DM 03
à rendre le lundi 28 septembre

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules.

- formule « bases » : problème 1. Durée conseillée : 2h.
- formule « intermédiaire » : problème 2. Durée conseillée : 3h.

Problème 1. Matrices semblables à leur inverse, Petites Mines MPSI 2002

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B.

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de traces différents ne sont pas semblables.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im} w \subset \ker u^i$.
(b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leqslant \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 2$.

(a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question **3b**.).
(b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
(c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 1$.

(a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
(b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
(c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = \mathrm{I}_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = \mathrm{I}_3 - N + N^2$.

3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

4. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4**., une matrice semblable à la matrice M.

(b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Montrer que $\ker(u - id_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2).

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E, et écrire la matrice de u dans cette base.

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Problème 2. Idéaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ESIM 2000

Définitions d'algèbre linéaire

- n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.
- $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q, carrée, inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.
- A étant un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de A, noté $\ker(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\ker(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0\}.$$

- On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ noté $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

Structures algébriques

- Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée un **idéal à droite** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
  — $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +)$,
  — $\forall A \in \mathcal{J},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM \in \mathcal{J}$.
- Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée un **idéal à gauche** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
  — $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +)$,
  — $\forall A \in \mathcal{J},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ MA \in \mathcal{J}$.
- Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée un **idéal bilatère** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
  — $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +)$,
  — $\forall A \in \mathcal{J},\ \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM \in \mathcal{J}$ **et** $MA \in \mathcal{J}$.

Ainsi, un idéal à droite (respectivement à gauche) est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +)$ stable par multiplication par un élément **quelconque** de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à droite (respectivement à gauche).
Un idéal bilatère est un idéal à la fois à droite et à gauche.

Notre but est de déterminer les idéaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Les parties A. et B. sont indépendantes. La partie C. a besoin de la compréhension des méthodes de la partie B..

A. Idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Démontrer que si $\mathrm{I}_n \in \mathcal{J}$, alors $\mathcal{J} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Montrer que si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible, alors $\mathcal{J} = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\mathcal{J}$ n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice non nulle appartenant à $\mathcal{J}$, et r son rang.

10. Montrer que $\mathcal{J}$ contient la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

11. Montrer l'existence de $n-r+1$ matrices, notées $A_1, A_2, \ldots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

12. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

B. Idéaux à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

B-I. Un exemple

13. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On désigne par

$$\mathcal{I}_F = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Im}(A) \subset F\}.$$

Montrer que $\mathcal{I}_F$ est un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On veut démontrer que les idéaux à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont tous de la forme précédente.

B-II. Quelques résultats préliminaires

Soit M un élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et N un élément de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Im}(N) \subset \mathrm{Im}(M)$. On veut montrer qu'il existe une matrice P appartenant à $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telle que $N = MP$. On fixe un supplémentaire $\mathcal{S}$ de $\ker(M)$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

14. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_q)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.
Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q, d'un unique élément ε_i de $\mathcal{S}$ tel que $M\varepsilon_i = Ne_i$.

15. Soit P l'élément de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$.
Montrer que $N = MP$.

Soient maintenant A, B et C trois éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{Im}(C) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B).$$

16. On désigne par $D = (A|B)$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières colonnes de D sont celles de B.
Montrer que $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

17. En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathscr{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ telle que : $C = DW$.

18. En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $C = AU + BV$.

B-III. Détermination des idéaux à droite

Soit $\mathcal{J}$ un idéal à droite de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

19. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que : $\forall M \in \mathcal{J},\ \mathrm{rg}(M) \leqslant r$ et tel qu'il existe $M_0 \in \mathcal{J}$ vérifiant $\mathrm{rg}(M_0) = r$.

20. Soit M un élément quelconque de $\mathcal{J}$.
On suppose que $\mathrm{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Im}(M_0)$.
En utilisant le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$, montrer l'existence d'un élément de $\mathcal{J}$ de rang strictement supérieur à r.

21. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\mathrm{Im}(M_0)}$.

C. Idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

22. Soit F un sous-espace vetoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathcal{K}_F$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathcal{K}_F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ F \subset \ker(M)\}.$$

Démontrer que $\mathcal{K}_F$ est un idéal à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

23. Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $N \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ telles que $\ker(M) \subset \ker(N)$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que $N = PM$.

24. Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que

$$\ker(A) \cap \ker(B) \subset \ker(C).$$

Démontrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que

$$C = UA + VB.$$

25. Déterminer les idéaux à gauche de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.