

TD 04

Normes et espaces vectoriels normés

1 Exercices classiques

Exercice 1. Norme « d'énergie ». ●●○ On définit sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'application N par :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

1. Démontrer que N est une norme.

Correction. Déjà, N est une application de E dans $\mathbb{R}_+$.
 Ensuite, si $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= \sqrt{(\lambda f)(0)^2 + \int_0^1 (\lambda f)'(t)^2 dt} \\ &= \sqrt{\lambda^2 f(0)^2 + \lambda^2 \int_0^1 f'(t)^2 dt} \\ &= |\lambda| N(f), \end{aligned}$$

d'où l'homogénéité.

Ensuite, pour la séparation, soit f dans E telle que $N(f) = 0$. Alors, en notant $A(f) = \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$,
 $f(0)^2 + A(f)^2 = 0$, donc (somme de deux termes positifs), $f(0) = A(f) = 0$.

On en déduit que $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. Comme f'^2 est continue, positive, d'intégrale nulle, on en déduit que $f'(t) = 0$ pour tout t dans $[0, 1]$, donc f est constante sur $[0, 1]$. Mais $f(0) = 0$, ce qui implique que f est nulle sur $[0, 1]$.

2. Démontrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Correction. Soit $f \in E$. Alors, pour x dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{f(0)^2 + \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2} \text{ par inégalité de Cauchy-Schwarz, ou par l'inégalité } a + b \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{f(0)^2 + \left(\int_0^x 1 dt \right) \left(\int_0^x f'(t)^2 dt \right)}, \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.} \\ &\leq \sqrt{2} N(f). \end{aligned}$$

En revanche, on va montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes. Si $f_n : x \mapsto x^n$, alors $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n , alors que

$$N(f_n) = \sqrt{\int_0^1 n^2 t^{2n-2} dt} = n \sqrt{\frac{1}{2n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour N mais l'est pour $\|\cdot\|_\infty$. Ceci assure que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2. ●●○ On considère les trois applications définies sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\|M\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|; \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2}; \quad \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |m_{i,j}|$$

1. Montrer que ces applications sont des normes sur E .

Correction. Ce sont les normes 1 (un peu twistée), 2 et ∞ de $\mathbb{R}^n$...

2. Montrer qu'elles vérifient de plus, pour les deux premières : $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.

Correction. Soient M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, en notant $p_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} n_{kj}$, on a

$$\|MN\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |p_{ij}|.$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |p_{ij}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n m_{ik} n_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |m_{ik}| |n_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |m_{ik}| \sum_{j=1}^n |n_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |m_{ik}| \|N\|_1 \\ &\leq \|M\|_1 \|N\|_1 \end{aligned}$$

Ensuite, pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ donne

$$p_{ij}^2 = \left(\sum_{k=1}^n m_{ik} n_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n m_{ik}^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^n n_{\ell j}^2 \right).$$

En sommant sur i et j :

$$\|MN\|_2^2 = \sum_{i,j} p_{ij}^2 \leq \left(\sum_{i,k} m_{ik}^2 \right) \left(\sum_{\ell,j} n_{\ell j}^2 \right) = \|M\|_2^2 \|N\|_2^2.$$

D'où la sous-multiplicativité.

3. Prouver que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|MN\| \leq c \cdot \|M\| \cdot \|N\|$$

Correction. L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. Ainsi, si $\|\cdot\|$ est une norme sur cet espace, on dispose de $\alpha, \beta > 0$ tels que pour toute M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|M\| \leq \alpha \|M\|_1$ et $\|M\|_1 \leq \beta \|M\|$. Ainsi, si M et N sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|MN\| \leq \alpha \|MN\|_1 \leq \alpha \|M\|_1 \|N\|_1 \leq \alpha \beta^2 \|M\| \|N\|,$$

d'où le résultat.

Exercice 3. Normes et boules unité. ●○○ Soient N_1 et N_2 deux normes sur un e.v. E et B_1 et B_2 les boules unités fermées associées. Montrer que $B_1 = B_2$ si, et seulement si, $N_1 = N_2$.

Correction. Déjà, si $N_1 = N_2$, nécessairement, $B_1 = B_2$.

Ensuite, si $N_1 \neq N_2$, on dispose de $x \in E$ tel que $N_1(x) \neq N_2(x)$. Nécessairement, $x \neq 0$, donc, si on considère $y = \frac{x}{N_1(x)}$, alors $N_1(y) = 1$, donc $y \in B_1$ mais $N_2(y) = \frac{N_2(x)}{N_1(x)}$, donc $y \notin B_2$. Donc les boules unité sont différentes.

