TD 03
Révisions d'algèbre linéaire

1 Exercices classiques

Exercice 1. *Base de polynômes $X^k(1-X)^{n-k}$.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction. La famille $\mathcal{B}$ compte $n+1$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$, qui est de dimension $n+1$: il suffit de montrer qu'elle est libre.
Posons $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Le terme de plus bas degré de P_k est X^k : la valuation de P_k vaut exactement k. La famille est donc *échelonnée en valuation*.
Supposons $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$ avec les λ_k non tous nuls, et soit $k_0 = \min\{k \mid \lambda_k \neq 0\}$. Le terme de plus bas degré de la somme est $\lambda_{k_0} X^{k_0}$, de coefficient $\lambda_{k_0} \neq 0$: la somme ne peut être le polynôme nul. C'est absurde, donc tous les λ_k sont nuls : $\mathcal{B}$ est libre, donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 2. *Matrices de rang 1.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nuls tels que $M = XY^\top$.

Correction. Comme $\mathrm{rg}(M) = 1$, $\mathrm{Im}(M)$ est une droite vectorielle : il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(X)$. Chaque colonne C_j de M appartient à $\mathrm{Im}(M)$, donc s'écrit $C_j = y_j X$ pour un certain $y_j \in \mathbb{K}$. En posant $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, on a bien $M = XY^\top$, et $Y \neq 0$ car $M \neq 0$.

2. En déduire que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)\, M$, puis calculer M^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Correction. On remarque que $Y^\top X$ est un scalaire (matrice 1×1), égal à $\mathrm{Tr}(XY^\top) = \mathrm{Tr}(M)$. Ainsi

$$M^2 = XY^\top XY^\top = X(Y^\top X)Y^\top = (Y^\top X)\, XY^\top = \mathrm{Tr}(M)\, M.$$

Une récurrence immédiate donne alors $\boxed{M^p = \mathrm{Tr}(M)^{p-1}\, M}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que $I_n + M$ est inversible si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$, et déterminer alors son inverse.

Correction. Cherchons un inverse de la forme $I_n + \lambda M$. En utilisant $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$:

$$(I_n + M)(I_n + \lambda M) = I_n + (1+\lambda)M + \lambda M^2 = I_n + \big(1 + \lambda(1 + \mathrm{Tr}(M))\big)M.$$

Premier cas : $\mathrm{Tr}(M) \neq -1$. On choisit $\lambda = -\dfrac{1}{1+\mathrm{Tr}(M)}$, ce qui annule le coefficient de M : $I_n + M$ est inversible, d'inverse

$$(I_n + M)^{-1} = I_n - \frac{1}{1+\mathrm{Tr}(M)}\, M.$$

Second cas : $\mathrm{Tr}(M) = -1$. Alors $M^2 = -M$, donc $M(I_n+M) = 0$. Comme $M \neq 0$, l'application $Y \mapsto (I_n+M)Y$ n'est pas injective (tout vecteur de $\mathrm{Im}(M)$, non nul, est dans $\ker(I_n + M)$) : $I_n + M$ n'est pas inversible.

Exercice 3. *Endomorphismes de trace nulle et matrices à diagonale nulle.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, u(x)\big)$ soit liée. Montrer que u est une homothétie.

Correction. Pour tout $x \neq 0$, $(x, u(x))$ liée fournit $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Montrons que λ_x ne dépend pas de x. Soient x, y libres. De $u(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ et $u(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$ on tire

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)\, x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)\, y = 0,$$

d'où $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$ (car x, y sont libres). Ainsi λ_x est constant sur toute famille libre, donc sur $E \setminus \{0\}$ (deux vecteurs colinéaires non nuls partagent leur scalaire via un troisième vecteur, ou trivialement si $n = 1$). Notons λ cette valeur : $u = \lambda\, \mathrm{Id}_E$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Correction. Récurrence sur n. Pour $n=1$, $\mathrm{Tr}(A)=0$ donne $A=(0)$.
Supposons le résultat au rang $n-1$ et soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle, vue comme un endomorphisme u. Si $A=0$, c'est immédiat. Sinon u n'est pas une homothétie (une homothétie $\lambda\mathrm{Id}$ de trace nulle vérifie $n\lambda=0$, donc $\lambda=0$) ; d'après **1.** (contraposée), il existe x tel que $(x,u(x))$ soit libre. Complétons $(x,u(x))$ en une base de E. Dans cette base, la matrice de u a pour première colonne $(0,1,0,\dots,0)^\top$, donc son coefficient $(1,1)$ est nul, et elle s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix}0 & *\\ * & B\end{pmatrix},\qquad B\in\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(B)=\mathrm{Tr}(A)=0.$$

Par hypothèse de récurrence, B est semblable à une matrice de diagonale nulle ; en appliquant le changement de base correspondant sur les $n-1$ derniers vecteurs, A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 4. ●●○ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f,g des endomorphismes de E tels que $f^2=g^2=\mathrm{Id}_E$ et $f\circ g+g\circ f=0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)=\begin{pmatrix}\mathrm{I}_n & 0\\ 0 & -\mathrm{I}_n\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g)=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}_n\\ \mathrm{I}_n & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 5. *Rang d'une somme.* ●○○ Soit E,F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que

$$\left|\mathrm{rg}f-\mathrm{rg}g\right|\leqslant\mathrm{rg}(f+g)\leqslant\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}g.$$

Correction. **Majoration.** Pour tout x, $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\in\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g$, donc $\mathrm{Im}(f+g)\subset\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g$. Ainsi

$$\mathrm{rg}(f+g)\leqslant\dim(\mathrm{Im}f+\mathrm{Im}g)\leqslant\dim\mathrm{Im}f+\dim\mathrm{Im}g=\mathrm{rg}f+\mathrm{rg}g.$$

Minoration. En appliquant la majoration à $f=(f+g)+(-g)$:

$$\mathrm{rg}f\leqslant\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}(-g)=\mathrm{rg}(f+g)+\mathrm{rg}g,\qquad\text{d'où}\qquad\mathrm{rg}f-\mathrm{rg}g\leqslant\mathrm{rg}(f+g).$$

Par symétrie (échanger f et g), $\mathrm{rg}g-\mathrm{rg}f\leqslant\mathrm{rg}(f+g)$. Donc $\left|\mathrm{rg}f-\mathrm{rg}g\right|\leqslant\mathrm{rg}(f+g)$.

Exercice 6. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, $u\in\mathscr{L}(E)$. u est dit *nilpotent* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $u^k=0$, où $u^k=\underbrace{u\circ\cdots\circ u}_{k\text{ fois}}$.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent. En utilisant la formule du binôme de Newton ou de Bernoulli montrer que $\mathrm{Id}-u$ est inversible.

2. Justifier qu'il existe un plus petit entier p tel que $u^p=0$. Cet entier est appelé *indice de nilpotence* de u.

3. On veut montrer que $p\leqslant n$ (où p est l'indice de nilpotence de u). Pour ce faire, on définit, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $N_k=\ker(u^k)$. Montrer que pour tout entier k, $N_k\subset N_{k+1}$ et que s'il existe k_0 tel que $N_{k_0}=N_{k_0+1}$, alors pour tout $\ell\geqslant k_0$, $N_\ell=N_{\ell+1}$. Conclure.

4. Retrouver le même résultat en démontrant que si x est un vecteur de E qui n'est pas dans $\ker(u^{p-1})$, alors $(x,u(x),\dots,u^{p-1}(x))$ est libre.

5. Un endomorphisme f de $\mathscr{L}(E)$ est dit *ponctuellement nilpotent* si $\forall x\in E,\ \exists k\in\mathbb{N},\ f^k(x)=0$.

(a) Montrer que **si E est de dimension finie**, un endomorphisme ponctuellement nilpotent de E est nilpotent.

Correction. Soit f un endomorphisme ponctuellement nilpotent. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, soient $k_1,\dots,k_n$ n entiers tels que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $f^{k_i}(e_i)=0$. Posons $k=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}k_i$. Soit $x\in E$, $(x_1,\dots,x_n)$ n réels tels que $x=\sum\limits_{i=1}^n x_ie_i$. Alors

$$f^k(x)=f^k\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^n x_if^k(e_i)=0.$$

Donc $f^k=0$, donc f est nilpotente.

(b) Montrer que le résultat est faux si l'on ne suppose plus E de dimension finie (on exhibera un contre-exemple dans $\mathbb{K}[X]$).

Correction. Soit D l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$. Alors si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré d, $D^{d+1}(P) = 0$. Mais D n'est pas nilpotent. Si c'était le cas, on aurait $k \in \mathbb{N}$ tel que $D^k = 0$. Mais $D^k(X^k) = k! \neq 0$.

Exercice 7. ●●◐ Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u_1, \dots, u_n$ n endomorphismes nilpotents vérifiant : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$. Calculer $u_1 \circ \cdots \circ u_n$.

Correction. On montre par récurrence sur la dimension que ce produit est nul.
Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: $\forall (u_1, \dots, u_n)$ nilpotents tels que $\forall\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ u_i \circ u_j = u_j \circ u_i,\ u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
L'**Initialisation** est évidente car un endomorphisme u_1 nilpotent en dimension 1 vérifie $u_1^1 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, i.e. $u_1 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie aux rangs $1, 2, \dots, n$. Soient E un $\mathbb{K}$-evdf $n+1$, $u_1, \dots, u_{n+1}$, $n+1$ endomorphismes nilpotents commutant deux à deux. Alors

- comme u_{n+1} est nilpotent, il n'est pas inversible, donc $\mathrm{Im}(u_{n+1})$ est de dimension $p < n+1$,
- $u_1, \dots, u_n$ stabilisent tous $\mathrm{Im}(u_{n+1})$: on peut noter $v_1, \dots, v_n$ leurs induits sur $\mathrm{Im}(u_{n+1})$,
- pour tous i, j dans $[\![1,n]\!]$, $u_i^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc $v_i^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{Im}(u_{n+1}))}$, et $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$, donc $v_i \circ v_j = v_j \circ v_i$.

Ceci qui assure que $v_1, \dots, v_n$ sont nilpotents, commutent deux à deux, et sont des endomorphismes d'un espace de dimension $p \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, $v_1 \circ \cdots \circ v_p = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{Im}(u_{n+1}))}$, donc $v_1 \circ \cdots \circ v_n$ aussi.
Ainsi, si $x \in E$, comme $u_{n+1}(x) \in \mathrm{Im}(u_{n+1})$,

$$\begin{aligned} u_1 \circ \cdots \circ u_n \circ u_{n+1}(x) & \\ &= u_1 \circ \cdots \circ u_{n-1} \circ v_n(u_{n+1}(x)) \\ &= \dots \\ &= v_1 \circ \cdots \circ v_n(u_{n+1}(x)) = 0_E, \end{aligned}$$

donc $u_1 \circ \cdots \circ u_{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, ce qui assure l'hérédité et le résultat.

Exercice 8. ●●◐

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Correction. Si f est une homothétie, on dispose de λ tel que pour tout x de E, $f(x) = \lambda x$, donc $(x, f(x))$ est liée.
Si pour tout x de E, $(x, f(x))$ est liée, pour tout x de E non nul on dispose de λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Soient alors $x \neq y$ deux éléments de E non nuls. On a alors $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$.

- Si x et y sont colinéaires, alors on dispose de μ non nul tel que $y = \mu x$, donc $f(y) = \mu\lambda_x x$, et $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$. Comme y est non nul, $\mu\lambda_x = \lambda_y \mu$, et comme $\mu \neq 0$, $\lambda_x = \lambda_y$.
- Si x et y ne sont pas colinéaires, la famille (x, y) est libre. Or $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$ d'une part, et $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y)$ d'autre part. Donc

  $$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

  donc, comme la famille (x, y) est libre, $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc pour tous x, y dans E, $\lambda_x = \lambda_y$. Donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout x de E, $f(x) = \lambda x$, donc f est une homothétie.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Correction.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ dont A est la matrice dans la base canonique.
Si f est une homothétie, alors $A = \lambda I_n$, donc, comme $\mathrm{Tr}(A) = 0$, $n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et A est nulle.
Si f n'est pas une homothétie, alors par la question précédente on dispose de x tel que $(x, f(x))$ est libre. Complétons cette famille en une base de $\mathbb{R}^n$. Alors la matrice de A dans cette base (au départ et à l'arrivée)

est

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

où B est une matrice de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, de trace nulle ! Ceci nous encourage à démontrer le résultat par récurrence sur n la taille de la matrice !

Initialisation. Pour $n = 1$ le résultat est trivial puisque la seule matrice qui convienne est la matrice nulle.

Hérédité. Supposons la proposition vraie pour un certain n et soit A de taille $n+1$. Par la question précédente, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec B de trace nulle. Donc B est semblable à une matrice M de trace nulle par hypothèse de récurrence, i.e. il existe P inversible telle que $M = P^{-1}BP$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P \\ 0 & \end{pmatrix}$. Par les règles de calcul par blocs, Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix}$, et

$$Q^{-1}\begin{pmatrix} 0 & (a_i) \\ 1 & \\ (0) & B \\ 0 & \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 & (a_i) \\ 0 & \\ (0) & P^{-1}B \\ 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (b_i) \\ 1 & \\ (0) & M \\ 0 & \end{pmatrix},$$

où $(b_2 \cdots b_{+1}) = (a_2 \cdots a_{n+1}) \times P$. Donc A est semblable à une matrice de trace nulle et le résultat est démontré.

Exercice 9. *Mines-Télécom 23 et 22, Mines MP 15*. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}^*$ soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par : $A_{i,i} = a; A_{i,j} = b$ pour $j > i$ et $A_{i,j} = c$ pour $i > j$. Soit J la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 . Montrer que $\det(xJ + A)$ est un polynôme de degré au plus 1 . En déduire $\det(A)$.

Correction. On considère $\det(xJ + A)$ et on fait les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour i dans $[\![2, n]\!]$. On obtient alors le déterminant d'une matrice où les x sont tous sur la première ligne. En développant ensuite selon la première ligne, $\det(xJ + A)$ est bien polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

Appelons $f(x) = \det(xJ + A)$. On cherche $f(0)$. Comme f est affine, il suffit de connaître deux valeurs prises par f : f est de la forme $f(x) = px + q$. Or,

$$f(-c) = \begin{vmatrix} a-c & & & \\ & a-c & (0) & \\ & ((b-c) & \ddots & \\ & & & a-c \end{vmatrix} = (a-c)^n.$$

De même, $f(-b) = (a-b)^n$. On en déduit, **EN SUPPOSANT** $b \neq c$,

$$\begin{aligned} p &= \frac{f(-b) - f(-c)}{-b+c} \\ &= \frac{(a-b)^n - (a-c)^n}{c-b} \\ &= \frac{(a-b-b-c)\sum_{i=0}^{n-1}(a-b)^i(a-c)^{n-1-i}}{c-b} \\ &= \boxed{\sum_{i=0}^{n-1}(a-b)^i(a-c)^{n-1-i}.} \end{aligned}$$

Ensuite,

$$q = \det(A) = f(c) + pc = (a-c)^n + c\sum_{i=0}^{n-1}(a-b)^i(a-c)^{n-1-i}.$$

Maintenant, si $c = b$, on fait tendre, dans $\det(A)$, b vers c. Mais **le déterminant est une expression polynomiale en les coefficients**, donc est **continue**. On en déduit que, si $b = c$,

$$\det(A) = (a-c)^n + cn(a-c)^{n-1} = (a+(n-1)c)(a-c)^{n-1}.$$

Exercice 10. $\mathbb{R}$*-similitude et* $\mathbb{C}$*-similitude.* ●●○ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. Écrivons $P = P_1 + iP_2$ avec $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La relation $B = P^{-1}AP$ équivaut à $PB = AP$, soit

$$(P_1 + iP_2)B = A(P_1 + iP_2).$$

Comme A, B sont réelles, en séparant parties réelle et imaginaire :

$$P_1B = AP_1 \qquad \text{et} \qquad P_2B = AP_2. \tag{$\star$}$$

Considérons $\varphi(t) = \det(P_1 + tP_2)$, fonction polynomiale de $t \in \mathbb{R}$. Elle n'est pas identiquement nulle : vue comme polynôme à coefficients complexes, elle vérifie $\varphi(i) = \det(P_1 + iP_2) = \det(P) \neq 0$. Un polynôme non nul n'ayant qu'un nombre fini de racines, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) \neq 0$, c'est-à-dire $Q := P_1 + t_0P_2 \in GL_n(\mathbb{R})$.
Par combinaison linéaire de $(\star)$, $QB = (P_1 + t_0P_2)B = A(P_1 + t_0P_2) = AQ$, d'où $B = Q^{-1}AQ$ avec $Q \in GL_n(\mathbb{R})$: A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

2 Espaces vectoriels et applications linéaires

Exercice 11. *Base de polynômes* $(X + a_i)^n$. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille $\left((X + a_i)^n\right)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Correction. La famille compte $n+1$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ (de dimension $n+1$) : montrons qu'elle est libre. Supposons

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X + a_i)^n = 0.$$

Par la formule du binôme, $(X + a_i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_i^{n-k} X^k$. En identifiant le coefficient de X^k (pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$) et en simplifiant par $\binom{n}{k} \neq 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, a_i^{n-k} = 0, \qquad \text{soit} \qquad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \, a_i^m = 0 \quad \text{pour tout } m \in [\![0, n]\!].$$

C'est un système linéaire en $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ de matrice $\left(a_i^m\right)$, une matrice de Vandermonde inversible car les a_i sont deux à deux distincts. Donc tous les λ_i sont nuls : la famille est libre, c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 12. *Familles libres de fonctions.* ●○○ On travaille dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles suivantes sont libres.

1. $\big(x \mapsto |x-a|\big)_{a\in\mathbb{R}}$.

> **Correction.** Il suffit de montrer que toute sous-famille finie est libre. Soient $a_1 < \cdots < a_p$ distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $f = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j |\cdot - a_j|$ soit la fonction nulle. La fonction f est affine par morceaux, dérivable sauf aux a_j, et en chaque a_k la pente subit un saut
> $$f'(a_k^+) - f'(a_k^-) = 2\lambda_k$$
> (car $|\cdot - a_k|$ a une pente qui passe de -1 à $+1$ en a_k, les autres termes étant dérivables en a_k). Comme $f \equiv 0$, tous ces sauts sont nuls, donc $\lambda_k = 0$ pour tout k.

2. $\big(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\big)_{\alpha\in\mathbb{R}}$.

