

MP – Programme de colles

Semaine 02 – du 21 au 25 septembre 2026

Programme en bref

- cours sur l'intégration, quelques exos classiques de polynômes et le tout début de l'algèbre linéaire.
- exos d'intégration et éventuellement de révision de sup sur les polynômes.

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Intégrales de Riemann.
2. Intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$.
3. Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.
4. Théorèmes de sommation des relations de comparaison.
5. Exemple : équivalents en 0 et en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{sh}(t)}$.
6. Si P est srs sur $\mathbb{R}$, alors P' est srs sur $\mathbb{R}$.
7. Polynômes P tels que P' divise P .
8. pgcd de $X^a - 1$ et $X^b - 1$
9. Noyau et image de l'application $P \mapsto P(X+1) - P(X)$ (dans $\mathbb{R}_n[X]$).
10. Formule de Grassmann (en admettant l'existence d'un supplémentaire)
11. Solutions de $\varphi(x) = y$ si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$.
12. Théorème du rang

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.

Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente en $+\infty$.

Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.

Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite intégrable sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$:

- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ;
- si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f .

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».

Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Un calcul montrant que $\int_I |f| < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.

Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Le résultat s'applique en particulier si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(g(x))$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.

Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t) dt$.

Intégrale convergente en b , en a .

Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.

Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.

L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.

Inégalité triangulaire.

On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».

Fonction intégrable en b , en a .

Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.

Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.

Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{|x-a|^\alpha} dx$.

La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.

La fonction de référence est réelle de signe constant.

Révisions d'algèbre linéaire : cours seulement

- sous-espaces vectoriels, familles, sommes, dimension
 - applications linéaires
-