Exercice 4. Une autre norme ∞ . ●●● Soient $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}$. On pose $\forall f \in \mathcal{C}, N_g(f) = \|fg\|_\infty$.

1. À quelle condition sur g l'application N_g est-elle une norme ?

Correction. Déjà, N_g satisfait toujours les hypothèses de positivité, homogénéité, inégalité triangulaire. Réfléchissons à la séparation. Notons Z l'ensemble des points d'annulation de g .

- si g s'annule sur un intervalle ouvert $]a, b[$, alors en prenant f continue, nulle sur $[0, 1] \setminus [a, b]$ et non nulle sur $]a, b[$, on a notre contre-exemple qui montre qu'on n'a pas séparation.
- si g ne s'annule sur aucun intervalle ouvert, cela signifie que $[0, 1] \setminus Z$ est dense dans $[0, 1]$. Ainsi, si $N_g(f) = 0$, alors pour tout t dans $[0, 1]$, $f(t)g(t) = 0$ donc, pour tout t dans $[0, 1] \setminus Z$, $f(t) = 0$. Par densité de $[0, 1] \setminus Z$ dans $[0, 1]$, on en déduit que f est nulle sur $[0, 1]$.

Donc N_g est une norme si, et seulement si $[0, 1] \setminus Z$ est dense dans $[0, 1]$.

2. Si la condition précédente est réalisée, N_g est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Correction. Déjà, pour tout f dans $\mathcal{C}$, $\|fg\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|f\|_\infty$. Reste à savoir quand il peut y avoir l'autre inégalité.

On montre que N_g est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si g ne s'annule pas.

Déjà, si g ne s'annule pas, pour f dans $\mathcal{C}$, on a $\|f\|_\infty = \left\| \frac{1}{g} fg \right\|_\infty \leq \left\| \frac{1}{g} \right\|_\infty N_g(f)$, d'où l'équivalence des deux normes.

Si g s'annule en $a \in [0, 1]$ (on suppose a intérieur à $[0, 1]$, on adapte sinon), on considère, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n une fonction affine par morceaux, nulle en-dehors de $I_n = \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n} \right]$, et égale à 1 en a . Alors $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout n , alors que

$$\|fg\|_\infty \leq \max_{t \in I_n} |g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |g(a)| = 0,$$

par continuité de g en a . Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_g mais pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. ●●○ Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (où la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang) on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt, \quad N_3(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E .

Correction. Ces trois normes ont été vues en cours !

2. Donner trois inégalités optimales entre N_1 et N_2 , N_2 et N_3 , N_1 et N_3 . Démontrer qu'à chaque fois, les normes ne sont pas équivalentes.

Correction.

- Comparaison entre N_1 et N_2 . Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors

$$N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt \leq \int_0^1 \sum_{k=0}^n |a_k| t^k dt \leq \sum_{k=0}^n \frac{|a_k|}{k+1} \leq \sum_{k=0}^n |a_k| = N_1(P).$$

Cette inégalité est une égalité lorsque $P = 1$, donc l'inégalité est optimale.

Il n'y a aucune chance qu'il y ait une inégalité dans l'autre sens : $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de norme N_1 constante mais de norme N_2 tendant vers 0.

- Comparaison entre N_2 et N_3 . Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$N_2(P) \leq \int_0^1 N_3(P) dt = N_3(P).$$

Cette inégalité est une égalité lorsque $P = 1$, donc l'inégalité est optimale.

Il n'y a aucune chance qu'il y ait une inégalité dans l'autre sens : $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de norme N_3 constante mais de norme N_2 tendant vers 0.

- Comparaison entre N_1 et N_3 . soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors, pour $t \in [0, 1]$,

$$|P(t)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |t|^k \leq N_1(P),$$

ce qui assure que $N_3(P) \leq N_1(P)$.

Cette inégalité est une égalité lorsque $P = 1$, donc l'inégalité est optimale.

Exercice 6. Des normes intégrales non équivalentes. ●○○ Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, N_a est une norme.

Correction. Allez, j'ai sauté beaucoup de corrections en disant que c'était évident, donc je fais celle-ci.

- la positivité est évidente.
- soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} N_a(\lambda P) &= |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| dt \\ &= |\lambda| N_a(P), \end{aligned}$$

d'où l'homogénéité.

- soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} N_a(P + Q) &= |P(a) + Q(a)| + \int_0^1 |P'(t) + Q'(t)| dt \\ &\leq |P(a)| + |Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)| + |Q'(t)| dt \\ &\leq N_a(P) + N_a(Q), \end{aligned}$$

d'où l'inégalité triangulaire.

- soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $N_a(P) = 0$. Alors, comme $|P(a)| \geq 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt \geq 0$, on en déduit que $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$. La fonction $t \mapsto |P'(t)|$ étant positive, continue, d'intégrale nulle, on en déduit que pour tout t dans $[0, 1]$, $P'(t) = 0$. P' admet donc une infinité de racines, donc $P' = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ceci assure que P est constant, égal à $P(a) = 0$, donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. D'où la séparation.

2. Démontrer que pour tous $a, b \in [0, 1]$, N_a et N_b sont équivalentes.

Correction. Soient a et b dans $[0, 1]$, $a < b$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} |P(b)| &= \left| P(a) + \int_a^b P'(t) dt \right| \\ &\leq |P(a)| + \int_a^b |P'(t)| dt \\ &\leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \text{ car } [a, b] \subset [0, 1] \\ &\leq N_a(P). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} N_b(P) &= |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \\ &\leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)| dt \\ &\leq 2N_a(P). \end{aligned}$$

Le même raisonnement, en faisant bien attention à l'ordre des bornes, montre que $N_b(P) \leq 2N_a(P)$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

3. (a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = X^n/2^n$. Déterminer pour quelles valeurs de a la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de N_a et préciser dans ce cas sa limite.

Correction. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$N_a(P_n) = \frac{|a|^n}{2^n} + \int_0^1 \frac{t^n}{2^n} dt = \frac{|a|^n}{2^n} + \frac{1}{(n+1)2^n}.$$

Ainsi,

- si $|a| < 2$, alors $N_a(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_{\mathbb{R}[X]}$ pour N_a .
- si $|a| > 2$, alors $N_a(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas.
- Si $a = 2$, alors

$$N_a(P_n) = 1 + \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On remarque alors que

$$N_a(P_n - 1) = 0 + \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc (P_n) converge pour N_a , vers 1.

- Si $a = -2$, alors quel que soit Q dans $\mathbb{R}[X]$, on a

$$N_a(P_n - Q) \geq |P_n(-2) - Q(-2)| = |(-1)^n - Q(-2)|,$$

qui ne tend pas vers 0. Donc (P_n) ne converge pas pour N_a .

- (b) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

Correction. Si $0 \leq a < b$ et $b > 1$, on pose $P_n(X) = \frac{1}{b^n}$. Alors, par le même raisonnement que précédemment (valide car $\frac{1}{b^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, voilà pourquoi on avait besoin de $b > 1$), $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 pour N_b mais vers 0 pour N_a , ce qui montre que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 7. Normes ∞ et dérivées. ●●○ Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0; 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E puis les comparer entre elles.

Correction. Nous ne vérifions pas la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. Intéressons-nous à la séparation. Soit $f \in E$.

- Déjà, si $N_1(f) = 0$, alors $\|f\|_\infty = 0$, donc $f = 0_E$.
- Ensuite, si $N_2(f) = 0$, alors pour tout t dans $[0, 1]$, $f(t) + f'(t) = 0$. Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' = -y$. Donc on dispose de $C \in \mathbb{R}$ tel que $f : t \mapsto Ce^{-t}$. Mais $f(0) = 0$, donc $f = 0_E$. D'où la séparation.

On montre ensuite que N_1 et N_2 sont équivalentes : si $f \in E$, on a clairement $N_2(f) \leq N_1(f)$. Puis, si $f \in E$, on sait que f est solution de l'équation $y' + y = b$ où $b = f + f'$. On fait alors une méthode de variation de la constante : les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto Ce^{-t}$.