> **Correction.** Soient $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathrm{e}^{\alpha_j x} = 0$ pour tout x. Divisons par $\mathrm{e}^{\alpha_p x}$:
> $$\sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \, \mathrm{e}^{(\alpha_j - \alpha_p)x} + \lambda_p = 0.$$
> Chaque exposant $\alpha_j - \alpha_p$ ($j < p$) est strictement négatif, donc en faisant $x \to +\infty$ tous ces termes tendent vers 0 : il reste $\lambda_p = 0$. On recommence avec les $p-1$ termes restants (récurrence descendante) : tous les λ_j sont nuls. *Le même argument, via les dérivées successives ou une équation différentielle linéaire, vaut pour des $\alpha_j \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.*

Exercice 13. *Rang d'une famille trigonométrique.* ●○○ Déterminer le rang, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, de la famille $(f_1, \dots, f_5)$ définie par
$$f_1 : x \mapsto 1, \quad f_2 : x \mapsto \sin x, \quad f_3 : x \mapsto \sin^2 x, \quad f_4 : x \mapsto \cos^2 x, \quad f_5 : x \mapsto \cos 2x.$$

> **Correction.** On dispose de deux relations : $f_3 + f_4 = f_1$ (car $\sin^2 + \cos^2 = 1$) et $f_5 = f_4 - f_3$ (car $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$). Ainsi f_1 et f_5 appartiennent à $\mathrm{Vect}(f_3, f_4)$, donc
> $$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_5) = \mathrm{Vect}(f_2, f_3, f_4).$$
> Montrons que (f_2, f_3, f_4) est libre. Supposons $a\sin x + b\sin^2 x + c\cos^2 x = 0$ pour tout x.
> - En $x = 0$: $c = 0$.
> - Il reste $a\sin x + b\sin^2 x = 0$. En $x = \frac{\pi}{2}$: $a + b = 0$; en $x = \frac{\pi}{6}$: $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b = 0$, soit $2a + b = 0$.
>
> Ce système donne $a = b = c = 0$: la famille (f_2, f_3, f_4) est libre. Le rang cherché est donc $\boxed{3}$.

Exercice 14. *Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.* ●○○ Soit $F = \big\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n\big\}$.

1. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que $\Psi : u \mapsto (u_0, u_1)$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{C}^2$. En déduire $\dim F$.

> **Correction.** F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: il contient la suite nulle et est stable par combinaison linéaire (la relation de récurrence est linéaire). L'application $\Psi : F \to \mathbb{C}^2$, $u \mapsto (u_0, u_1)$, est clairement linéaire.
> - *Injectivité :* si $u_0 = u_1 = 0$, la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ donne par récurrence $u_n = 0$ pour tout n.
> - *Surjectivité :* pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la suite définie par $u_0 = a$, $u_1 = b$ et la relation de récurrence est dans F et vérifie $\Psi(u) = (a, b)$.
>
> Donc Ψ est un isomorphisme et $\dim F = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.

2. En déduire une base de F formée de suites géométriques.

> **Correction.** Une suite géométrique $(r^n)_n$ (avec $r \neq 0$) appartient à F ssi $r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$ pour tout n, soit $r^2 = r + 1$. Les racines sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, distinctes. Les suites (φ^n) et (ψ^n) sont donc dans F ; elles sont libres (deux suites géométriques de raisons distinctes le sont), et forment donc une base de F puisque $\dim F = 2$.

Exercice 15. *Caractérisation de $E = \mathrm{Im}f \oplus \ker f$.* ●○○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois assertions :

$$\text{(i) } E = \mathrm{Im}f \oplus \ker f \qquad \text{(ii) } \mathrm{Im}f^2 = \mathrm{Im}f \qquad \text{(iii) } \ker f^2 = \ker f.$$

Correction. On a toujours les inclusions $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$ et $\ker f \subset \ker f^2$.
(ii) $\iff$ (iii). Par le théorème du rang, $\dim\ker f = \dim E - \mathrm{rg}f$ et $\dim\ker f^2 = \dim E - \mathrm{rg}f^2$. Ainsi $\mathrm{Im}f^2 = \mathrm{Im}f \iff \mathrm{rg}f^2 = \mathrm{rg}f \iff \dim\ker f^2 = \dim\ker f \iff \ker f^2 = \ker f$ (compte tenu des inclusions).
(i)⇒(iii). Soit $x \in \ker f^2$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}f$ et $f\big(f(x)\big) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0\}$. Ainsi $f(x) = 0$, i.e. $x \in \ker f$. D'où $\ker f^2 = \ker f$.
(iii)⇒(i). Soit $y \in \mathrm{Im}f \cap \ker f$: écrivons $y = f(x)$. Comme $y \in \ker f$, $f^2(x) = 0$, donc $x \in \ker f^2 = \ker f$, d'où $y = f(x) = 0$. Ainsi $\mathrm{Im}f \cap \ker f = \{0\}$, et comme $\dim\mathrm{Im}f + \dim\ker f = \dim E$ (théorème du rang), la somme est directe et égale à E.

Exercice 16. *Noyau et image d'une composée.* ●○○ Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que $\ker(g\circ f) = \ker f \iff \ker g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$.

Correction. On a toujours $\ker f \subset \ker(g\circ f)$. De plus, $x \in \ker(g\circ f) \iff f(x) \in \ker g$, c'est-à-dire $f(x) \in \ker g \cap \mathrm{Im}f$.
(⇐) Si $\ker g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$: pour $x \in \ker(g\circ f)$, $f(x) \in \ker g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$, donc $f(x) = 0$ et $x \in \ker f$. D'où l'égalité.
(⇒) Supposons $\ker(g\circ f) = \ker f$. Soit $y \in \ker g \cap \mathrm{Im}f$, écrivons $y = f(x)$. Alors $g(f(x)) = g(y) = 0$, donc $x \in \ker(g\circ f) = \ker f$, d'où $y = f(x) = 0$. Ainsi $\ker g \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Im}g \iff \ker g + \mathrm{Im}f = F$.

Correction. On a toujours $\mathrm{Im}(g\circ f) = g(\mathrm{Im}f) \subset g(F) = \mathrm{Im}g$.
(⇐) Si $F = \mathrm{Im}f + \ker g$, alors $g(F) = g(\mathrm{Im}f) + g(\ker g) = g(\mathrm{Im}f)$, donc $\mathrm{Im}g = \mathrm{Im}(g\circ f)$.
(⇒) Supposons $g(\mathrm{Im}f) = g(F)$. Soit $y \in F$: $g(y) \in g(\mathrm{Im}f)$, donc il existe $a \in \mathrm{Im}f$ avec $g(y) = g(a)$, d'où $y - a \in \ker g$ et $y = a + (y-a) \in \mathrm{Im}f + \ker g$. Ainsi $F = \mathrm{Im}f + \ker g$.

Exercice 17. *Sous-espaces stables par un endomorphisme qui commute.* ◐○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes qui commutent. Montrer que $\ker u$ et $\mathrm{Im}u$ sont stables par v.

Correction. *Stabilité de* $\ker u$ *:* soit $x \in \ker u$, donc $u(x) = 0$. Alors

$$u\big(v(x)\big) = (u\circ v)(x) = (v\circ u)(x) = v\big(u(x)\big) = v(0) = 0,$$

donc $v(x) \in \ker u$.
Stabilité de $\mathrm{Im}u$ *:* soit $y \in \mathrm{Im}u$, écrivons $y = u(x)$. Alors

$$v(y) = v\big(u(x)\big) = (v\circ u)(x) = (u\circ v)(x) = u\big(v(x)\big) \in \mathrm{Im}u.$$

Exercice 18. *Somme directe d'images.* ●○○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g\circ f = 0$ et $f + g \in GL(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g = \dim E$ et que $E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}g$.

Correction. Notons $n = \dim E$.
Une inclusion. $g\circ f = 0$ signifie $\mathrm{Im}f \subset \ker g$, d'où $\mathrm{rg}f \leqslant \dim\ker g = n - \mathrm{rg}g$, soit

$$\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g \leqslant n. \tag{1}$$

Une minoration. Pour tout x, $(f+g)(x) \in \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$, donc $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$. Or $f+g$ est bijectif, donc $\mathrm{Im}(f+g) = E$, d'où $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ et

$$n = \dim(\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g) \leqslant \mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g. \tag{2}$$

De (1) et (2), $\mathrm{rg}f + \mathrm{rg}g = n$. Comme $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$ avec $\dim\mathrm{Im}f + \dim\mathrm{Im}g = n = \dim E$, la somme est directe : $E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Im}g$.

Exercice 19. *Un endomorphisme vérifiant* $\ker f = \mathrm{Im}f$. ●○○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker f = \mathrm{Im}f$ si et seulement si n est pair.

Correction. **(⇒)** Si $\ker f = \mathrm{Im} f$, le théorème du rang donne $n = \dim\ker f + \dim\mathrm{Im} f = 2\dim\mathrm{Im} f$, donc n est pair.
(⇐) Supposons $n = 2m$ et fixons une base $(e_1, \dots, e_{2m})$ de E. Définissons f par

$$f(e_i) = e_{m+i} \ \ (1 \leqslant i \leqslant m), \qquad f(e_{m+i}) = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_{2m})$ et $\ker f = \mathrm{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_{2m})$, donc $\ker f = \mathrm{Im} f$.

Exercice 20. *Inégalités de Sylvester et de Frobenius.* ●●● Soit E, F, G des espaces vectoriels de dimension finie.

1. (Sylvester) Soit $g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g - \dim F \ \leqslant \ \mathrm{rg}(f \circ g) \ \leqslant \ \min(\mathrm{rg} f, \mathrm{rg} g).$$

Correction. *Majoration.* $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im} f$ donne $\mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg} f$; et $\mathrm{rg}(f \circ g) = \dim f(\mathrm{Im} g) \leqslant \dim\mathrm{Im} g = \mathrm{rg} g$.
Minoration. Notons $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\mathrm{Im} g$. Le théorème du rang appliqué à $\widetilde{f} : \mathrm{Im} g \to G$ donne

$$\mathrm{rg}(f \circ g) = \dim f(\mathrm{Im} g) = \dim\mathrm{Im} g - \dim(\ker f \cap \mathrm{Im} g) = \mathrm{rg} g - \dim(\ker f \cap \mathrm{Im} g).$$

Or $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im} g) \leqslant \dim\ker f = \dim F - \mathrm{rg} f$, d'où $\mathrm{rg}(f \circ g) \geqslant \mathrm{rg} g - (\dim F - \mathrm{rg} f) = \mathrm{rg} f + \mathrm{rg} g - \dim F$.

2. (Frobenius) Soit $h \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, $f \in \mathcal{L}(G, H)$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f \circ g) + \mathrm{rg}(g \circ h) \leqslant \mathrm{rg} g + \mathrm{rg}(f \circ g \circ h).$$

Correction. D'après le calcul précédent, $\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg} v - \dim(\ker u \cap \mathrm{Im} v)$ pour toutes applications composables u, v. Appliqué à $f \circ (g \circ h)$ et à $f \circ g$:

$$\mathrm{rg}(f \circ g \circ h) = \mathrm{rg}(g \circ h) - \dim\big(\ker f \cap \mathrm{Im}(g \circ h)\big),$$
$$\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg} g - \dim\big(\ker f \cap \mathrm{Im} g\big).$$

Comme $\mathrm{Im}(g \circ h) \subset \mathrm{Im} g$, on a $\dim(\ker f \cap \mathrm{Im}(g \circ h)) \leqslant \dim(\ker f \cap \mathrm{Im} g)$, donc

$$\mathrm{rg}(f \circ g \circ h) \geqslant \mathrm{rg}(g \circ h) - \dim(\ker f \cap \mathrm{Im} g) = \mathrm{rg}(g \circ h) - \big(\mathrm{rg} g - \mathrm{rg}(f \circ g)\big),$$

ce qui est exactement l'inégalité annoncée.

3 Matrices

Exercice 21. *Puissances via un polynôme annulateur.* ◐○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

1. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_n.

Correction. De $A^2 - 3A + 2I_n = 0$ on tire $2I_n = 3A - A^2 = A(3I_n - A)$, d'où

$$A \cdot \frac{1}{2}(3I_n - A) = I_n, \qquad \text{donc} \qquad A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_n - A).$$

2. Montrer qu'il existe deux suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = a_p A + b_p I_n$, et les expliciter.

Correction. Le polynôme annulateur se factorise : $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Écrivons la division euclidienne

$$X^p = (X-1)(X-2)Q_p(X) + a_p X + b_p.$$

En évaluant en 1 puis en 2 : $1 = a_p + b_p$ et $2^p = 2a_p + b_p$, d'où

$$a_p = 2^p - 1, \qquad b_p = 2 - 2^p.$$

Comme $(A - I_n)(A - 2I_n) = A^2 - 3A + 2I_n = 0$, l'identité polynomiale passe aux matrices :

$$\boxed{A^p = (2^p - 1)A + (2 - 2^p)I_n.}$$

On vérifie que la formule reste valable pour $p = 0$ et pour $p = -1$ (avec l'inverse trouvé plus haut).

Exercice 22. *Matrices à diagonale strictement dominante.* ●○○ Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Correction. Montrons que $\ker(A) = \{0\}$. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \ker(A)$ et supposons $X \neq 0$. Soit i un indice tel que $|x_i| = \max_k |x_k| > 0$. La i-ème ligne du système $AX = 0$ s'écrit

$$a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j.$$

En passant aux modules et en majorant $|x_j| \leqslant |x_i|$:

$$|a_{i,i}|\,|x_i| \leqslant \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,|x_j| \leqslant |x_i| \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|\,|x_i|,$$

la dernière inégalité venant de l'hypothèse et de $|x_i| > 0$. C'est absurde. Donc $X = 0$, $\ker(A) = \{0\}$ et A est inversible.

Exercice 23. *Un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.* ●◐○ Soit $n \geqslant 2$ et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que pour tous $i \neq j$, $H \cap \mathrm{Vect}(I_n, E_{i,j}) \neq \{0\}$, où $(E_{i,j})$ désigne la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction. Comme $i \neq j$, $E_{i,j}$ n'est pas colinéaire à I_n, donc $\dim\mathrm{Vect}(I_n, E_{i,j}) = 2$. Par la formule de Grassmann, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n^2 :

$$\dim\big(H \cap \mathrm{Vect}(I_n, E_{i,j})\big) \geqslant \dim H + 2 - n^2 = (n^2 - 1) + 2 - n^2 = 1 > 0.$$

L'intersection est donc non réduite à $\{0\}$.

2. En déduire que H contient une matrice inversible.

Correction. D'après la question précédente, pour tous $i \neq j$ il existe $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}) \neq (0,0)$ tel que $\alpha_{i,j}I_n + \beta_{i,j}E_{i,j} \in H$.
Premier cas : il existe $i \neq j$ avec $\alpha_{i,j} \neq 0$. Alors, en divisant par $\alpha_{i,j}$, la matrice $I_n + tE_{i,j} \in H$ (avec $t = \beta_{i,j}/\alpha_{i,j}$). C'est une transvection, de déterminant 1 : elle est inversible.
Second cas : $\alpha_{i,j} = 0$ pour tous $i \neq j$. Alors $\beta_{i,j} \neq 0$, donc $E_{i,j} \in H$ pour tous $i \neq j$. En particulier H contient la matrice de permutation circulaire

$$C = E_{1,2} + E_{2,3} + \cdots + E_{n-1,n} + E_{n,1},$$

qui est inversible (matrice du cycle $(1\,2\,\cdots\,n)$, de déterminant ± 1).
Dans tous les cas, H contient une matrice inversible.

Exercice 24. *L'identité n'est pas un commutateur.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $AB - BA = I_n$.

Correction. Supposons qu'un tel couple existe. En prenant la trace et en utilisant $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$:

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0,$$

alors que $\mathrm{Tr}(I_n) = n \neq 0$. C'est absurde : un tel couple n'existe pas.

2. En déduire que si E est un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors $f \circ g - g \circ f \neq \mathrm{Id}_E$.

Correction. En représentant f et g par leurs matrices A et B dans une base de E, la relation $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$ équivaudrait à $AB - BA = I_n$ (où $n = \dim E$), ce qui est impossible d'après la question précédente. *Remarque : ce résultat tombe en défaut en dimension infinie, par exemple sur $\mathbb{K}[X]$ avec les opérateurs $P \mapsto XP$ et $P \mapsto P'$.*

Exercice 25. *Équation matricielle $M + M^\top = \mathrm{Tr}(M)A$.* ●◐○ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation

$$M + M^\top = \mathrm{Tr}(M)\,A. \tag{E}$$

Correction. Écrivons $M = S + K$ avec $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ symétrique et $K = \frac{1}{2}(M - M^\top)$ antisymétrique. Comme $\mathrm{Tr}(K) = 0$, on a $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(S)$ et $M + M^\top = 2S$, si bien que (E) équivaut à

$$2S = \mathrm{Tr}(S)\, A. \qquad (\star)$$

En prenant la trace de $(\star)$: $2\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{Tr}(S)\mathrm{Tr}(A)$, soit $\mathrm{Tr}(S)\big(2 - \mathrm{Tr}(A)\big) = 0$.
Cas 1 : A n'est pas symétrique, ou $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, alors $\mathrm{Tr}(S) = 0$, donc $(\star)$ donne $S = 0$. Si A n'est pas symétrique, comme S l'est, l'égalité $2S = \mathrm{Tr}(S)A$ impose $\mathrm{Tr}(S) = 0$ (sinon $A = \frac{2}{\mathrm{Tr}(S)}S$ serait symétrique), donc à nouveau $S = 0$. Dans les deux cas $M = K$ est antisymétrique quelconque, et réciproquement toute matrice antisymétrique convient (les deux membres de (E) sont nuls). L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top = -M\}.$$

Cas 2 : A symétrique et $\mathrm{Tr}(A) = 2$. Alors $(\star)$ s'écrit $2S = \mathrm{Tr}(S)A$. En posant $\lambda = \mathrm{Tr}(S)$, on obtient $S = \frac{\lambda}{2}A$, et réciproquement $\mathrm{Tr}\big(\frac{\lambda}{2}A\big) = \frac{\lambda}{2}\mathrm{Tr}(A) = \lambda$: tout $\lambda \in \mathbb{R}$ convient. Les solutions sont

$$M = \mu A + K, \qquad \mu \in \mathbb{R},\ K \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire l'espace $\mathbb{R}A \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, de dimension $1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 26. *Matrices scalaires et trace de $M \mapsto AM$.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$ pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction. Une telle matrice commute en particulier avec chaque $E_{i,j}$. Or $AE_{i,j}$ a pour seule colonne non nulle la j-ème (égale à la i-ème colonne de A), tandis que $E_{i,j}A$ a pour seule ligne non nulle la i-ème (égale à la j-ème ligne de A). L'égalité $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ pour tous i, j impose : $a_{k,i} = 0$ pour $k \neq i$ (coefficients hors diagonale nuls) et $a_{i,i} = a_{j,j}$ (coefficients diagonaux égaux). Donc $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Réciproquement, les matrices scalaires commutent avec toutes les matrices. L'ensemble cherché est $\{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A : M \mapsto AM$. Vérifier que $\varphi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ et montrer que $\mathrm{Tr}(\varphi_A) = n\,\mathrm{Tr}(A)$.

