k+1} \\ &= (n+1) u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} u_k \\ &= n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k e_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

On sait déjà, par hypothèse, que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ensuite, on suppose que $k e_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Par le théorème de

Cesàro, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k e_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ceci assure que $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

10. (a) Il s'agit juste d'un calcul :

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) e_j &= m \sum_{k=n}^{m-1} e_j - \sum_{j=n}^{m-1} j u_{j+1} - j u_j \\ &= m(u_m - u_n) - \sum_{j=n}^{m-1} (j+1) u_{j+1} - j u_j - u_{j+1} \\ &= m u_m - m u_n - m u_m + n u_n + \sum_{j=n}^{m-1} u_j \\ &= (n-m) u_n + \sum_{k=n+1}^m u_k, \end{aligned}$$

d'où l'égalité désirée.

- (b) (une des deux questions techniques) Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $2 \leq n < m$. On remarque que $(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n = \sum_{k=n+1}^m u_k$ donc, d'après la question précédente, $\frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n = \frac{1}{m-n} \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) e_j$ donc

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq \frac{1}{m-n} \sum_{j=n}^{m-1} (m-j) |e_j| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |e_j|.$$

Mais $e_j \underset{j \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{j}\right)$. On dispose donc de $C > 0$ tel que pour tout j dans $\mathbb{N}^*$, $|e_j| \leq \frac{C}{j}$ (ici, comme la suite $\frac{1}{j}$ ne s'annule pas, pas besoin d'inégalité à pcr). Ainsi,

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{C}{j} \leq C \sum_{j=n}^{m-1} (\ln j - \ln(j-1)) = C(\ln(m-1) - \ln(n-1)) = C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right).$$

D'où le résultat désiré. Puis, si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $2 \leq n \leq m-1$,

$$u_n - \ell = u_n - \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} + \frac{(m+1)(\sigma_m - \ell) - (n+1)(\sigma_n - \ell)}{m-n}.$$

donc, d'après ce qui précède :

$$|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (n+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n} \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{(m+1)|\sigma_m - \ell| + (m+1)|\sigma_n - \ell|}{m-n}$$

donc pour tous $n \geq 2$ et $m > n$, $|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)$.

(c) On fixe un $\alpha > 1$. On note $m_n = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$. On a bien alors $m_n > n$. Par la question b,

$$|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m_n-1}{n-1} \right) + \frac{m_n+1}{m_n-n} (|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

Or, $m_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$ donc $\ln \left(\frac{m_n-1}{n-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln \alpha$, $\frac{m_n+1}{m_n-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\alpha-1}$ et $\sigma_{m_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C \ln \left(\frac{m_n-1}{n-1} \right) + \frac{m_n+1}{m_n-n} (|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) = C \ln \alpha.$$

Comme $C \ln \alpha < 2C \ln \alpha$, on dispose donc de $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$C \ln \left(\frac{m_n-1}{n-1} \right) + \frac{m_n+1}{m_n-n} (|\sigma_{m_n} - \ell| + |\sigma_n - \ell|) \leq 2C \ln \alpha \quad \text{donc} \quad |u_n - \ell| \leq 2C \ln \alpha.$$

Finalement, pour $\alpha > 1$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq 2C \ln \alpha$. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\alpha = \exp \left(\frac{\varepsilon}{2C} \right) > 1$, il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - \ell| \leq 2C \ln \alpha = \varepsilon$, ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$