Ensuite, la méthode de variation de la constante incite à considérer $C(t) = f(t)e^t$. On remarque alors facilement

que $C'(t) = e^t(f(t) + f'(t))$. Ceci assure que

$$C(x) = g(0) + \int_0^x C'(t)dt = 0 + \int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt.$$

Soit $x \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| e^{-x} \int_0^x e^t(f(t) + f'(t))dt \right| \\ &\leq e^{-x} \int_0^x e^t |f(t) + f'(t)| dt \\ &\leq e^{-x} \int_0^x e^t N_2(f) dt \\ &\leq N_2(f) e^{-x} [e^t]_0^x \leq N_2(f). \end{aligned}$$

Ainsi, $\|f\|_\infty \leq N_2(f)$, et

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \\ &= \|f\|_\infty + \|f' + f - f\|_\infty \\ &\leq 2\|f\|_\infty + \|f' + f\|_\infty \\ &\leq 2N_2(f) + N_2(f) = 3N_2(f). \end{aligned}$$

Donc les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

2. Sont-elles équivalentes à $\|f\|_\infty$?

Correction. Si l'on considère, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto t^n$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$. De plus, $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N_1(f_n) = 1 + n$, ce qui assure que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour N_1 alors qu'elle l'est pour $\|\cdot\|_\infty$. Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 8. Inégalités de Hölder et de Minkowski. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout réel $p > 1$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. (a) Montrer que pour tous réels positifs α et β , $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.

Correction. L'inégalité étant évidente si l'un des deux réels est nul, on prend α et β strictement positifs. Par concavité de $\ln$, comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$\ln \left(\frac{1}{p} \alpha^p + \frac{1}{q} \beta^q \right) \geq \frac{1}{p} \ln(\alpha^p) + \frac{1}{q} \ln(\beta^q),$$

ce qui, en prenant l'exponentielle de l'inégalité, assure le résultat.

(b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$. On commencera par traiter le cas $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.

Correction. On suppose dans un premier temps que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{p} |x_k|^p + \frac{1}{q} |y_k|^q \\ &\leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|x\|_p \|y\|_q. \end{aligned}$$

Ensuite, si x et y sont quelconques (non nuls, sinon tout est évident), on pose $x' = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $y' = \frac{y}{\|y\|_q}$, de sorte que x' et y' sont de norme 1. L'inégalité précédente s'applique à x' et y' , d'où

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{x_k}{\|x\|_p} \frac{y_k}{\|y\|_q} \right| \leq 1,$$

d'où le résultat final en multipliant par $\|x\|_p \|y\|_q$.

2. (a) Établir que $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$.

Correction. La proposition est évidente en écrivant que $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$.

- (b) En déduire l'inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Correction. On finit en écrivant que

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}.$$

On note $z_k = |x_k + y_k|^{p-1}$. Par la question précédente, on a, en notant q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i.e. $q = \frac{p}{p-1}$,

$$\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p \|z\|_q + \|y\|_p \|z\|_q.$$

Mais

$$\begin{aligned} \|z\|_q &= \left(\sum_{k=1}^n (|x_k + y_k|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \|x + y\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

D'où

$$\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x + y\|_p^{p-1},$$

d'où le résultat si $\|x + y\|_p \neq 0$ (si $\|x + y\|_p = 0$, l'inégalité est évidente).

3. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Correction. On vient de démontrer l'inégalité triangulaire. Le reste est évident !

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$.

Correction. Notons $M = \|x\|_\infty$. Soit $I = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_k| = M\}$. Notons a le cardinal de I . Alors

$$\begin{aligned} \ln(\|x\|_p) &= \frac{1}{p} \ln \left(\sum_{k=1}^p |x_k|^p \right) \\ &= \frac{1}{p} \ln \left(aM^p + \sum_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus I} |x_k|^p \right) \\ &= \ln(M) + \frac{1}{p} \left(a + \sum_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus I} \frac{|x_k|^p}{M^p} \right) \\ &\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \ln(M), \end{aligned}$$

car pour $k \notin I$, $0 \leq \frac{|x_k|}{M} < 1$. Ainsi, $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M = \|x\|_\infty$.

2 Normes concrètes

Exercice 9. Dessins de boules unité. ●○○ On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty|$.

1. Vérifier que N est une norme.

Correction. On vérifie les 4 hypothèses (ce n'est pas si immédiat) :

- la positivité est immédiate, si !
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} N(\lambda x, \lambda y) &= \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda x + t\lambda y| \\ &= \sup_{t \in [0, 1]} |\lambda| \cdot |x + ty| \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty| \\ &= |\lambda| N(x, y). \end{aligned}$$

D'où l'homogénéité.