Correction. La linéarité de φ_A est immédiate. Calculons sa trace dans la base $(E_{i,j})$. On a

$$\varphi_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, E_{k,j}.$$

Le coefficient diagonal correspondant à $E_{i,j}$ (c'est-à-dire celui de $E_{i,j}$ dans cette décomposition) est $a_{i,i}$. Donc

$$\mathrm{Tr}(\varphi_A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Tr}(A) = n\,\mathrm{Tr}(A).$$

Exercice 27. *Endomorphisme nilpotent d'indice 2.* ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\,u = r \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}\,u \subset \ker u$, puis que $2r \leqslant n$.

Correction. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, $u\big(u(x)\big) = u^2(x) = 0$, donc $u(x) \in \ker u$: ainsi $\mathrm{Im}\,u \subset \ker u$. En passant aux dimensions et via le théorème du rang :

$$r = \dim \mathrm{Im}\,u \leqslant \dim \ker u = n - r, \qquad \text{d'où} \qquad 2r \leqslant n.$$

2. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(bloc de taille $2r$, complété par des lignes et colonnes nulles si $2r < n$).

Correction. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans $\mathbb{K}^n$; alors $\dim G = n - \dim\ker u = \operatorname{rg} u = r$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ une base de G. La restriction de u à G est injective (car $G \cap \ker u = \{0\}$), donc $(u(\varepsilon_1), \dots, u(\varepsilon_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$. Posons $a_i = u(\varepsilon_i)$.
Comme $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, on complète $(a_1, \dots, a_r)$ en une base $(a_1, \dots, a_r, w_1, \dots, w_{n-2r})$ de $\ker u$. Alors

$$\mathcal{B} = (a_1, \dots, a_r,\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r,\ w_1, \dots, w_{n-2r})$$

est une base de $\mathbb{K}^n$. Or $u(a_i) = u^2(\varepsilon_i) = 0$, $u(\varepsilon_i) = a_i$ et $u(w_j) = 0$. Dans $\mathcal{B}$, seules les colonnes des ε_i sont non nulles (le vecteur a_i en position i) : la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur les $2r$ premiers vecteurs, bordée de zéros. Lorsque $n = 2r$, on obtient exactement cette matrice.

Exercice 28. *Trace nulle et commutateurs.* ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle si et seulement s'il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = AB - BA$.

Correction. **(⇐)** $\operatorname{Tr}(AB - BA) = \operatorname{Tr}(AB) - \operatorname{Tr}(BA) = 0$.
(⇒) Supposons $\operatorname{Tr}(M) = 0$. On sait qu'alors M est semblable à une matrice N de diagonale nulle : $M = PNP^{-1}$. Si l'on montre que $N = A'B' - B'A'$, alors $M = (PA'P^{-1})(PB'P^{-1}) - (PB'P^{-1})(PA'P^{-1})$ est encore un commutateur ; il suffit donc de traiter le cas où $M = N$ est à diagonale nulle.
Posons $D = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$, dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts (caractéristique nulle). Pour $X = (x_{i,j})$, on a $(DX - XD)_{i,j} = (i - j)\, x_{i,j}$. Choisissons X défini par $x_{i,i} = 0$ et, pour $i \neq j$, $x_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{i - j}$ (licite car $i - j \neq 0$). Alors $DX - XD = N$ (les termes diagonaux coïncident car N est à diagonale nulle). Donc $N = DX - XD$ est un commutateur, et M aussi.

Exercice 29. *Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes.* ●●● Soit $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. On note $\mathcal{N}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes. Montrer que $\mathcal{N}$ est exactement l'ensemble des matrices de trace nulle.

Correction. **$\mathcal{N} \subset \{\operatorname{Tr} = 0\}$.** Une matrice nilpotente a toutes ses valeurs propres nulles, donc une trace nulle. L'ensemble des matrices de trace nulle étant un sous-espace vectoriel, il contient $\mathcal{N}$.
$\{\operatorname{Tr} = 0\} \subset \mathcal{N}$. L'espace des matrices de trace nulle, de dimension $n^2 - 1$, est engendré par les $E_{i,j}$ $(i \neq j)$ et les $E_{i,i} - E_{j,j}$.

- Pour $i \neq j$, $E_{i,j}$ est nilpotente ($E_{i,j}^2 = 0$), donc $E_{i,j} \in \mathcal{N}$.
- Montrons que $E_{i,i} - E_{j,j} \in \mathcal{N}$. Sur le bloc porté par les indices i, j, on cherche $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = N_1 + N_2$ avec N_1, N_2 nilpotentes. Les matrices

$$N_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad N_2 = H - N_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

  sont de trace et de déterminant nuls, donc nilpotentes. En complétant par des zéros hors du bloc $\{i, j\}$, on obtient deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la somme est $E_{i,i} - E_{j,j}$, qui est donc dans $\mathcal{N}$.

Ainsi $\{\operatorname{Tr} = 0\} \subset \mathcal{N}$, d'où l'égalité (et $\dim \mathcal{N} = n^2 - 1$).

Exercice 30. *Endomorphisme vérifiant $f^2 + af + b\,\mathrm{Id} = 0$ avec $a^2 - 4b < 0$.* ●●● Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 + af + b\,\mathrm{Id}_E = 0$, où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a^2 - 4b < 0$.

1. Montrer que pour tout $x \neq 0_E$, la famille $(x, f(x))$ est libre, et que $\operatorname{Vect}(x, f(x))$ est un plan stable par f.

   Correction. Si $(x, f(x))$ était liée, on aurait $f(x) = \lambda x$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, d'où $f^2(x) = \lambda^2 x$ et $(\lambda^2 + a\lambda + b)x = 0$, donc $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. Or ce trinôme a un discriminant $a^2 - 4b < 0$: pas de racine réelle, contradiction. Donc $(x, f(x))$ est libre.
   De plus $f(x) \in P$ et $f(f(x)) = -af(x) - bx \in P$ (relation $f^2 = -af - b\,\mathrm{Id}$), donc $P = \operatorname{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.

2. Montrer que n est pair et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, chaque bloc valant $C = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.

Correction. Le polynôme $\pi = X^2 + aX + b$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ (discriminant négatif) et annule f ; c'est le polynôme minimal de f. Ainsi $\mathbb{K}[f] \cong \mathbb{R}[X]/(\pi) \cong \mathbb{C}$, ce qui munit E d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (la multiplication par X agissant comme f). En notant $m = \dim_{\mathbb{C}} E$, on a $n = \dim_{\mathbb{R}} E = 2m$: n est pair.
Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ une $\mathbb{C}$-base de E. Puisque tout scalaire complexe s'écrit $\alpha + \beta X$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), tout vecteur de E s'écrit de façon unique $\sum_k (\alpha_k \varepsilon_k + \beta_k f(\varepsilon_k))$: la famille $\big(\varepsilon_1, f(\varepsilon_1), \dots, \varepsilon_m, f(\varepsilon_m)\big)$ est une $\mathbb{R}$-base de E. Sur chaque plan $\mathrm{Vect}(\varepsilon_k, f(\varepsilon_k))$, on a $f(\varepsilon_k) = f(\varepsilon_k)$ et $f(f(\varepsilon_k)) = -b\varepsilon_k - a f(\varepsilon_k)$, d'où le bloc $C = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$.
La matrice de f est donc $\mathrm{diag}(C, \dots, C)$.

Exercice 31. *Matrices magiques*. ●●● Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* si les sommes de ses coefficients le long de chaque ligne et de chaque colonne sont toutes égales à une même valeur, notée $s(M)$. On note $\mathcal{M}ag$ l'ensemble des matrices magiques et J la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $\mathcal{M}ag$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $s : \mathcal{M}ag \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire.

Correction. La matrice nulle est magique ($s = 0$). Si M, M' sont magiques de valeurs $s(M), s(M')$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les sommes lignes/colonnes de $\lambda M + M'$ valent toutes $\lambda s(M) + s(M')$: $\lambda M + M'$ est magique et $s(\lambda M + M') = \lambda s(M) + s(M')$. Donc $\mathcal{M}ag$ est un sous-espace vectoriel et s une forme linéaire.

2. Montrer que $\mathcal{M}ag = \ker s \oplus \mathbb{R}J$.

Correction. On a $J \in \mathcal{M}ag$ avec $s(J) = n \neq 0$, donc $J \notin \ker s$ et s n'est pas la forme nulle. Pour $M \in \mathcal{M}ag$, posons $\mu = \dfrac{s(M)}{n}$; alors $M - \mu J \in \ker s$ (car $s(M - \mu J) = s(M) - \mu n = 0$), d'où $M = (M - \mu J) + \mu J \in \ker s + \mathbb{R}J$.
Enfin $\ker s \cap \mathbb{R}J = \{0\}$ car $s(J) \neq 0$. La somme est donc directe : $\mathcal{M}ag = \ker s \oplus \mathbb{R}J$.

3. Déterminer $\dim \mathcal{M}ag$.

Correction. Calculons $d = \dim \ker s$ (matrices dont toutes les lignes et toutes les colonnes sont de somme nulle).

- L'espace des matrices dont chaque ligne est de somme nulle est de dimension $n(n-1)$ (chaque ligne dans un hyperplan de $\mathbb{R}^n$).
- Imposer en plus que les n colonnes soient de somme nulle ajoute n conditions, mais avec une relation de dépendance (la somme des sommes de colonnes égale la somme totale, déjà nulle) : soit $n-1$ conditions indépendantes.

Donc $d = n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$. Avec la question précédente,

$$\dim \mathcal{M}ag = \dim \ker s + 1 = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2.$$

4 Endomorphismes particuliers (nilpotents, projecteurs, symétries)

Exercice 32. *Matrices nilpotentes*. ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $I_n - N$ est inversible et son inverse est un polynôme en N.

Correction. Soit p tel que $N^p = 0$. En développant, on a l'identité télescopique

$$(I_n - N)\big(I_n + N + N^2 + \cdots + N^{p-1}\big) = I_n - N^p = I_n.$$

Donc $I_n - N$ est inversible, d'inverse $(I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$, qui est bien un polynôme en N.

2. Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes qui commutent sont nilpotents. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de commutation.

Correction. Soient N, M nilpotentes avec $NM = MN$, $N^p = 0$, $M^q = 0$.

- *Produit :* comme N, M commutent, $(NM)^k = N^k M^k$; pour $k = \max(p, q)$ ce produit est nul, donc NM est nilpotente.

- *Somme :* la formule du binôme s'applique (matrices commutantes) :

$$(N+M)^{p+q-1} = \sum_{i=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{i} N^i M^{p+q-1-i}.$$

Dans chaque terme, $i \geqslant p$ ou $p+q-1-i \geqslant q$, donc $N^i M^{p+q-1-i} = 0$: $(N+M)^{p+q-1} = 0$.

Contre-exemple sans commutation : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $N^2 = M^2 = 0$, mais $N+M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $(N+M)^2 = I_2$ (non nilpotente) et $NM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un projecteur non nul (non nilpotent).

Exercice 33. *Commutation avec un projecteur.* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, p un projecteur de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$f \circ p = p \circ f \iff \mathrm{Im}p \text{ et } \ker p \text{ sont stables par } f.$$

Correction. Rappelons que p est la projection sur $\mathrm{Im}p$ parallèlement à $\ker p$, et que $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p$ avec $p_{|\mathrm{Im}p} = \mathrm{Id}$ et $p_{|\ker p} = 0$.
(⇒) Supposons $f \circ p = p \circ f$.

- Soit $x \in \mathrm{Im}p$, donc $p(x) = x$. Alors $f(x) = f(p(x)) = p(f(x)) \in \mathrm{Im}p$: $\mathrm{Im}p$ est stable.
- Soit $x \in \ker p$, donc $p(x) = 0$. Alors $p(f(x)) = f(p(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \ker p$: $\ker p$ est stable.

(⇐) Supposons $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$ stables par f. Soit $x \in E$, décomposé en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}p$, $x_2 \in \ker p$, de sorte que $p(x) = x_1$. Alors :

$$(f \circ p)(x) = f(x_1), \qquad (p \circ f)(x) = p\big(f(x_1)\big) + p\big(f(x_2)\big).$$

Or $f(x_1) \in \mathrm{Im}p$ (stable) donne $p(f(x_1)) = f(x_1)$, et $f(x_2) \in \ker p$ (stable) donne $p(f(x_2)) = 0$. Donc $(p \circ f)(x) = f(x_1) = (f \circ p)(x)$, et ce pour tout x : $f \circ p = p \circ f$.

Exercice 34. *Endomorphisme nilpotent d'indice maximal.* ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p : $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0)\big)$ est libre. En déduire que $p \leqslant n$.

Correction. Supposons $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x_0) = 0$. Appliquons u^{p-1} : comme $u^{p-1+k}(x_0) = 0$ pour $k \geqslant 1$, il reste $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_0 = 0$ (car $u^{p-1}(x_0) \neq 0$). En appliquant ensuite u^{p-2} à la relation restante, on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite : tous les λ_k sont nuls. La famille est libre.
Étant une famille libre de p vecteurs de E, on a $p \leqslant \dim E = n$.

2. On suppose $p = n$. Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B} = \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$.

Correction. Notons $e_k = u^k(x_0)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$; d'après **1.**, $\mathcal{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ est une base de E. On a $u(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \leqslant n-2$, et $u(e_{n-1}) = u^n(x_0) = 0$. La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est donc le bloc de Jordan nilpotent

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(des 1 sur la sous-diagonale, des 0 ailleurs).

Exercice 35. *Commutant d'un nilpotent d'indice maximal.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n (i.e. $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$). On note $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$ son commutant. Montrer que $C(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ et déterminer $\dim C(u)$.

Correction. Soit x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$. D'après l'exercice sur les nilpotents d'indice maximal, $\mathcal{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
Inclusion $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset C(u)$ et dimension. Tout polynôme en u commute avec u, donc $\mathbb{K}_{n-1}[u] \subset C(u)$. De plus $(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre : une relation $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k = 0$ appliquée à x_0 donne $\sum a_k u^k(x_0) = 0$, donc tous les a_k sont

nuls (famille $\mathcal{B}$ libre). Ainsi $\dim \mathbb{K}_{n-1}[u] = n$.

Inclusion $C(u) \subset \mathbb{K}_{n-1}[u]$. Soit $v \in C(u)$. Décomposons $v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, u^k(x_0)$ dans $\mathcal{B}$, et posons $P(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$. Alors v et $P(u)$ commutent tous deux avec u, et coïncident en x_0. Pour tout j :

$$v\big(u^j(x_0)\big) = u^j\big(v(x_0)\big) = u^j\big(P(u)(x_0)\big) = P(u)\big(u^j(x_0)\big).$$

Ils coïncident sur la base $\mathcal{B}$, donc $v = P(u) \in \mathbb{K}_{n-1}[u]$.
Conclusion : $C(u) = \mathbb{K}_{n-1}[u]$, de dimension $\boxed{n}$.

Exercice 36. *Noyaux et images itérés.* ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \ker u^k$ et $I_k = \mathrm{Im} u^k$.

1. Montrer que $(N_k)_k$ est croissante et $(I_k)_k$ décroissante (pour l'inclusion), et qu'elles sont stationnaires à partir d'un même rang r.

Correction. Si $u^k(x) = 0$ alors $u^{k+1}(x) = 0$: $N_k \subset N_{k+1}$. De même $I_{k+1} = u(I_k) \subset I_k$. Les suites de dimensions, l'une croissante l'autre décroissante et bornées, sont stationnaires.
Montrons que si $N_k = N_{k+1}$ alors $N_{k+1} = N_{k+2}$: soit $x \in N_{k+2}$, alors $u(x) \in N_{k+1} = N_k$, donc $u^{k+1}(x) = 0$, i.e. $x \in N_{k+1}$. Ainsi (N_k) stationne à partir du premier rang r où $N_r = N_{r+1}$. Comme $\dim N_k + \dim I_k = n$ (théorème du rang), (I_k) stationne au même rang r.

2. Montrer que $E = I_r \oplus N_r$.

Correction. Soit $y \in I_r \cap N_r$: écrivons $y = u^r(x)$, avec $u^r(y) = 0$, donc $u^{2r}(x) = 0$, i.e. $x \in N_{2r} = N_r$ (stationnarité), d'où $y = u^r(x) = 0$. Ainsi $I_r \cap N_r = \{0\}$, et comme $\dim I_r + \dim N_r = n$, on a $E = I_r \oplus N_r$.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ avec C inversible et M nilpotente. Conclure que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une telle matrice.

Correction. Les sous-espaces I_r et N_r sont stables par u (ce sont une image et un noyau d'un polynôme en u, qui commute avec u). L'endomorphisme induit par u sur I_r vérifie $u(I_r) = I_{r+1} = I_r$: il est surjectif donc bijectif (dimension finie), sa matrice C est inversible. L'endomorphisme induit sur N_r vérifie $u^r_{|N_r} = 0$: il est nilpotent, de matrice M nilpotente. En réunissant une base de I_r et une base de N_r (adaptées à la somme directe), la matrice de u est $\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$.
Enfin, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice d'un endomorphisme u dans une base : elle est donc semblable à une matrice de cette forme.

Exercice 37. *Base antéduale.* ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille libre de formes linéaires sur E. On pose

$$\Phi : E \to \mathbb{K}^n, \qquad x \mapsto \big(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big).$$

1. Montrer que Φ est un isomorphisme.

Correction. Φ est linéaire, entre deux espaces de même dimension n : il suffit de montrer qu'elle est surjective. Sinon, $\mathrm{Im}\Phi$ serait inclus dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$, i.e. il existerait $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i\, \varphi_i(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Cela donnerait $\sum_i a_i \varphi_i = 0$, contredisant la liberté de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Donc Φ est surjective, donc bijective.

2. En déduire l'existence d'une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}$ pour tous i, j.

Correction. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et posons $\varepsilon_j = \Phi^{-1}(e_j)$. Comme Φ^{-1} est un isomorphisme, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E. De plus, $\Phi(\varepsilon_j) = e_j$ signifie exactement

$$\varphi_i(\varepsilon_j) = \big(\Phi(\varepsilon_j)\big)_i = (e_j)_i = \delta_{i,j}.$$

Exercice 38. *Inclusion de noyaux de formes linéaires.* ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ et

φ des formes linéaires sur E. Montrer que

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker\varphi_i \subset \ker\varphi \iff \varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p).$$

Correction. **(⇐)** Si $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\varphi_i$ et $x \in \bigcap_i \ker\varphi_i$, alors $\varphi(x) = \sum_i \lambda_i\varphi_i(x) = 0$, donc $x \in \ker\varphi$.
(⇒) Posons $\Psi : E \to \mathbb{K}^p$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$, de sorte que $\ker\Psi = \bigcap_i \ker\varphi_i \subset \ker\varphi$. Définissons ψ sur $\mathrm{Im}\Psi$ par $\psi\big(\Psi(x)\big) = \varphi(x)$: c'est bien défini, car si $\Psi(x) = \Psi(x')$, alors $x - x' \in \ker\Psi \subset \ker\varphi$, donc $\varphi(x) = \varphi(x')$. L'application ψ est linéaire sur $\mathrm{Im}\Psi$; on la prolonge en une forme linéaire sur $\mathbb{K}^p$, qui s'écrit $\psi(y_1, \dots, y_p) = \sum_i \lambda_i y_i$.
Alors, pour tout x,

$$\varphi(x) = \psi\big(\Psi(x)\big) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\,\varphi_i(x),$$

donc $\varphi = \sum_i \lambda_i\varphi_i \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Exercice 39. *Inverse à droite et projecteur associé.* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de f et de g ?

Correction. Si $g(x) = g(y)$ alors $f(g(x)) = f(g(y))$, i.e. $x = y$: g est injective. Comme $\mathrm{Id}_E = f \circ g$ est surjective, f l'est aussi.

2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur, et déterminer $\mathrm{Im}p$ et $\ker p$.

Correction. $p^2 = g \circ f \circ g \circ f = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{Id}_E \circ f = g \circ f = p$: p est un projecteur.
Image : $\mathrm{Im}p \subset \mathrm{Im}g$, et pour $y = g(x) \in \mathrm{Im}g$, $p(y) = g(f(g(x))) = g(x) = y$; donc $\mathrm{Im}g \subset \mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}g$.
Noyau : $p(x) = 0 \iff g(f(x)) = 0 \iff f(x) = 0$ (g injective) $\iff x \in \ker f$; donc $\ker p = \ker f$.

3. En déduire que $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}g$.

Correction. p étant un projecteur, $E = \mathrm{Im}p \oplus \ker p = \mathrm{Im}g \oplus \ker f$.

Exercice 40. *Projecteurs qui commutent.* ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur, et déterminer son image et son noyau.

Correction. $p \circ q$ **est un projecteur :** en utilisant la commutation et $p^2 = p$, $q^2 = q$,

$$(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p^2 \circ q^2 = p \circ q.$$

Image : $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$**.** Si $z = (p \circ q)(x)$, alors $z = p(q(x)) \in \mathrm{Im}p$ et $z = q(p(x)) \in \mathrm{Im}q$, donc $\mathrm{Im}(p \circ q) \subset \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$, alors $p(y) = y$ et $q(y) = y$, d'où $(p \circ q)(y) = p(y) = y$: $y \in \mathrm{Im}(p \circ q)$.
Noyau : $\ker(p \circ q) = \ker p + \ker q$**.** Si $x \in \ker q$, $(p \circ q)(x) = p(0) = 0$; si $x \in \ker p$, $(p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(0) = 0$. Donc $\ker p + \ker q \subset \ker(p \circ q)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(p \circ q)$. Écrivons $x = q(x) + \big(x - q(x)\big)$: le second terme est dans $\ker q$, et $p\big(q(x)\big) = 0$ montre $q(x) \in \ker p$. Donc $x \in \ker p + \ker q$.

Exercice 41. *Endomorphismes cycliques.* ●●● Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E (f est dit *cyclique*).

1. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Correction. Notons $e_k = f^k(x_0)$. On a $f(e_k) = e_{k+1}$ pour $k \leqslant n-2$, et $f(e_{n-1}) = f^n(x_0) = -\big(a_0e_0 + \dots + a_{n-1}e_{n-1}\big)$ où les a_k sont les coordonnées de $f^n(x_0)$ dans $\mathcal{B}$. La matrice est la matrice compagnon

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & -a_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que g est entièrement déterminé par $g(x_0)$, puis que $g \in \mathbb{K}[f]$.

Correction. Écrivons $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0) = P(f)(x_0)$ avec $P = \sum a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Comme g commute avec f, pour tout j :
$$g\big(f^j(x_0)\big) = f^j\big(g(x_0)\big) = f^j\big(P(f)(x_0)\big) = P(f)\big(f^j(x_0)\big).$$
Ainsi g et $P(f)$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$, donc $g = P(f) \in \mathbb{K}[f]$. En particulier g est déterminé par $g(x_0)$.

3. En déduire que le commutant de f est $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$, de dimension n.

Correction. D'après **2.**, tout endomorphisme commutant avec f est dans $\mathbb{K}[f]$; réciproquement, tout polynôme en f commute avec f. Donc le commutant est exactement $\mathbb{K}[f]$. Enfin $(\mathrm{Id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est libre : si $Q(f) = 0$ avec $\deg Q \leqslant n-1$, alors $Q(f)(x_0) = 0$ contredirait la liberté de $\mathcal{B}$ (sauf $Q = 0$). Donc $\dim\mathbb{K}[f] = n$.

Exercice 42. *Une formule de Burnside.* ●●● Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$, de cardinal N. On pose $p = \dfrac{1}{N}\sum_{g\in G} g$.

1. Montrer que $h \circ p = p$ pour tout $h \in G$, puis que p est un projecteur.

Correction. Pour $h \in G$, l'application $g \mapsto hg$ est une bijection de G (translation dans le groupe), donc
$$h \circ p = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} hg = \frac{1}{N}\sum_{g'\in G} g' = p.$$
En sommant sur $h \in G$: $p \circ p = \dfrac{1}{N}\sum_{h\in G} h\circ p = \dfrac{1}{N}\sum_{h\in G} p = p$. Donc $p^2 = p$: p est un projecteur.

2. Montrer que $\mathrm{Im}p = \bigcap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)$ (les vecteurs invariants par G).

Correction. Notons $F = \bigcap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)$. Si $x \in \mathrm{Im}p$, alors pour tout $h \in G$, $h(x) = h(p(y)) = p(y) = x$ (avec $x = p(y)$ et $h \circ p = p$), donc $x \in F$. Réciproquement, si $x \in F$ alors $g(x) = x$ pour tout g, d'où $p(x) = \dfrac{1}{N}\sum_g g(x) = \dfrac{1}{N}\cdot Nx = x$, donc $x \in \mathrm{Im}p$. Ainsi $\mathrm{Im}p = F$.

3. En déduire que $\dim\Big(\bigcap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\Big) = \dfrac{1}{N}\sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(g)$.

Correction. p étant un projecteur, $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = \dim\mathrm{Im}p$. Par linéarité de la trace,
$$\dim\Big(\bigcap_{g\in G} \ker(g - \mathrm{Id}_E)\Big) = \dim\mathrm{Im}p = \mathrm{Tr}(p) = \frac{1}{N}\sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(g).$$

5 Déterminants

Exercice 43. *Déterminant de Vandermonde.* ●○○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On considère la matrice de Vandermonde
$$V = \big(x_i^{j-1}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det V = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.

Correction. On raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair ($\det V = 1$).
Notons $P(t) = \det\big(V(x_1, \dots, x_{n-1}, t)\big)$, obtenu en remplaçant x_n par une indéterminée t. En développant selon la dernière ligne, P est un polynôme en t de degré $\leqslant n-1$. Il s'annule en $x_1, \dots, x_{n-1}$ (deux lignes égales), qui

sont supposés distincts, donc
$$P(t) = c\,(t-x_1)(t-x_2)\cdots(t-x_{n-1}).$$
Le coefficient dominant c (coefficient de t^{n-1}) est, par développement, le cofacteur associé, soit le déterminant de Vandermonde d'ordre $n-1$ en $x_1,\dots,x_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence,
$$c = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} (x_j - x_i).$$
En évaluant P en x_n on obtient bien $\det V = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$. *(Le résultat, une fois obtenu pour des x_i distincts, s'étend à tous les x_i par continuité / identité polynomiale.)*

2. En déduire que V est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts, et retrouver ainsi l'existence et l'unicité du polynôme d'interpolation de degré $\leqslant n-1$ en n points d'abscisses distinctes.

Correction. Le produit $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$ est non nul si et seulement si tous les facteurs le sont, c'est-à-dire si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts : V est alors inversible.
Or V est la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire
$$\theta : \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n, \qquad P \mapsto (P(x_1),\dots,P(x_n)).$$
V inversible équivaut à θ bijective : pour toute famille $(y_1,\dots,y_n)$ de valeurs imposées, il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.

Exercice 44. *Déterminant tridiagonal et polynômes de Tchebychev.* ●◐○ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $D_n(x)$ le déterminant de la matrice tridiagonale d'ordre n
$$M_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & & (0) \\ 1 & 2x & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 2x & 1 \\ (0) & & & 1 & 2x \end{pmatrix}.$$

1. Établir, pour tout $n \geqslant 1$, la relation $D_{n+2}(x) = 2x\,D_{n+1}(x) - D_n(x)$ (avec les conventions $D_0 = 1$, $D_1(x) = 2x$).

Correction. Développons $D_{n+2}(x)$ selon la première colonne. Le premier terme donne $2x\,D_{n+1}(x)$. Le second (coefficient 1 en position $(2,1)$) fait apparaître un mineur que l'on développe selon sa première ligne : il vaut $1\cdot D_n(x)$, affecté du signe $(-1)^{2+1}\cdot(-1)^{1+1} = -1$. D'où
$$D_{n+2}(x) = 2x\,D_{n+1}(x) - D_n(x).$$

2. Pour $x = \cos\theta$ avec $\theta \in]0,\pi[$, calculer $D_n(x)$.

Correction. La suite (D_n) vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2\cos\theta\, r + 1 = 0$, de racines $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (distinctes car $\theta \in]0,\pi[$). Donc $D_n = \alpha\, e^{in\theta} + \beta\, e^{-in\theta}$, et les conditions $D_0 = 1$, $D_1 = 2\cos\theta$ donnent
$$D_n(\cos\theta) = \frac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin\theta}.$$
On reconnaît $U_n(\cos\theta)$, où U_n est le n-ème polynôme de Tchebychev de deuxième espèce.

Exercice 45. *Matrice antisymétrique d'ordre impair.* ◐○○ Soit n un entier impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A n'est pas inversible.

Correction. Comme $A^\top = -A$ et $\det(A^\top) = \det(A)$:
$$\det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A),$$
la dernière égalité car n est impair. Donc $2\det(A) = 0$, soit $\det(A) = 0$: A n'est pas inversible.

Exercice 46. *Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.* ●○○ Soit $A, B, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\det M = \det A \det D$.

> **Correction.** *Cas A inversible.* On dispose de la factorisation
> $$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$
> Chacune de ces matrices est triangulaire par blocs à blocs diagonaux I_n ou une seule matrice non triviale ; leurs déterminants valent respectivement $\det A$, 1 et $\det D$. Par multiplicativité, $\det M = \det A \det D$.
> *Cas A non inversible.* Les colonnes de A sont liées, donc les n premières colonnes de M (obtenues en complétant celles de A par des zéros) le sont aussi : $\det M = 0 = \det A \det D$.

2. En déduire que M est inversible si et seulement si A et D le sont.

> **Correction.** M est inversible $\iff \det M \neq 0 \iff \det A \det D \neq 0 \iff (\det A \neq 0$ et $\det D \neq 0) \iff A$ et D inversibles.

Exercice 47. *Déterminants par blocs et positivité.* ●◐○ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B)$.

> **Correction.** Effectuons les opérations par blocs $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ (colonnes de blocs), puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (lignes de blocs), qui ne modifient pas le déterminant :
> $$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & B \\ A+B & A \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{pmatrix}.$$
> Cette dernière est triangulaire par blocs, donc son déterminant vaut $\det(A+B)\det(A-B)$.

2. On suppose de plus $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2+B^2) \geqslant 0$, et donner un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.

> **Correction.** Comme A et B commutent, $A^2 + B^2 = (A+iB)(A-iB)$, donc
> $$\det(A^2+B^2) = \det(A+iB)\det(A-iB).$$
> Or A, B sont réelles, donc $A - iB = \overline{A+iB}$ et $\det(A-iB) = \overline{\det(A+iB)}$. Ainsi
> $$\det(A^2+B^2) = \det(A+iB)\,\overline{\det(A+iB)} = \left|\det(A+iB)\right|^2 \geqslant 0.$$
> *Contre-exemple sans commutation :* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $AB \neq BA$, $A^2 = A$, $B^2 = B$, donc $A^2 + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det(A^2+B^2) = -1 < 0$.

Exercice 48. *Comatrice de la comatrice.* ●●● Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Com}(A)$ sa comatrice, et on rappelle la relation $A\,{}^{\top}\mathrm{Com}(A) = {}^{\top}\mathrm{Com}(A)\,A = \det(A)\,I_n$.

1. Lorsque A est inversible, exprimer $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de A, puis calculer $\det\big(\mathrm{Com}(A)\big)$ et $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big)$.

> **Correction.** Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, la relation donne ${}^{\top}\mathrm{Com}(A) = \det(A)\,A^{-1}$, donc $\mathrm{Com}(A) = \det(A)\,{}^{\top}(A^{-1})$. En prenant le déterminant :
> $$\det\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \det(A)^n \det(A^{-1}) = \det(A)^{n-1}.$$
> On applique alors la même formule à $\mathrm{Com}(A)$ (inversible car $\det\mathrm{Com}(A) \neq 0$) :
> $$\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \det\big(\mathrm{Com}(A)\big)\,{}^{\top}\big(\mathrm{Com}(A)^{-1}\big).$$
> Or $\mathrm{Com}(A) = \det(A)\,{}^{\top}(A^{-1})$ donne $\mathrm{Com}(A)^{-1} = \det(A)^{-1}\,{}^{\top}A$, donc ${}^{\top}\big(\mathrm{Com}(A)^{-1}\big) = \det(A)^{-1}A$. Finalement
> $$\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big) = \det(A)^{n-1} \cdot \det(A)^{-1}A = \det(A)^{n-2}\,A.$$

2. En déduire que $\mathrm{Com}\big(\mathrm{Com}(A)\big) = (\det A)^{n-2}\,A$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. Si A n'est pas inversible, alors par l'exercice fait en classe, $\mathrm{Com}(A)$ est ou bien nulle (si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-2$) ou bien de rang 1. Ainsi, $\mathrm{Com}(A)$ est de rang $\leqslant n-2$ (si $n \geqslant 3$) donc $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = 0$.
Le cas $n = 2$ se traite bien à la main !

Exercice 49. *Déterminant de Smith.* ●●● Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ définie par $m_{i,j} = i \wedge j$ (le pgcd de i et j). Calculer $\det M$.

Correction. On rappelle l'identité $\displaystyle\sum_{d|k} \varphi(d) = k$. Soit $T = (t_{i,j})$ avec $t_{i,j} = 1$ si $i \mid j$, 0 sinon : T est triangulaire supérieure à diagonale de 1, donc $\det T = 1$. Soit $D = \mathrm{diag}\big(\varphi(1), \dots, \varphi(n)\big)$. Calculons ${}^{\top}TDT$:

$$\big({}^{\top}TDT\big)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} t_{k,i}\,\varphi(k)\,t_{k,j} = \sum_{\substack{k|i\\k|j}} \varphi(k) = \sum_{k|(i\wedge j)} \varphi(k) = i \wedge j = m_{i,j}.$$

Donc $M = {}^{\top}T\,D\,T$, d'où

$$\det M = \det({}^{\top}T)\det(D)\det(T) = 1 \cdot \Big(\prod_{k=1}^{n} \varphi(k)\Big) \cdot 1 = \boxed{\prod_{k=1}^{n} \varphi(k)}.$$

6 Du côté des oraux...

Exercice 50. *CCINP 24.* Soit $(A_1, A_2, A_3, A_4) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^4$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{rg}\,(B_1) + \mathrm{rg}\,(B_2)$; puis que : $\mathrm{rg}(A) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{4} \mathrm{rg}\,(A_k)$.

Correction. Notons $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots, C_{2n}$ les colonnes de A. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n}) \\
&= \dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n})) \\
&\leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) + \mathrm{Vect}(C_{n+1}, \dots C_{2n})\right) \\
&\leqslant \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)\right) + \dim\left(\mathrm{Vect}(C_{n+1}, \dots C_{2n})\right) \text{ par la formule de Grassmann} \\
&\leqslant \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n) + \mathrm{rg}(C_{n+1}, \dots, C_{2n}) = \mathrm{rg}(B_1) + \mathrm{rg}(B_2).
\end{aligned}$$

Ensuite, en raisonnant de même sur les lignes de B_1, on montre que $\mathrm{rg}(B_1) \leqslant \mathrm{rg}(A_1) + \mathrm{rg}(A_3)$ puis que $\mathrm{rg}(B_2) \leqslant \mathrm{rg}(A_2) + \mathrm{rg}(A_4)$. Le résultat s'ensuit alors.

2. Montrer que si $\mathrm{rg}\,(A_1) = \mathrm{rg}\,(A_4) = n$ et $A_3 = 0$, A est inversible. Que vaut alors A^{-1} ?

Correction. Si $A_3 = 0$, alors $\det(A) = \det(A_1)\det(A_4) \neq 0$, car $\mathrm{rg}(A_1) = n$ et $\mathrm{rg}(A_4) = n$ donc A_1 et A_4 sont inversibles. Donc A est inversible. On cherche alors l'inverse de A sous la forme $\begin{pmatrix} A_1^{-1} & D \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix}$. En calculant

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} & D \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_n & A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & A_1^{-1}A_2 + DA_4 \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

Il faut (et il suffit) alors de prendre $A_1^{-1}A_2 + DA_4 = 0_n$ donc $D = -A_1^{-1}A_2A_4^{-1}$. Donc

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1} \\ 0_n & A_4^{-1} \end{pmatrix}.}$$

Exercice 51. *Centrale 24.* Soit f un endomorphisme d'un C-espace vectoriel E de dimension n. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \mathrm{rg}\left(f^k\right)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.

Correction. On remarque que si $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k)$ (car si $y = f^{k+1}(x)$, alors $y = f^k(f(x))$). Ainsi, (r_k) est une suite d'entiers positifs décroissante. Minorée par 0, elle converge. Elle est donc stationnaire (si elle ne l'était pas, elle diminuerait de 1 une infinité de fois, ce qui est absurde).

2. En considérant $g_k : \left| \begin{array}{c} f^k(E) \to f^{k+1}(E) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$, montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.

Correction. Suivons l'indication et considérons une telle application linéaire. En appliquant le théorème du rang à g, on obtient

$$\mathrm{rg}(g_k) + \dim(\ker(g)) = \dim(f^k(E)) = r_k.$$

Mais $\mathrm{rg}(g_k) = \dim(f(f^k(E)) = \dim(f^{k+1}(E)) = r_{k+1}$. Ainsi,

$$r_k - r_{k+1} = \dim(\ker(g_k)).$$

Mais

$$\ker(g_k) = \{y \in f^k(E),\ f(y) = 0\} = f^k(E) \cap \ker(f).$$

Comme $f^k(E)$ décroît (pour l'inclusion), $f^k(E) \cap \ker(f)$ aussi, donc $\dim(\ker(g_k))$ aussi, donc $(r_k - r_{k+1})$ aussi !

Exercice 52. *Mines-Ponts 24*. Soit $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On suppose P de rang r et l'on considère l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\Psi(X) = PX - XP.$$

Déterminer la trace de Ψ en fonction de n et r.

Correction. Déjà, P est un projecteur de rang r, donc on dispose de Q inversible telle que $P = QJ_rQ^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Psi(X) &= QJ_rQ^{-1}X - XQJ_rQ^{-1} \\ &= QJ_rQ^{-1}XQQ^{-1} - QQ^{-1}XQJ_rQ^{-1} \\ &= Q\left(J_r(Q^{-1}XQ) - (Q^{-1}XQ)J_r\right)Q^{-1} \\ &= \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}(X), \end{aligned}$$

où $\alpha : X \mapsto QXQ^{-1}$, $\alpha^{-1} : X \mapsto Q^{-1}XQ$ et $\varphi : X \mapsto J_rX - XJ_r$.
Mais alors, on en déduit que

$$\mathrm{Tr}(\Psi) = \mathrm{Tr}(\alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}) = \mathrm{Tr}(\alpha^{-1} \circ \alpha \circ \varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi).$$

Il nous reste donc à déterminer la trace de φ. Pour ce faire, on va regarder sur la base canonique : soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

- si $i \leqslant r$ et $j \leqslant r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}$ et $E_{ij}J_r = E_{ij}$ donc $\varphi(E_{ij}) = 0_n$,
- si $i \leqslant r$ et $j > r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}$ mais $E_{ij}J_r = 0$ donc $\varphi(E_{ij}) = E_{ij}$ (cela apporte un coefficient 1 sur la diagonale,
- si $i > r$ et $j \leqslant r$, $J_rE_{ij} - E_{ij}J_r = -E_{i,j}$, ce qui apporte un coefficient -1 sur la diagonale,
- si $i > r$ et $j > r$, $J_rE_{ij} = E_{ij}J_r = 0_n$ donc $\varphi(E_{ij}) = 0$.

Ainsi, la diagonale de la matrice de φ dans la base canonique contient $r^2 + (n-r)^2$ zéros, $r(n-r)$ « 1 » et $r(n-r)$ « -1 », donc la trace de cette matrice est nulle ! Donc $\mathrm{Tr}(\Psi) = 0$.*(tout ça pour ça !)*

Exercice 53. *CCINP 24*. Soit $(A,B,P) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AP = PB$. On écrit $P = P_1 + \mathrm{i}P_2$ avec $(P_1, P_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'on pose : $Q(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$.

Correction. On sait que $AP = PB$ donc $AP_1 + iAP_2 = P_1B + iP_2B$. Les matrices AP_1, AP_2, P_1B, P_2B sont à coefficients réels, donc en égalisant les parties réelle et imaginaire des deux membres de l'égalité, on obtient le résultat.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $Q(x_0) \neq 0$.

Correction. Par la formule de développement sur une ligne, appliquée n fois, on sait que Q est une fonction polynomiale de x. Or, comme $Q(i) \neq 0$ (car $P_1 + iP_2$ est inversible), on sait que Q n'est pas le polynôme nul. Donc il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Q(x_0) \neq 0$ (sinon Q s'annulerait sur tout $\mathbb{R}$, donc une infinité de fois, donc Q

serait le polynôme nul).

3. En déduire qu'il existe $P_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que : $AP_0 = P_0B$. Qu'a-t-on démontré ?

Correction. En posant $P_0 = P_1 + x_0P_2$, on obtient le résultat. On a démontré que si deux matrices étaient semblables sur $\mathbb{C}$, alors elles étaient semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 54. *Mines 24, ex-X MP*. Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.
Indication donnée par l'examinateur : montrer que pour tout k, $E = F + \mathrm{Im}(u^k)$.

Correction. Montrons le résultat de l'indication par récurrence. L'initialisation est évidente (pour $k = 0$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$). Pour l'hérédité, supposons le résultat vrai au rang k. Soit x dans E. Par hypothèse de récurrence, on dispose de f dans F et de w dans E tels que $x = f + u^k(w)$.
Mais $w \in E$ donc, comme $E = F + \mathrm{Im}(u)$, on dispose de f' dans F et de α dans E tels que $w = f' + u(\alpha)$.
Alors

$$x = f + u^k(f' + u(\alpha)) = \underbrace{f + \underbrace{u^k(f')}_{\in F}}_{\in F} + u^{k+1}(\alpha) \in F + \mathrm{Im}(u^{k+1}).$$

D'où l'hérédité et le résultat. En particulier, $E = F + \mathrm{Im}(u^n) = F$.

Exercice 55. *Variations autour du Vandermonde*.

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille de polynômes telle que $\deg(P_i) = i$. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.

Correction. On note $c_k^{(i)}$ le coefficient de X^k de P_i. Le déterminant recherché est

$$D = \begin{vmatrix} c_0^{(0)} & c_1^{(1)}x_1 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \\ c_0^{(0)} & c_1^{(1)}x_2 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_0^{(0)} & c_1^{(1)}x_n + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \end{vmatrix} = c_0^{(0)} \begin{vmatrix} 1 & c_1^{(1)}x_1 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \\ 1 & c_1^{(1)}x_2 + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_1^{(1)}x_n + c_0^{(1)} & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_0^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

On fait alors les opérations $C_i \leftrightarrow C_i - c_0^{(i)}C_1$, pour supprimer tous les coefficients constants, on obtient alors

$$D = c_0^{(0)} \begin{vmatrix} 1 & c_1^{(1)}x_1 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_1 \\ 1 & c_1^{(1)}x_2 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c_1^{(1)}x_n & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_n \end{vmatrix}$$

$$= c_0^{(0)}c_1^{(1)} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_1^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_1 \\ 1 & x_2 & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_2^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-1} + c_{n-1}^{(n-1)}x_n^{n-2} + \cdots + c_1^{(n-1)}x_n \end{vmatrix}$$

En poursuivant ainsi, on obtient

$$\boxed{D = \left(\prod_{i=0}^{n-1} c_i^{(i)}\right) V(x_0, \dots, x_{n-1}).}$$

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}$.

Correction. On pose $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ (la suite des polynômes de Tchebycheff). Alors pour tout n, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, et le coefficient dominant de T_i est, pour $i \geqslant 1$, 2^i. Donc le déterminant recherché est

$$\prod_{i=1}^{n-1} 2^i V(\cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_n)).$$

Exercice 56. *Mines PC 23*. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre l'équation $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose $B = 0$. Montrer que l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension et une base.

Correction. L'application $\varphi : X \mapsto X + \mathrm{Tr}(X)A$ est clairement linéaire, donc $\ker(\varphi) = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(X) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Ensuite, on détermine ce noyau. Soit $X \in \ker(\varphi)$. Alors $X = -\mathrm{Tr}(X)A$ donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda A$. Mais alors $\lambda A = -\lambda \mathrm{Tr}(A)A$. Donc $\lambda(1 + \mathrm{Tr}(A))A = 0_n$.
Si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, alors il n'y a aucune contrainte sur λ : tout multiple scalaire de A est solution de l'équation.
Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, alors $\lambda = 0$ (sauf si $A = 0$, cas que l'on élimine), donc la seule solution de l'équation est 0_n.
Donc l'espace vectoriel est ou bien $\mathrm{Vect}(A)$ si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, ou bien $\{0_n\}$.

2. Résoudre l'équation dans le cas général.

Correction. On utilise le théorème de structure des solutions de l'équation $f(x) = y$ lorsque f est linéaire. L'ensemble des solutions est $\{x_0 + h, h \in \ker(f)\}$ où x_0 est une solution particulière. Cherchons donc une telle solution de $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$.
Déjà, on remarque que si X est une telle solution,

$$\mathrm{Tr}(X + \mathrm{Tr}(X)A) = \mathrm{Tr}(B) \text{ donc } \mathrm{Tr}(X)(1 + \mathrm{Tr}(A)) = \mathrm{Tr}(B).$$

D'où deux cas de figure (encore) :

- si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, alors $\mathrm{Tr}(X) = \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}$, donc $X = B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A$ alors un tel X est solution. Par la question précédente, ce X est unique. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{B - \dfrac{\mathrm{Tr}(B)}{1 + \mathrm{Tr}(A)}A\right\}$.
- si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, alors on a la condition $\mathrm{Tr}(B) = 0$. D'où deux cas :
  - ou bien $\mathrm{Tr}(B) \neq 0$, et alors il n'y a pas de solution à l'équation,
  - ou bien $\mathrm{Tr}(B) = 0$ et on remarque que B est une solution particulière de l'équation donc, d'après la question précédente, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{B + \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 57. *Centrale PSI 2025*. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$. On note $A_f = \ker(f - \mathrm{Id}_E)$, $B_f = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$, $A_g = \ker(g - \mathrm{Id}_E)$, $B_g = \ker(g + \mathrm{Id}_E)$.

1. Démontrer que $g(A_f) = B_f$ et $g(B_f) = A_f$.

Correction. Montrons la première égalité par double inclusion.
Soit $y \in g(A_f)$. Alors on dispose de $x \in A_f$ tel que $y = g(x)$. Alors

$$f(y) = f(g(x)) = -g(f(x)) = -g(x) = -y,$$

donc $y \in B_f$. Donc $g(A_f) \subset B_f$.
Soit $y \in B_f$. Alors $y = g(g(y))$. En posant $x = g(y)$, on remarque que

$$f(x) = f(g(y)) = -g(f(y)) = -g(-y) = g(y) = x,$$

donc $x \in A_f$. D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.
On démontre de même que $g(B_f) = A_f$.

2. En déduire que la dimension de E est paire.

Correction. g étant un isomorphisme, il préserve la dimension. Or, $g(A_f) = B_f$ donc $\dim(A_f) = \dim(B_f)$. Mais comme $A_f \oplus B_f = E$, on en déduit que $\dim(E) = 2\dim(A_f)$. D'où le résultat.

3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$.
Indication : partir d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de A_f. Que dire que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$?

Correction. Notons $\dim(E) = 2n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de A_f. Alors $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de B_f. Donc $(e_1, \dots, e_n, g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de E. Dans cette base, les matrices de f et g sont exactement comme souhaité !

Exercice 58. *Centrale PC 22*. (RMS 2022-2023 1136) Pour a, b dans C, on pose $D_1(a, b) = a$ et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix} \text{ et } A_n(b) = \begin{pmatrix} 0 & -2b & 0 & & (0) \\ -1 & 0 & -b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -b \\ (0) & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $D_n(a, b)$ pour $n \leqslant 3$

2. Donner une relation de récurrence linéaire reliant $D_n(a, b)$, $D_{n+1}(a, b)$ et $D_{n+2}(a, b)$.

3. Coder en Python une fonction `D(n,a,b)` renvoyant $D_n(a, b)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \mapsto D_n(a, b)$ est polynomiale à coefficients réels, et donner son degré.

5. Pour $b \in [\![1, n]\!]$ et $n \in [\![3, 5]\!]$, donner une représentation graphique de $a \mapsto D_n(a, b)$ sur $[-2\sqrt{b}, 2\sqrt{b}]$. Conjecturer le nombre et la localisation des zéros de $a \mapsto D_n(a, b)$.

6. Supposant vraie la conjecture de la question précédente, que peut-on dire de la réduction de la matrice $A_n(b)$?

7. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes définie par $T_0 = 1, T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour $n \geqslant 0$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, donner une expression simple des termes de la suite $(T_n(\cos\theta))_n$.

8. Calculer les racines du polynôme T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. Déterminer alors les zéros de $a \longmapsto D_n(a, b)$ en fonction du nombre complexe b.

Correction.
(RMS 2022-2023 1136)

1. Pour $n = 1$, $D_n(a, b) = a$. Pour $n = 2$, $D_n(a, b) = \begin{vmatrix} a & 2b \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2b$. Pour $n = 3$,

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 0 \\ 1 & a & 2b \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 2b \\ 1 & a \end{vmatrix} - 2b\begin{vmatrix} 1 & 2b \\ 0 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 2b) - 2ba = a^3 - 4ba.$$

2. Il s'agit presque du calcul du déterminant tridiagonal...mais **attention !** Le coefficient de la première ligne, deuxième colonne est différent des autres. Il ne faut donc pas toucher à cette première ligne. On calcule alors en développant selon la **dernière** ligne.

$$\begin{aligned} D_{n+2}(a,b) &= \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & b \\ (0) & & & 1 & a \end{vmatrix}_{[n+2]} \\ &= aD_{n+1}(a,b) - \begin{vmatrix} a & 2b & 0 & & (0) \\ 1 & a & b & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 1 & a & 0 \\ (0) & & & 1 & b \end{vmatrix}_{[n+1]} \\ &= aD_{n+1}(a,b) - bD_n(a,b), \end{aligned}$$

en développant le dernier déterminant selon la dernière colonne. D'où la relation de récurrence linéaire.

3. Question amusante, car on a plusieurs possibilités :

(a) on utilise directement les modules d'algèbre linéaire.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy.linalg as alg

def D(n,a,b):
    M = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i == j:
                M[i,j] = a
            elif i == j+1:
                M[i,j] = 1
            elif i+1 == j:
                if i == 0:
                    M[i,j] = 2*b
                else:
                    M[i,j] = b
    return alg.det(M)
```

(b) on utilise la relation de récurrence

```
def Dbis(n,a,b):
    un,unp1 = a,a**2-2*b #initialisation
    for i in range(n-1):
        un,unp1 = unp1,a*unp1 - b*un
    return un
```

(c) on calcule D_n grâce à la relation de récurrence linéaire (déconseillé, cela fait faire des erreurs de calculs inutiles...)

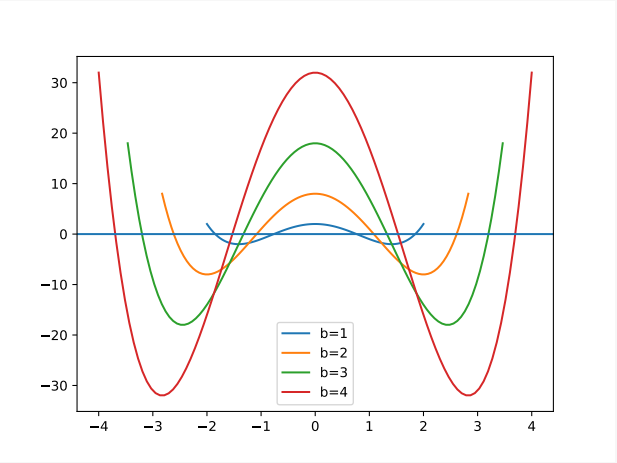
4. Si on avait calculé l'expression exacte, on aurait pu s'en sortir directement. Mais d'autres arguments sont possibles :

- « le déterminant est une expression polynomiale en les coefficients » (c'est un peu une formule magique du cours, mais on peut le dire ainsi). De plus, en développant successivement sur la première ligne, on remarque qu'au maximum, on aura n « a » qui seront multipliés entre eux. D'où un degré égal à n.
- dernier argument un peu massue : $D_n(a,b) = \chi_{A_n(b)}(a)$, et un polynôme caractéristique est un polynôme, de degré n. Bim.

5. On écrit

```
n = 4
for b in range(1,n+1):
    X = np.linspace(-2*np.sqrt(b),2*np.sqrt(b),100)
    Y = [D(n,a,b) for a in X]
    s = "b="+str(b)
    plt.plot(X,Y,label=s)
plt.axhline(0)
plt.legend()
plt.show()
```

On obtient



On conjecture alors que $D_n(a,b)$ possède n zéros, dans l'intervalle.

6. On en déduit alors que la matrice $A_n(b)$ est une matrice de taille $n\times n$, qui possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

7. Après l'ultra-classique déterminant tridiagonal, voici les non moins classiques polynômes de Tchebycheff. On démontre par récurrence que $T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$.
L'initialisation est évidente.
Pour l'**hérédité**, soit n tel que la proposition soit vraie aux rangs n et $n+1$. Alors

$$\begin{aligned}T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta))-T_n(\cos(\theta))\\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta))-\cos(n\theta)\\ &= \cos((n+2)\theta)+\cos(n\theta)-\cos(n\theta) \text{ en utilisant } 2\cos(a)\cos(b)=\cos(a+b)+\cos(a-b).\\ &= \cos((n+2)\theta),\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat.

8. Par récurrence immédiate, T_n est de degré n. Ensuite, on remarque que si $k\in[\![0,n-1]\!]$,

$$T_n\left(\cos\left((2*k+1)\frac{\pi}{2n}\right)\right)=\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

donc T_n s'annule en tous les $\cos\left((2*k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$. Ces réels étant deux à deux distincts, on en déduit les n racines de T_n.

9. On remarque que si on note $U_n(X)=\frac{1}{\sqrt{b}^n}D_n\left(2\sqrt{b}X,b\right)$, on a

$$\begin{aligned}U_{n+2}(X) &= \frac{1}{\sqrt{b}^{n+2}}D_{n+2}\left(2\sqrt{b}X,b\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{b}^{n+2}}2\sqrt{b}XD_{n+1}\left(2\sqrt{b}X,b\right)-\frac{1}{\sqrt{b}^{n+2}}bD_n\left(2\sqrt{b}X,b\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{b}^{n+1}}2XD_{n+1}\left(2\sqrt{b}X,b\right)-\frac{1}{\sqrt{b}^{n}}D_n\left(2\sqrt{b}X,b\right)\\ &= 2XU_{n+1}(X)-U_n(X).\end{aligned}$$

Donc (U_n) et (T_n) suivent la même relation de récurrence. De plus,

$$U_1(X)=\frac{1}{\sqrt{b}}D_1(2\sqrt{b}X,b)=2X=2T_1(X) \text{ et } U_2(X)=\frac{1}{b}(4bX^2-2b)=4X^2-2=2(2X^2-1)=2T_2(X).$$

Ainsi, par récurrence immédiate, $U_n(X)=2T_n(X)$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{b}^n}D_n(2\sqrt{b}X,b)=2T_n(X) \text{ donc } \boxed{D_n(X,b)=2\sqrt{b}^nT_n\left(\frac{X}{2\sqrt{b}}\right).}$$

Donc les zéros de $D_n(X,b)$ sont les $2\sqrt{b}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Exercice 59. *Mines-Ponts MP 2015*. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ C & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ C & \cdots & C & x_n \end{pmatrix}$ et J la matrice de taille n constituée uniquement de 1. On définit $P(X) = \det(A + XJ)$.

1. Majorer le degré de P.

2. Que vaut $\det(A)$? (on distinguera les cas $C \neq 1$ et $C = 1$).

Correction.

1. En effectuant $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$ sur $A + XJ$, on obtient un déterminant où X n'apparaît plus que sur la première ligne. En développant selon cette première ligne, on obtient un polynôme de degré $\leqslant 1$ en X. Notons $\varphi(x) = \det(A - xJ_n) = P(-x)$.

2. Si $C \neq 1$: on calcule $\varphi(1) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - 1)$ et $\varphi(C) = \prod_{k=1}^{n}(x_k - C)$. Comme φ est affine, on a $\varphi(x) = px + q$ avec

$$p = \frac{1}{C-1}\left(\prod_k (x_k - C) - \prod_k (x_k - 1)\right), \quad q = \frac{C\prod_k (x_k - 1) - \prod_k (x_k - C)}{C - 1}.$$

$\det(A) = \varphi(0) = q$.
Si $C = 1$: $A = D + J$ où $D = \operatorname{diag}(x_1 - 1, \ldots, x_n - 1) = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Par multilinéarité du déterminant :

$$\det(A) = \prod_k a_k + \sum_{i=1}^{n} \prod_{k \neq i} a_k.$$

Exercice 60. *Centrale MP 2016*. Python. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$, où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $z = (z_1, \ldots, z_n)$ sont dans $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $y = (y1, \ldots, yn)^\top$ et $t = (t1, \ldots, tn)^\top$ sont dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que chaque élément $a_{i,j}$ de A est la moyenne de ses quatre voisins dans M (au-dessus, en dessous, à droite et à gauche).

1. Montrer que la donnée de A ne définit pas x, y, z, t de manière unique (on pourra commencer par x, y, z et t nuls).

2. (a) Écrire une fonction qui à une matrice M écrite comme $M = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$ mais ne érifiant pas nécessairement la condition des moyennes, associe $M' = F(M) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & B & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}$ où, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]$, on a $b_{ij} = \dfrac{a_{i-1,j} + a_{i+1,j} + a_{i,j-1} + a_{i,j+1}}{4}$.

(b) On définit alors une suite (A_p) d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $A_0 = 0$ et, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A_{p+1} & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ t & A_p & y \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Écrire une fonction qui à A_0 et p associe A_p et la tester pour $n = 3$ et $n = 4$ avec $p = 100$, $p = 1000$. Que peut-on conjecturer ?

(c) Prouver la conjecture.

Correction.

1. Les grandeurs x_{11} et $y_1 1$ n'interviennent que pour la détermination de a_{11}, et c'est leur somme qui importe. Donc remplacer x_{11} par $x_{11} + 1$ et y_{11} par $y_{11} - 1$ ne change rien !

2. On suppose que les quatre vecteurs du tour sont nuls. On remarque alors que si $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ est tel que

$|a_{ij}| = \|A\|$, alors (en donnant aux indices 0 et n le seul sens que l'on peut vouloir leur donner)

$$\|A\| = |a_{ij}| \leqslant \frac{|a_{i-1,j}| + |a_{i+1,j}| + |a_{i,j-1}| + |a_{i,j+1}|}{4} \leqslant \|A\|.$$

Donc il y a égalité partout et $|a_{ij}| = |a_{i-1,j}| = |a_{i+1,j}| = |a_{i,j-1}| = |a_{i,j+1}|$, donc, par récurrence immédiate, $|a_{ij}|$ est égal à la valeur du bord, donc à 0 !
Ensuite, si x, y, z et t sont fixés, on peut remarquer que les coefficients de A vérifient un système linéaire, de Cramer d'après la première partie de la question !

3. (a) On propose

```
33 def moy(M, i, j):
34     return (M[i - 1, j] + M[i + 1, j] + M[i, j + 1] + M[i, j - 1]) / 4
35
36 def F(A):
37     M = A.copy()
38     for i in range(1, n + 1):
39         for j in range(1, n + 1):
40             M[i, j] = (M[i - 1, j] + M[i + 1, j] + M[i, j + 1] + M[i, j - 1]) / 4
41     return M
```

(b) On propose

```
42 def suite(M, p):
43     A = M.copy()
44     for _ in range(p):
45         A = next(A)
46     return A
```

et, en testant avec, par exemple

```
47 n = 4
48 tab = np.zeros((n + 2, n + 2))
49 tab[0, 1: (n + 1)] = 1
50 tab[n + 1, 1: (n + 1)] = 1
51 tab[1: (n + 1), 0] = 1
52 tab[1: (n + 1), n + 1] = 1
```

on obtient

```
53 array([[ 0.,  1.,  1.,  1.,  1.,  0.],
54        [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.,  1.],
55        [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.,  1.],
56        [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.,  1.],
57        [ 1.,  1.,  1.,  1.,  1.,  1.],
58        [ 0.,  1.,  1.,  1.,  1.,  0.]])
```

qui vérifie la condition du départ !

(c) On remarque que l'application F est une application de la forme $F(M) = \varphi(M) + N$ où N est juste la matrice $F(0)$ et φ est linéaire (et correspond à F avec x, y, z, t nuls). On remarque que pour k assez grand, par récurrence en partant du bord par exemple, $\left\|\varphi^k(M)\right\| < \|M\|$. Ainsi, φ^k est contractante, donc F l'est, donc $A^{(p)}$ converge vers un point fixe de F ! ! (c'est vraiment chaud comme question).

Exercice 61. *ENS MP 2016*. Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'on a : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2,\ M^\top = PMQ$.

2. A-t-on : $\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{C})^2,\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ M^\top = PMQ$?

3. Montrer qu'on a : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists P \in GL_n(\mathbb{C})^2,\ M^\top = PMP^{-1}$.

Correction.

1. Oui, c'est clair car une matrice et sa transposée ont même rang.

2. S'il existait un tel couple $P = (p_{ij})$ et $Q = (q_{ij})$, alors en prenant $M = E_{ab}$ (matrice élémentaire), on obtiendrait, par calcul de coefficient,

$$(PMQ)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} p_{ik}\delta_{ak}\delta_{b\ell}q_{\ell j} = p_{ia}q_{bj}.$$

Or, comme $PMQ = M^\top$, $(PMQ)_{ij} = \delta_{ib}\delta_{ja}$, i.e.

$$\forall (i,j,a,b),\ p_{ia}q_{bj} = \delta_{ib}\delta_{ja}.$$

Soit p_{ia} un coefficient non nul de P. Alors pour tout $b \neq i$ et pour tout $j \neq a$, $q_{bj} = 0$, i.e. tous les coefficients de Q sont nuls mis à par la ligne i et la colonne a, donc Q est de rang $\leqslant 2$, impossible sauf si $n = 2$.
Mais si $n = 2$, on remarque, en prenant $M = \mathrm{I}_2$, que $P = Q^{-1}$, donc on peut écrire $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, avec $ad - bc = 1$. En prenant $M = E_{11}$, on obtient

$$ad = 1,\ -ab = 0,\ cd = 0,\ -cb = 0.$$

Comme $a \neq 1$ et $d \neq 1$, $b = c = 0$, donc P est diagonale, donc on ne peut avoir $PE_{12}P^{-1} = E_{21}$.
C'est donc aussi impossible si $n = 2$.

3. Question beaucoup plus dure, on veut montrer que A et $A^\top$ sont semblables.

(a) Déjà, on montre que c'est vrai si M est cyclique, i.e. $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$. On peut en effet montrer, en prenant un vecteur cyclique, que M est semblable à une matrice compagnon

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Mais C_P est semblable à $C_P^\top$: on prend la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & \iddots & & a_{n-1} & 1 & \\ a_3 & & \iddots & \iddots & & \\ \vdots & a_{n-1} & \iddots & & & \\ a_{n-1} & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

Alors $C_P M = M C_P^\top$ et M est inversible.

(b) Ensuite, par le lemme des noyaux, si u est l'endo canoniquement associé à M, alors E est une somme directe de sous-espaces sur lesquels $u = \lambda \mathrm{Id} + v$ où v est cyclique. Donc sur chacun de ces sous-espaces, la matrice de u est semblable à celle de sa transposée. D'où, en regroupant par blocs les matrices de passage, le résultat.

Exercice 62. *Mines-Ponts MP 2016*. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit A un sous-espace de E de dimension a. Montrer que $\alpha = \{u \in \mathscr{L}(E), A \subset \ker(u)\}$ et $\beta = \{u \in \mathscr{L}(E), u(A) \subset A\}$ sont des sous-espaces de $\mathscr{L}(E)$ et donner leurs dimensions.

2. Soient F, G deux sous-espaces de E. On note f, g, h les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$. Déterminer la dimension de $\gamma = \{u \in \mathscr{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$.

Correction. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit A un sous-espace de E de dimension a. Montrer que $\alpha = \{u \in \mathscr{L}(E), A \subset \ker(u)\}$ et $\beta = \{u \in \mathscr{L}(E), u(A) \subset A\}$ sont des sous-espaces de $\mathscr{L}(E)$ et donner leurs dimensions.

2. Soient F, G deux sous-espaces de E. On note f, g, h les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$. Déterminer la dimension de $\gamma = \{u \in \mathscr{L}(E), u(F) \subset F \text{ et } u(G) \subset G\}$.

1.
- On vérifie déjà que ce sont des sous-espaces vectoriels.
  α n'est pas vide car l'application nulle est de noyau E qui contient A. Ensuite, si u et v sont dans α, et λ, μ des réels, alors pour tout a de A, $(\lambda u + \mu v)(a) = 0$ donc $A \subset \ker(\lambda u + \mu v)$ donc $\lambda u + \mu v \in \alpha$.
  On fait de même pour β.
- Finalement, pour les dimensions, soit $a_1, \ldots, a_p$ une base de A. On la complète en une base $a_{p+1}, \ldots, a_n$

de E. On note $\mathcal{A}$ la base obtenue. Alors, si $u \in \alpha$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1,p+1} & \cdots & m_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{2,p+1} & \cdots & m_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n,p+1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix},$$

d'où $n(n-p)$ coefficients possibles à choisir. Donc la dimension de α est $n(n-p)$.
De même, si $u \in \beta$, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{A}}(u) = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{p,1} & \cdots & m_{p,n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

d'où, np coefficients à choisir, d'où une dimension égale à np.

2. Posons $k = \dim F + G$. Écrivons $E = (F \cap G) \oplus S \oplus T \oplus U$, où S est un supplémentaire de $F \cap G$ dans F, T est un supplémentaire de $F \cap G$ dans G, et U est un supplémentaire de $F + G$ dans E. Soient $(\mathrm{e}_1, \ldots, e_h)$ une base de $F \cap H$, $e_{h+1}, \ldots, e_f$ une base de f, $e_{h+1}, \ldots e_k$ une base de S (les dimensions correspondent bien), et, finalement $e_{k+1}, \ldots, e_n$, complétion de la base déjà créée en une base de E. Alors si $u \in gamma$, $f(F \cap G) \subset F \cap G$, $u(S) \subset F$, $u(T) \subset G$. D'où une matrice dans la base $\mathcal{E}$ de la forme

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,h} & m_{1,h+1} & \cdots & m_{1,f} & m_{1,f+1} & \cdots & m_{1,k} & m_{1,k+1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{h,1} & \cdots & m_{h,h} & m_{h,h+1} & \cdots & m_{h,f} & m_{h,f+1} & \cdots & m_{h,k} & m_{h,k+1} & \cdots & m_{h,n} \\ m_{h+1,1} & \cdots & m_{h+1,h} & m_{h+1,h+1} & \cdots & m_{h+1,f} & m_{h+1,f+1} & \cdots & m_{h+1,k} & m_{h+1,k+1} & \cdots & m_{h+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{f,1} & \cdots & m_{f,h} & m_{f,h+1} & \cdots & m_{f,f} & m_{f,f+1} & \cdots & m_{f,k} & m_{f,k+1} & \cdots & m_{f,n} \\ m_{f+1,1} & \cdots & m_{f+1,h} & m_{f+1,h+1} & \cdots & m_{f+1,f} & m_{f+1,f+1} & \cdots & m_{f+1,k} & m_{f+1,k+1} & \cdots & m_{f+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{k,1} & \cdots & m_{k,h} & m_{k,h+1} & \cdots & m_{k,f} & m_{k,f+1} & \cdots & m_{k,k} & m_{k,k+1} & \cdots & m_{k,n} \\ m_{k+1,1} & \cdots & m_{k+1,h} & m_{k+1,h+1} & \cdots & m_{k+1,f} & m_{k+1,f+1} & \cdots & m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} & \cdots & m_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,h} & m_{n,h+1} & \cdots & m_{n,f} & m_{n,f+1} & \cdots & m_{n,k} & m_{n,k+1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix},$$

d'où, en annulant les coefficients qui doivent l'être,

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,h} & m_{1,h+1} & \cdots & m_{1,f} & m_{1,f+1} & \cdots & m_{1,k} & m_{1,k+1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{h,1} & \cdots & m_{h,h} & m_{h,h+1} & \cdots & m_{h,f} & m_{h,f+1} & \cdots & m_{h,k} & m_{h,k+1} & \cdots & m_{h,n} \\ 0 & \cdots & 0 & m_{h+1,h+1} & \cdots & m_{h+1,f} & 0 & \cdots & 0 & m_{h+1,k+1} & \cdots & m_{h+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_{f,h+1} & \cdots & m_{f,f} & 0 & \cdots & 0 & m_{f,k+1} & \cdots & m_{f,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{f+1,f+1} & \cdots & m_{f+1,k} & m_{f+1,k+1} & \cdots & m_{f+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{k,f+1} & \cdots & m_{k,k} & m_{k,k+1} & \cdots & m_{k,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{k+1,k+1} & \cdots & m_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_{n,k+1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix},$$

d'où une dimension de $h^2 + (f-h)f + (k-f)g + n(n-k)$. Or, $k = \dim(F+G) = f+g-h$, donc $k-f = g-h$, et $n-k = n+h-f-g$ d'où une dimension de

$$h^2 + f^2 - hf + g^2 - hg + n^2 + nh - nf - ng = n^2 + f^2 + g^2 + h^2 - hf - hg + nh - nf - ng$$

.

.

Exercice 63. *Mines-Ponts MP 2016*. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, u et v deux endomorphismes de E tels que $u+v=\mathrm{Id}_E$ et $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)\leqslant n$. Montrer que u et v sont des projecteurs.

Correction. Déjà, on montre que $\mathrm{rg}(u+v)\leqslant \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$. C'est assez simple : si $y\in \mathrm{Im}(u+v)$, $y=u(x)+v(x)\in \mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v)$. Donc

$$\mathrm{rg}(u+v)\leqslant \dim(\mathrm{Im}(u)+\mathrm{Im}(v))=\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)-\dim(\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)\leqslant \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v).$$

Comme $\mathrm{rg}(u+v)=n$ et $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)\leqslant n$, on a $\mathrm{rg}(u+v)=\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)=n$, donc, en particulier, $\mathrm{Im}(u)\cap\mathrm{Im}(v)=\{0\}$, donc, par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(u)\oplus\mathrm{Im}(v)=E$.
Or, pour tout x dans E, $x=u(x)+v(x)$, avec $u(x)\in\mathrm{Im}(u)$ et $v(x)\in\mathrm{Im}(v)$: donc u est le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ et v le projecteur sur $\mathrm{Im}(v)$!

Exercice 64. *Mines-Ponts PSI 2016*. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in GL(E)$. Soit $g\in\mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f+g\in GL(E)\Leftrightarrow \mathrm{Tr}(g\circ f^{-1})\neq -1$.

Correction. $f+g$ est inversible si, et seulement si $\mathrm{Id}+g\circ f^{-1}$ est inversible. Alors $g\circ f^{-1}$ est de rang 1 (car g est de rang 1 et f est inversible). Soit u un vecteur pas dans $\ker(g\circ f^{-1})$, que l'on complète en une base $\mathcal{E}$ de E avec des vecteurs de $\ker(g\circ f^{-1})$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g\circ f^{-1})=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ (*) & & & \\ \vdots & & (0) & \\ (*) & & & \end{pmatrix},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id})=\mathrm{I}_n,\ \text{donc } \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}+g\circ f^{-1})=\begin{pmatrix}\lambda+1 & & & \\ (*) & 1 & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ (*) & & & 1\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est inversible ssi elle est de rang n, i.e., comme elle est diagonale, ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, i.e. ssi $\lambda\neq -1$. Or $\lambda=\mathrm{Tr}(g\circ f^{-1})$. On en déduit donc le résultat.

Exercice 65. *CCINP MP 2018*. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension au moins égale à 2 et $\ell\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$, non nulle. Soit $a\in E\setminus\{0\}$.

1. Déterminer $\dim(\ker(\ell))$.
2. Soit $\ell'\in\mathscr{L}(E,\mathbb{R})\setminus\{0\}$ telle que $\ker(\ell)\subset\ker(\ell')$. Montrer que ℓ et ℓ' sont proportionnelles.
3. Soit f définie par $f:x\mapsto \ell(a)x-\ell(x)a$. Montrer que f est un endomorphisme.
4. On suppose $\ell(a)\neq 0$.
   (a) Déterminer $\ker(f)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres et espaces propres de f. f est-elle diagonalisable ?

Correction.

1. Comme ℓ n'est pas nulle et que $\mathrm{Im}(\ell)\subset\mathbb{R}$, $\dim(\mathrm{Im}(\ell))=1$, donc, par le théorème du rang, $\dim(\ker(\ell))=n-1$ où $n=\dim(E)$.
2. On sait que $\ker(\ell)\subset\ker(\ell')$ et les deux sev sont de même dimension, donc ils sont égaux : notons H cet hyperplan commun. Soit a qui n'est pas dans cet hyperplan. Alors $H\oplus\mathrm{Vect}(a)=E$. Soit alors λ tel que $\ell(a)=\lambda\ell'(a)$ (existe car ni ℓ, ni ℓ' ne sont nuls sur a : sinon par supplémentarité ils seraient nuls sur tout E). Alors pour tout x dans E, si $x=h+\mu a$, avec $h\in H$ et $\mu\in\mathbb{R}$, on a
$$\ell(x)=\ell(h)+\mu\ell(a)=\mu\lambda\ell'(a)=\lambda\ell'(\mu a)=\lambda\ell'(h+\mu a)=\lambda\ell'(x),$$
donc ℓ et ℓ' sont proportionnelle.
3. Le caractère **endo** est évident car si $x\in E$, comme x et a sont dans E, toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs est dans E donc $\ell(a)x-\ell(x)a$ aussi.
Ensuite, si x,y sont dans E et λ dans $\mathbb{R}$,
$$f(\lambda x+y)=\ell(a)(\lambda x+y)-\ell(\lambda x+y)a=\lambda f(x)+f(y),$$
(linéarité de ℓ), d'où la linéarité.
4. (a) Soit x dans $\ker(f)$. Alors $f(x)=0$, i.e. $\ell(a)x=\ell(x)a$, i.e., comme $\ell(a)\neq 0$, $x\in\mathrm{Vect}(a)$.
Réciproquement, si $x\in\mathrm{Vect}(a)$, $x=\mu a$, et $f(x)=\ell(a)\mu a-\ell(\mu a)a=\ell(a)\mu a-\mu\ell(a)a=0$, d'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

(b) Soit λ dans $\mathbb{R}$, valeur propre de f, x vecteur propre associé à λ. Alors $f(x) = \lambda x$, i.e.

$$\ell(a)x - \ell(x)a = \lambda x,$$

i.e. $(\ell(a) - \lambda)x = \ell(x)a$. Donc

- si $\lambda = \ell(a)$, alors $\ell(x) = 0$, i.e. $ker(\ell)$ est sous-espace propre de dimension $n-1$ associé à la valeur propre $\ell(a)$.
- sinon, $x \in \text{Vect}(a) = \ker(\ell)$. Donc $\text{Vect}(a)$ est le sous-espace propre, de dimension 1, associé à la valeur propre nulle.

Donc f est diagonalisable, car la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace tout entier.

Exercice 66. *ENS Saclay 24*. Soit E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{N}$. On définit $F : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F(u)_n = u_{n+1}$$

1. Montrer que F est linéaire.

Correction. C"est évident.

2. Est-elle injective ? Surjective ?

Correction. On remarque que la suite vérifiant $u_0 = 42$ et $u_i = 0$ pour tout $i \geqslant 1$ est dans le noyau de F donc D n'est pas injective.
En revanche, F est surjective : si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, la suite définie par $u_0 = 42$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n = v_{n-1}$ est bien un antécédent de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Construire G endomorphisme linéaire de E tel que $F \circ G = \text{Id}_E$.

Correction. On pose

$$G(v)_n = \begin{cases} 42 \text{ si } n = 0 \\ v_{n-1} \text{ si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

On remarque qu'alors $F \circ G = \text{Id}_E$.

4. Que vaut $G \circ F$?

Correction. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $G \circ F$ est la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 42$ et pour $n \geqslant 1$, $v_n = u_n$.

5. Conclure.

Correction. On n'est pas en dimension finie, c'est normal d'être inversible à droite mais pas à gauche !
De plus, on peut remarquer que $G \circ F$ est un projecteur (je ne sais pas si c'était attendu).

On note désormais E l'ensemble des suites indexées sur $\mathbb{Z}$. On définit $H : E \to E$ par :
Pour $u \in E$, et, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$H(u)_n = u_{n+1} + u_{n-1}$$

6. Montrer que H est linéaire. Est-elle injective ?

Correction. La linéarité est claire. Pour l'injectivité, on remarque que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{2n} = (-1)^n \text{ et } u_{2n+1} = (-1)^n$$

est dans le noyau de H. Donc H n'est pas injective.

7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $u \in \ker(H - \text{Id}_E)$. Trouver $M_\lambda \in M_2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{pmatrix} = M_\lambda^k \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Correction. Si $u \in \ker(H - \text{Id}_E)$, alors pour tout n,

$$u_{n+1} + u_{n-1} = \lambda u_n,$$

donc $u_{n+1} = \lambda u_n - u_{n-1}$, donc

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice convient.

8. Pour $|\lambda| \neq 2$, montrer que M_λ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.

Correction. On calcule

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x-\lambda \end{vmatrix} = x(x-\lambda) + 1 = x^2 - \lambda x + 1,$$

qui possède, pour $\lambda \neq 1$, deux valeurs propres complexes distinctes :

- si $|\lambda| > 2$,
$$\frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}$$
- si $|\lambda| < 2$,
$$\frac{\lambda \pm i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}$$

9. Existe-t-il des suites de $\ker(H - \lambda \mathrm{Id}_E)$ périodiques ? Les caractériser.

Correction. Une suite de $\ker(H - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est périodique lorsque les suites des puissances des valeurs propres sont périodiques, ce qui est possible :

- si $|\lambda| > 2$ et $\dfrac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = \pm 1$. Or,
$$\begin{aligned} \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} = 1 &\Leftrightarrow \pm\sqrt{\lambda^2 - 4} = 2 - \lambda \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 4 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 \\ &\Rightarrow \lambda = 2. \end{aligned}$$
Ce cas est à exclure.
- si $|\lambda| < 2$, on calcule le module et un argument de
$$\frac{\lambda + i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}$$
Son module vaut
$$\frac{\lambda^2 + 4 - \lambda^2}{4} = 1,$$
On note $\theta = \mathrm{Arccos}\dfrac{\lambda}{2}$. Alors
$$\frac{\lambda + i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2} = \mathrm{e}^{i\theta}$$

Ainsi, les suites de $\ker(H - \lambda \mathrm{Id}_E)$ sont périodiques si et seulement si la suite $(\mathrm{e}^{i\theta n})_{n\in\mathbb{Z}}$ l'est, i.e. si et seulement s'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\theta = \dfrac{p}{q}\pi$.
Si on revient au cas particulier de l'énoncé, $\lambda = 1$. Les racines sont donc

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{6}},$$

donc toutes les suites de $\ker(H - \mathrm{Id}_E)$ sont périodiques.

10. Étudier le cas $|\lambda| = 2$.

Correction. Pour $|\lambda| = 2$, on disjoint les cas :

- si $\lambda = 2$, alors les suites de $\ker(H - \mathrm{Id}_E)$ vérifient
$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = 0,$$
donc sont de la forme
$$u_n = \alpha + \beta n,$$
où α et β sont réels. Les seuls suites périodiques sont alors constantes.
- si $\lambda = -2$, alors les suites de $\ker(H - \mathrm{Id}_E)$ vérifient
$$u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1} = 0,$$
donc sont de la forme
$$u_n = (\alpha + \beta n)(-1)^n,$$
où α et β sont réels. Les seuls suites périodiques sont alors constantes.

Exercice 67. *Mines-Ponts MP 2026*. **1.** Soit $P(X) = X^2 + aX + b$, x_1, x_2 ses deux racines. On note $N_1 = x_1 + x_2$ et $N_2 = x_1^2 + x_2^2$. Calculer $\begin{vmatrix} 2 & N_1 \\ N_1 & N_2 \end{vmatrix}$.

Correction. On calcule : ce déterminant vaut
$$\begin{aligned} 2N_2 - N_1^2 &= 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1 + x_2)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 \\ &= \left(\frac{-a-\delta}{2} - \frac{-b+\delta}{2}\right)^2 \text{ où } \delta \text{ est une racine de } a^2 - 4b \\ &= \delta^2 = a^2 - 4b \end{aligned}$$

2. Soit $P(X) = X^3 + pX + q$, soient x_1, x_2, x_3 les trois racines de P (non nécessairement distinctes). On note $N_k = \sum_{i=1}^{3} x_i^k$. Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} 3 & N_1 & N_2 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ N_2 & N_3 & N_4 \end{vmatrix}$.

Correction. On n'a pas envie de faire du Sarrus ou je ne sais quoi du genre... Là, le « 3 » peut surprendre. Si on note $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$, alors la matrice dont on calcule le déterminant est $VV^\top$. Mais alors le déterminant recherché est
$$\det(V)^2 = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$
On peut en fait calculer le déterminant autrement, en calculant explicitement N_1, N_2, N_3 et N_4. D'après les relations coefficients-racines pour le polynôme $X^3 + pX + q$, la somme des racines est nulle (le coefficient en X^2 valant 0), donc $N_1 = 0$. On en déduit :
$$N_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0^2 - 2p = -2p.$$
Pour les sommes supérieures, on exploite le fait que pour chaque racine, $x_i^3 = -px_i - q$. En sommant cette relation sur les trois racines, on obtient :
$$N_3 = -pN_1 - 3q = -3q.$$
De même, en multipliant la relation par x_i, on a $x_i^4 = -px_i^2 - qx_i$, ce qui donne en sommant :
$$N_4 = -pN_2 - qN_1 = -p(-2p) - 0 = 2p^2.$$
La matrice s'écrit alors de façon bien plus simple, et son déterminant se calcule directement (par exemple en

développant par rapport à la première ligne) :

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2p \\ 0 & -2p & -3q \\ -2p & -3q & 2p^2 \end{vmatrix} = 3\left(-4p^3 - 9q^2\right) - 0 - 2p\left(0 - 4p^2\right)$$
$$= -12p^3 - 27q^2 + 8p^3$$
$$= -4p^3 - 27q^2.$$

La confrontation de ces deux méthodes de calcul fournit d'ailleurs une démonstration élégante de l'expression du discriminant du polynôme $X^3 + pX + q$:

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 3} (x_i - x_j)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

3. Généraliser à un n quelconque : pour $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, trouver un lien entre $\begin{pmatrix} n & N_1 & \dots \\ \vdots & & \\ N_{n-1} & & N_{2n-2} \end{pmatrix}$ et la matrice de Vandermonde de $(x_1, \dots, x_n)$.

Correction. On a déjà répondu à la question 2 !

Exercice 68. *Mines-Télécom MP 2026*. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi : M \mapsto AMB$. Déterminer la trace de ϕ.

Correction. On rappelle que la trace de ϕ est la trace de la matrice de ϕ dans n'importe quelle base (la même au départ et à l'arrivée) : choisissons la base canonique $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Soient (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$. On va calculer $\phi(E_{ij})$ et déterminer la composante de $\phi(E_{ij})$ selon E_{ij}, i.e. son coefficient (i,j). On peut, comme c'est un oral, faire le calcul au tableau et dessiner la matrice en question. Je vais tout écrire avec la formule du produit. On écrit que

$$[\phi(E_{ij})]_{ij} = [AE_{ij}B]_{ij}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [A]_{ik}[E_{ij}]_{k\ell}[B]_{\ell j}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} [A]_{ik}\delta_{ik}\delta_{\ell j}[B]_{\ell j}$$
$$= [A]_{ii}[B]_{jj}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(\phi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [\phi(E_{ij})]_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_{ii}[B]_{jj}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii} \sum_{j=1}^{n} [B]_{jj}$$
$$= \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B).$$

Exercice 69. *Mines-Ponts MP 2019*. (RMS 2018-2019 517) Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe U et V inversibles telles que $\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B)$.

2. Montrer que, si $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \geqslant n$, il existe U et V inversibles telles que UA + BV soit inversible.

Correction. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose A et B de rangs respectifs r et s, et que $r+s \leqslant n$. On sait que A est équivalente à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_r \end{pmatrix}$

et B est équivalente à $\begin{pmatrix} 0_{n-s} & 0_{n-s,s} \\ 0_{s,n-s} & \mathrm{I}_s \end{pmatrix}$. Donc on dispose de P, Q, R, S inversibles telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_r \end{pmatrix} \text{ et } RBS = \begin{pmatrix} 0_{n-s} & 0_{n-s,s} \\ 0_{s,n-s} & \mathrm{I}_s \end{pmatrix}$$

Ainsi, $PAQ + RBS$ est de rang $r + s$. Mais

$$PAQ + RBS = R(R^{-1}PA + BSQ^{-1})Q.$$

Or, $R(R^{-1}PA + BSQ^{-1})Q$ et $R^{-1}PA + BSQ^{-1}$ sont de même rang, i.e. $r + s$, d'où le résultat en posant $U = R^{-1}P$ et $V = SQ^{-1}$.

Si $r + s \geqslant n$, on fait de même, mais le rang de $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_r \end{pmatrix}$ et $RBS = \begin{pmatrix} 0_{n-s} & 0_{n-s,s} \\ 0_{s,n-s} & \mathrm{I}_s \end{pmatrix}$ est n. Montrer qu'il existe U et V inversibles telles que $\mathrm{rg}(UA + BV) = \min(n, \mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B)$.

2. Question bête, c'est exactement ce que l'on vient de faire...

7 Exercices en + (TD 29/09)

Exercice 70. *Mines-Ponts 24*. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A_{i,j} = P(x+i+j-2)$. Montrer que A n'est pas inversible.

Correction. On note, pour i dans $[\![1, n]\!]$,

$$Q_i(X) = P(x+i+X-2).$$

Alors la famille $(Q_1, \dots, Q_n)$ est une famille de n vecteurs dans un espace de dimension $n-1$, donc elle est liée. Cette famille est liée : il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Mais alors, pour tout j, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i(j) = 0_{\mathbb{R}}$, ce qui assure que, si $L_1, \dots, L_n$ sont les lignes de A, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0_{1,n}$. Ainsi, les lignes de A sont liées donc A n'est pas inversible.

Exercice 71. *Mines-Ponts 2015*. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0$.
Indication : Montrer que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+\mathrm{i}B)\det(A-\mathrm{i}B)$.

Correction. **Explication de la démarche. ATTENTION !** On ne peut pas écrire que $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A^2+B^2)$, et en plus, cette quantité n'est pas positive... Non, il faudra certainement utiliser le déterminant par blocs, mais le détemrinant **triangulaire par blocs.** Je ne veux pas sortir de solution du chapeau (d'autant plus qu'au moment où je rédige ce corrigé, je n'ai plus l'« astuce »). On va essayer d'écrire $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ comme un produit de deux matrices triangulaires par blocs, la première de déterminant $A+iB$, la seconde de déterminant $A-iB$. On peut d'abord essayer

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ C & A-iB \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & D \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

Mais on se rend compte que ça ne marche pas. Ensuite, on peut se dire que l'on va essayer d'écrire $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ comme un produit de matrices **non triangulaires par blocs, mais faites de sorte que lorsqu'on calcule leur déterminant, on se ramène à des matrices triangulaires par blocs.** Par exemple, si je prends la matrice $\begin{pmatrix} A & -iB \\ \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, alors le déterminant de cette matrice est, en faisant des opérations sur les colonnes, $\begin{vmatrix} A+iB & -iB \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{vmatrix}$.
Bon, à ce moment-là, je patine sur l'exercice, je n'arrive pas à trouver de produit astucieux...
Du coup je change de point de vue : j'ai parlé d'opérations élémentaires... Est-ce que je peux faire des opérations élémentaires qui transforment aisément mon déterminant ?

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A & -B \\ B+iA & A-iB \end{vmatrix} \text{ en faisant } L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + iL_1,\ L_{n+2} \leftarrow L_{n+2} + iL_2, \dots \\
&= \begin{vmatrix} A+iB & -B \\ 0_n & A-iB \end{vmatrix} \text{ en faisant } C_1 \leftarrow C_1 - iC_{n+1},\ C_2 \leftarrow C_2 - iC_{n+2}, \dots \\
&= \det(A+iB)\det(A-iB) \\
&= \det(A+iB)\overline{\det(A-iB)} \\
&= |\det(A+iB)|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

D'où le résultat !

Exercice 72. *Mines 24*. Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible. Calculer alors M^{-1}.

Correction. Notons $C_1, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots C_{2n}$ les colonnes de M. Pour calculer le déterminant de A, on fait les opérations $C_{n+i} \leftarrow C_{n+i} - C_i$ pour i allant de 1 à n et on obtient

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{vmatrix} = \det(A)\det(B-A).$$

On en déduit que M est inversible si et seulement si A et $B - A$ sont inversibles. Pour trouver l'inverse de M, je remarque que

$$\begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix} = M \times T,$$

où $T = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$, d'inverse $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix} \times T^{-1} \text{ donc } M^{-1} = T \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix}^{-1}.$$

Or, pour calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix}$, on sait que cet inverse va être triangulaire par blocs : on le cherche sous la forme $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ C & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}$. Or,

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ C & (B-A)^{-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0_n \\ A & B-A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0_n \\ CA + (B-A)^{-1}A & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

En prenant $C = -(B-A)^{-1}$, on obtient donc l'inverse désiré. Donc

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & -\mathrm{I}_n \\ 0_n & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A^{-1} & 0_n \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + (B-A)^{-1} & -(B-A)^{-1} \\ -(B-A)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}}$$

Exercice 73. *Mines 24*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice n.

1. Justifier l'existence d'un vecteur $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$. En déduire que la famille $\left(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ est libre.

   Correction. Comme $A^{n-1} \neq 0_n$, on en déduit qu'il existe $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $A^{n-1}X \neq 0$. Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que

   $$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i A^i X_0 = 0.$$

   Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$, soit k le plus petit indice tel que $\lambda_k \neq 0$. Alors

   $$\lambda_k A^k X_0 + \dots + \lambda_{n-1} A^{n-1} X_0 = 0,$$

   donc, en multipliant par A^{n-1-k}, on obtient

   $$\lambda_k A^{n-1} X_0 + \lambda_{k+1} \underbrace{A^n X_0}_{=0_n} + \lambda_{k+2} \underbrace{A^{n+1} X_0}_{=0_n} + \dots = 0_n,$$

   soit $\lambda_k A^{n-1} X_0 = 0_n$ donc, comme $A^{n-1}X_0 \neq 0$, $\lambda_k = 0$, ce qui est absurde ! Donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (0, \dots, 0)$.

2. Montrer que A est semblable à $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction. Comme la famille $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ est une famille libre de n éléments, c'est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Dans cette base, la matrice de $f_A : X \mapsto AX$ est de la forme donnée par l'énoncé, ce qui signifie que A est semblable à la matrice donnée par l'énoncé.

On note, si N est nilpotente d'indice p, $\mathrm{e}^N = \sum_{k=0}^{p} \frac{N^k}{k!}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $\lambda\left(e^{J_n} - \mathrm{I}_n\right)$ est nilpotente. Préciser son indice de nilpotence.

Correction. On remarque que

$$\mathrm{e}^{J_n} - \mathrm{I}_n = \sum_{\boxed{k=1}}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ & 0 & 1 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{(n-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & (0) & & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}^\top$$

On a alors une matrice triangulaire inférieure stricte, avec une sous-diagonale non nulle, elle est nilpotente d'indice $n-1$.

4. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = \lambda P^{-1} e^{J_n} P$.

Correction. On sait que $\lambda(\mathrm{e}^{J_n} - \mathrm{I}_n)$ est nilpotente d'indice n, donc est semblable à J_n : on dispose de P telle que

$$\lambda \mathrm{e}^{J_n} - \lambda \mathrm{I}_n = P J_n P^{-1}.$$

Ainsi,

$$J_n = \lambda P^{-1} \mathrm{e}^{J_n} P - \lambda P^{-1} \mathrm{I}_n P = \lambda P^{-1} e^{J_n} P - \lambda \mathrm{I}_n.$$

Le résultat est ainsi prouvé.

5. En déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\lambda I_n + J_n = e^B$.

Correction. Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} P^{-1}\mathrm{e}^{J_n} P &= P^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{J_n^k}{k!} P \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P^{-1} J_n^k P}{k!} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(P^{-1} J_n P)^k}{k!} \\ &= \mathrm{e}^{P^{-1} J_n P}, \end{aligned}$$

car $P^{-1} J_n P$ est aussi nilpotente d'indice $n-1$.

Exercice 74. *Mines PC 23*. Soit $(f_1, \dots, f_p) \in (\mathcal{L}(E, \mathbb{C}))^p$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

1. $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre,

2. l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array} \right.$ est surjective,

3. $\exists (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $\det\left(\left(f_i(x_j)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\right) \neq 0$

Correction. Procédons par implications circulaires :

- si $(f_1, \dots, f_p)$ est une famille libre, on sait déjà que, en notant $n = \dim(E) = \dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{C})$, on a $n \geqslant p$ (une famille libre contient moins d'éléments que la dimension de l'espace).
  Ensuite, on va déterminer la dimension de $\ker(\varphi)$. On fixe une base $\mathscr{B}$ de E, on note L_i la matrice de f_i dans cette base au départ et la base (1) de $\mathbb{C}$ à l'arrivée : c'est une matrice-ligne. La liberté de $(f_1, \dots, f_p)$ assure que $L_1, \dots, L_p$ forme une famille libre de p éléments de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Mais la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ au départ et la base canonique de $\mathbb{C}^p$ à l'arrivée est la matrice $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} in \mathscr{M}_{p,n}$. Comme $p \leqslant n$ et que $(L_1, \dots, L_p)$ est libre, le rang de M est égal à p. Donc le rang de φ est égal à p, donc, comme $\dim(\mathbb{C}^p) = p$, φ est surjective.
- si φ est surjective, on prend $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{C}^p$, et on pose x_i un antécédent de e_i par φ. Alors si $A = (f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, par définition, $A = \mathrm{I}_p$, de déterminant non nul.
- supposons que l'on dispose de $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ tel que $\det\left((f_i(x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant p}\right) \neq 0$. Montrons que $(f_1, \dots, f_p)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{C})}$. Alors pour tout j, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x_j) = 0_{\mathbb{C}}$, ce qui signifie que
$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$
où A est la matrice $(f_j(x_i))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ (attention aux indices i et j !) Mais A est de déterminant non nul, donc est inversible, donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exercice 75. *CCINP 22*. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et f un endomorphisme d'un espace E, représenté par A dans une base $\mathscr{B}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\left(f^2\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - 2\,\mathrm{Id}_E\right)$.

Correction. Faisons des calculs concrets : f^2 est représenté par la matrice
$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ainsi, si $X \in E$ est représenté par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a les équivalences
$$X \in \ker(f) \Leftrightarrow A^2 X = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0.$$
Ainsi, $\ker(f^2)$ est un hyperplan, d'équation $x + y - z = 0$.

On a aussi les équivalences

$$\begin{aligned} X \in \ker(f - 2\mathrm{Id}_E) &\Leftrightarrow (A - 2\mathrm{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -2z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \ker(f^2)$ donc, comme $\ker(f^2)$ est un hyperplan,

$$\ker(f^2) \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id}) = E.$$

2. Trouver un vecteur de $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ qui ne soit pas dans $\mathrm{Ker}(f)$.

Correction. On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \ker(f)$ et pourtant $1 + 0 - 1 = 0$.

3. Trouver une base $\mathscr{B}'$ dans laquelle f soit représenté par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction. (on identifie les vecteurs et leur représentation par des éléments de $\mathbb{R}^3$)
On sait que f n'est pas inversible donc $\dim(\ker(f)) \geqslant 1$. Comme $\ker(f) \neq \ker(f^2)$ on sait que $\dim(\ker(f)) = 1$.
On prend le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ trouvé précédemment. Alors $e_1 = f(e_2) \in \ker(f)$ (et (e_1, e_2) est clairement libre), donc (e_1, e_2) est une base de $\ker(f^2)$. On prend ensuite $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui est une base de $\ker(f - 2\mathrm{Id})$.
Par la supplémentarité démontrée en début d'exercice, on sait que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. Dans cette base, la matrice de f est exactement la matrice désirée.

4. Montrer que si un endomorphisme g commute avec f alors $\mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ est stable par g.

Correction. Soit $x \in \ker(f^2)$. Alors $f^2(g(x)) = f^2 \circ g(x) = g \circ f^2(x) = 0$ donc $g(x) \in \ker(f^2)$.

5. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g tel que $g \circ g = f$.

Correction. Supposons qu'il existe un tel g. Alors g commute avec f donc il stabilise $F = \ker(f^2)$. On peut donc considérer $u = f_F$ et $v = g_F$. Alors $u = v \circ v$.
On a $u^2 = 0_{\mathscr{L}(F)}$ donc $v^4 = 0_{\mathscr{L}(F)}$, donc v est nilpotente, donc $v^{\dim(F)} = 0_{\mathscr{L}(F)}$, i.e. $v^2 = 0_{\mathscr{L}(F)}$ donc $u = 0_{\mathscr{L}(F)}$, **absurde !** D'où le résultat demandé.

Exercice 76. *Navale MP 24*. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :

(i) $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(MAB) = \mathrm{Tr}(MBA)$,

(ii) M est une homothétie (c'est-à-dire de la forme $\lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Indication. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, que vaut $\mathrm{Tr}(ME_{ij})$?

Correction. L'implication (ii)⇒(i) est immédiate : si on dispose de λ tel que $M = \lambda \mathrm{I}_n$, alors si A et B sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{Tr}(MAB) = \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{I}_n AB) = \lambda \mathrm{Tr}(AB) = \lambda \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(\lambda \mathrm{I}_n BA) = \mathrm{Tr}(MBA).$$

Pour l'implication réciproque, on suppose que pour toutes matrices carrées A et B, $\mathrm{Tr}(MAB) = \mathrm{Tr}(MBA)$.

- soit $i \neq j$. On prend $A = E_{ii}$ et $B = E_{ij}$. Alors $AB = E_{ij}$ et $BA = 0_n$. Donc $\mathrm{Tr}(ME_{ij}) = 0$. Or, ME_{ij} est une matrice avec des zéros partout, sauf à la colonne j, qui contient la colonne i de M. Ainsi, le seul terme diagonal non nul de ME_{ij} est $[M]_{ji}$. Donc $\mathrm{Tr}(ME_{ij}) = [M]_{ji}$. Donc si $i \neq j$, $[M]_{ji} = 0$.
- soient $i \neq j$ $A = E_{ij}$ et $B = E_{ji}$. Alors

  $$\mathrm{Tr}(MAB) = \mathrm{Tr}(ME_{ij}E_{ji}) = \mathrm{Tr}(ME_{ii}) = [M]_{ii},$$

  et

  $$\mathrm{Tr}(MBA) = \mathrm{Tr}(ME_{ji}E_{ij}) = \mathrm{Tr}(ME_{jj}) = [M]_{jj}$$

  Donc tous les coefficients diagonaux de M sont égaux, à, disons, λ donc $M = \lambda \mathrm{I}_n$.

Exercice 77. Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ \quad P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

Correction. . Déjà, f_α est linéaire. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha(\lambda P + \mu Q) &= (1+X)(\lambda P + \mu Q)' - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)(\lambda P' + \mu Q') - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)\lambda P' + (1+X)\mu Q' - \alpha\lambda P - \alpha\mu Q \\ &= \lambda((1+X)P' - \alpha P) + \mu((1+X)Q' - \alpha Q) \\ &= \lambda f_\alpha(P) + \mu f_\alpha(Q), \end{aligned}$$

d'où la linéarité.
. Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((1+X)P') \leqslant 1 + n - 1 = n$, donc $\deg((1+X)P' - \alpha P) \leqslant n$.
Donc f_α est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \ldots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction. La famille $(1, 1+X, (1+X)^2, \ldots, (1+X)^n)$ est une famille de $n+1$ polynômes non nuls à degrés échelonnés, donc est libre. De cardinal n dans un espace de dimension n, elle est donc une base de cet espace.

3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.

Correction. Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Alors

$$f_\alpha((1+X)^k) = (1+X)k(1+X)^{k-1} - \alpha(1+X)^k = (k-\alpha)(1+X)^k,$$

d'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_\alpha)$ est la matrice diagonale de diagonale $(-\alpha, 1-\alpha, 2-\alpha, \ldots, n-\alpha)$.

4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Correction. f_α est inversible si et seulement si A_α est inversible. Une matrice diagonale étant inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls, A_α est inversible si et seulement si $\alpha \notin [\![0,n]\!]$.

Exercice 78. *X 24*. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Exercice 79. *Navale 2025*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit :

$$D_A = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top + M = \mathrm{Tr}(M)A \right\}.$$

Déterminer l'ensemble D_A et sa dimension.

Correction. On procède par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $M \in D_A$. Alors $M + M^\top = \mathrm{Tr}(M)A$.
Donc $2\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(A)$.

- Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 2$, alors nécessairement, $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Mais alors $M + M^\top = 0$ donc $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
- Sinon, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est toujours une possibilité. Mais, pour M de trace non nulle, on remarque qu'avoir une solution implique que A est symétrique (car alors on aurait $A = \dfrac{1}{\mathrm{Tr}(M)}(M + M^\top)$.
  - si $A \notin \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il n'y a pas de solution de trace non nulle,
  - sinon, On écrit $M = B + C$ où B est symétrique et C antisymétrique. *Voilà ce qu'on aurait dû faire depuis le début.* On obtient alors, comme $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(B)$,

    $$2B = 2\mathrm{Tr}(B)A,$$

    donc B est colinéaire à A, $B = \lambda A$. Mais A est solution de l'équation si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) = 2$. On en déduit, dans ce cas (et seulement ce cas), que B est dans l'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$.

Synthèse. En conclusion :

- si A est symétrique, de trace égale à 2, alors l'ensemble des solutions est

  $$\{\lambda A + B,\ \lambda \in \mathbb{K},\ B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$$

- sinon, l'ensemble est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 80. *Centrale PSI 2025*.

1. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

2. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{M}_p(\mathbb{C}))$ telle que pour toutes matrices A et B, $f(AB) = f(A)f(B)$. Soit ϕ : $\left| \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad M \longmapsto \mathrm{Tr}(f(M)) \end{array} \right.$ Montrer que pour toutes A et B, $\phi(AB) = \phi(BA)$

3. En déduire que $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ tel que pour toute matrice M, $\mathrm{Tr}(f(M)) = \alpha\,\mathrm{Tr}(M)$

Exercice 81. *Mines-Telecom PSI 2025*. **1.** Rappeler la définition de deux matrices semblables.

2. Soit A une matrice non inversible et non nulle.
  (a) Démontrer que A est semblable à une matrice A' de première colonne nulle.
  (b) Démontrer qu'il existe (i, j) dans $\{1, \dots, n\}^2$ tels que $A'E_{ij} = E_{ij}A' = 0$, où E_{ij} est la matrice avec des zéros partout, sauf sur la i-ème ligne et la j-ème colonne.
  (c) En déduire qu'il existe B non nulle telle que $AB = BA = 0$.

3. Étudier la réciproque de la propriété précédente.

Exercice 82. *CCINP PSI 2015*. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $\mathrm{Im}(f) = F$ et $\ker(f) = G$.

Correction. **Analyse.** Si f existe, par le théorème du rang $\dim F + \dim G = \dim E$.
Synthèse. Supposons $\dim F + \dim G = \dim E$. Soit H supplémentaire de G, $(e_1, \dots, e_m)$ base de G, $(e_{m+1}, \dots, e_n)$ base de H. $(f_{m+1}, \dots, f_n)$ base de F. Définissons f par $f(e_i) = 0$ pour $i \leqslant m$, $f(e_i) = f_i$ pour $i \geqslant m+1$. Alors $\ker f = G$ et $\mathrm{Im} f = F$.
CNS : $\dim F + \dim G = \dim E$.

Exercice 83. *Navale MP 2017*. (BEOS 3430-2)

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$u_A : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ \quad x \mapsto (\det(C_1, \dots, C_{j-1}, x, C_{j+1}, \dots, C_n))_{1 \leqslant j \leqslant n} \end{array} \right.$$

L'application u_A est-elle :

- linéaire ?
- injective/surjective/bijective ?
- continue ?

Correction. L'application u_A est-elle :

- la linéarité vient de la n-linéarité du déterminant.
- l'application u_A est bijective si et seulement si A est inversible. En effet,
  - si A est inversible, alors $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Soit alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Par caractère n-linéaire et alterné du déterminant, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$,
  $$\begin{aligned}\det(C_1, \dots, C_{j-1}, x, C_{j+1}, \dots, C_n) &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \dots, C_n) \\ &= x_j \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) = x_j \det(A).\end{aligned}$$
  Donc $u_A = \det(A)\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^n}$, donc u_A est bien sûr inversible.
  - si A n'est pas inversible, alors une colonne C_k est combinaison linéaire des autres.
  . Si C_k est nulle, alors pour tout $i \neq k$ tel que $C_i \neq 0$, $u_A(C_i) = 0$ (remarque : si A est la matrice nulle, clairement u_A est l'application nulle.).
  . Sinon, par caractère alterné du déterminant, $u_A(C_k) = 0$, donc C_k est un vecteur non nul dans $\ker(u_A)$ donc u_A n'est pas injective donc pas bijective.
- L'application u_A étant linéaire entre espaces de dimension finie, elle est continue.

Exercice 84. *Mines-Télécom MP 2026*. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Démontrer l'équivalence $A^2 = A \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{Tr}(A) \\ \mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - A) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n - A) \end{cases}$.

Correction. . Déjà, si $A^2 = A$, alors A est un projecteur. Ainsi, A est semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, et $\mathrm{I}_n - A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-r} \end{pmatrix}$. On a donc $\mathrm{Tr}(A) = r = \mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n - A) = n - r = \mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - A)$.
. Réciproquement, si $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - A) \leqslant \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n - A)$, alors

$$\begin{aligned}\dim(\ker(A)) + \dim(\ker(\mathrm{I}_n - A)) &= n - \mathrm{rg}(A) + n - \mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - A) \\ &\geqslant 2n - \mathrm{Tr}(A) - \mathrm{Tr}(\mathrm{I}_n - A) \\ &\geqslant n.\end{aligned}$$

Or, comme $\ker(A) \cap \ker(\mathrm{I}_n - A) = \{0\}$ (les sous-espaces propres sont en somme directe), on en déduit que $\ker(A) \oplus \ker(\mathrm{I}_n - A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que A est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$, si on note $r = \dim(\ker(\mathrm{I}_n - A))$.

Indications

Ex 1. Regarder la valuation (le terme de plus bas degré) de chaque polynôme $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

Ex 2. **1.** Une matrice de rang 1 a son image engendrée par un seul vecteur : toutes ses colonnes lui sont proportionnelles.
3. Chercher l'inverse sous la forme $I_n + \lambda M$.

Ex 3. **1.** Traiter d'abord chaque vecteur, puis comparer les scalaires sur deux vecteurs libres.
2. Récurrence sur n : si $A \neq 0$, elle n'est pas une homothétie, donc il existe x avec (x, Ax) libre.

Ex 5. Pour la majoration, penser à $\mathrm{Im}(f+g)$. Pour la minoration, écrire $f = (f+g) + (-g)$.

Ex 7. On pourra regarder les induits de $u_1, \dots, u_{n-1}$ sur $\mathrm{Im}(u_n)$ (en vérifiant déjà qu'ils stabilisent cet espace).

Ex 10. Écrire $P = P_1 + iP_2$ avec P_1, P_2 réelles, et considérer la fonction $t \mapsto \det(P_1 + tP_2)$.

Ex 11. Développer $(X + a_i)^n$ par la formule du binôme et se ramener à un système de Vandermonde.

Ex 12. **1.** Une combinaison de ces fonctions est affine par morceaux : regarder les ruptures de pente.
2. Ordonner les exposants et factoriser par la plus grande exponentielle.

Ex 13. Chercher les relations linéaires évidentes entre ces fonctions.

Ex 14. **2.** Chercher les suites géométriques (r^n) appartenant à F.

Ex 18. Traduire $g \circ f = 0$ en une inclusion, et comparer $\mathrm{Im}(f+g)$ à $\mathrm{Im}f + \mathrm{Im}g$.

Ex 20. **1.** Appliquer le théorème du rang à la restriction de f à $\mathrm{Im}g$.
2. Réutiliser l'égalité $\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg}g - \dim(\ker f \cap \mathrm{Im}g)$.

Ex 21. **2.** Le polynôme $X^2 - 3X + 2$ se factorise. Effectuer la division euclidienne de X^p par ce polynôme.

Ex 22. Raisonner par l'absurde sur une coordonnée de plus grand module d'un vecteur du noyau.

Ex 23. **1.** Comparer les dimensions dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 24. **1.** Penser à la trace.

Ex 25. Décomposer M en sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.

Ex 26. **1.** Il suffit d'écrire la commutation avec chaque $E_{i,j}$.

Ex 27. **2.** Partir d'une base d'un supplémentaire de $\ker u$; ses images forment une base de $\mathrm{Im}u$.

Ex 28. Sens réciproque : un commutateur est de trace nulle. Sens direct : se ramener, par similitude, à une matrice de diagonale nulle, puis chercher A diagonale à coefficients distincts.

Ex 29. Pour l'inclusion réciproque, engendrer les $E_{i,j}$ $(i \neq j)$ puis écrire $E_{i,i} - E_{j,j}$ comme somme de deux matrices nilpotentes.

Ex 30. **2.** Le polynôme $X^2 + aX + b$ étant irréductible sur $\mathbb{R}$, munir E d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel en posant $z \cdot x$ via l'action de f.

Ex 31. **3.** Calculer d'abord $\dim\ker s$, c'est-à-dire la dimension de l'espace des matrices dont toutes les sommes de lignes et de colonnes sont nulles.

Ex 32. **2.** Utiliser la formule du binôme, valable car les matrices commutent.

Ex 34. **1.** Appliquer u^{p-1}, puis u^{p-2}, etc. à une relation de dépendance linéaire.

Ex 35. Fixer x_0 tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$; la famille $(x_0, \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base. Comparer v et un polynôme en u bien choisi sur x_0.

Ex 37. **1.** Si Φ n'était pas surjective, son image serait incluse dans un hyperplan de $\mathbb{K}^n$.

Ex 38. Pour le sens direct, introduire $\Psi : x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$ et factoriser φ par Ψ.

Ex 41. **2.** Décomposer $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$ et introduire le polynôme correspondant.

Ex 43. **1.** Fixer $x_1, \dots, x_{n-1}$ et voir $\det V$ comme un polynôme en x_n.

Ex 44. **1.** Développer selon la première colonne, puis à nouveau selon la première ligne du mineur obtenu.

Ex 46. 1. Distinguer selon que A est inversible ou non.

Ex 47. 1. Effectuer des opérations par blocs sur les colonnes puis les lignes.

Ex 48. 2. Distinguer les cas et remarquer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = 0$ si A n'est pas inversible.

Ex 49. Introduire $T = (t_{i,j})$ avec $t_{i,j} = 1$ si $i \mid j$ et 0 sinon, $D = \mathrm{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$ (φ = indicatrice d'Euler), et utiliser $\displaystyle\sum_{d|k} \varphi(d) = k$.