- Soient (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{R}^2$. Alors, pour $t \in [0, 1]$,

$$|(x + x') + t(y + y')| \leq |x + ty| + |x' + ty'| \leq N(x, y) + N(x', y'),$$

d'où $N(x + x', y + y') \leq N(x, y) + N(x', y')$, d'où l'inégalité triangulaire.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N(x, y) = 0$. Alors pour tout t dans $[0, 1]$, $|x + ty| = 0$, d'où, pour $t = 0$, $|x| = 0$, i.e. $x = 0$ et, pour $t = 1$, $|x + y| = 0$ d'où, comme $x = 0$, $|y| = 0$, i.e. $y = 0$, d'où $(x, y) = (0, 0)$. On a ainsi démontré la séparation.

Donc N est bien une norme.

2. Représenter les boules unité pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ et N .

Correction. On a déjà dessiné en cours les boules unité pour les 3 premières normes. Réfléchissons désormais à la boule unité pour N . Pour ce faire, on va réfléchir sur les quatre quarts de plan.

- si $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} N(x, y) \leq 1 &\Leftrightarrow \sup_{t \in [0, 1]} |x + ty| \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x + y \leq 1. \end{aligned}$$

- si $x \leq 0$ et $y \leq 0$, alors on a les équivalences

$$N(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow \sup_{t \in [0,1]} |x + ty| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x - y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq -1.$$

- si $x \geq 0$ et $y \leq 0$, alors $N(x, y) = \max(x, |x + y|)$: en effet, $t \mapsto x + ty$ décroît de x (en $t = 0$) à $x + y$ (en $t = 1$), donc le maximum de $|x + ty|$ est ou bien x , ou bien $|x + y|$. Ainsi, comme $x + y \leq x$,

$$N(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ et } |x + y| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \text{ et } x + y \geq -1.$$

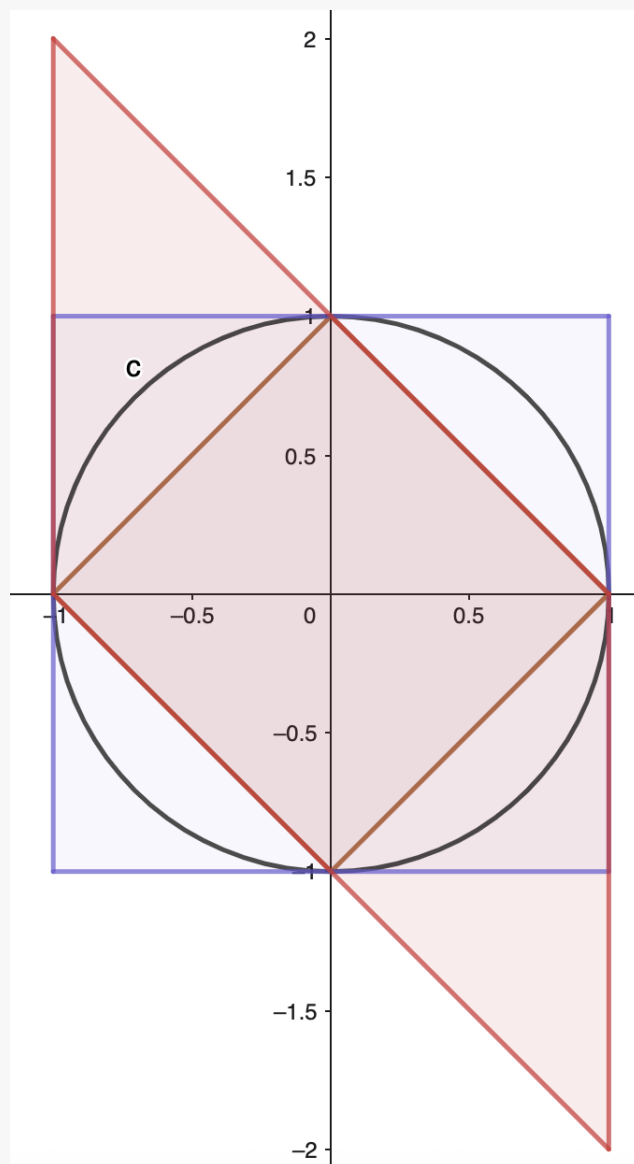
- si $x \leq 0$ et $y \geq 0$, alors, de même, $N(x, y) = \max(-x, |x + y|)$ et, comme $x + y \geq x$, on a les équivalences

$$N(x, y) \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 1 \text{ et } |x + y| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ et } x + y \leq 1.$$

Remarque : comme une boule centrée en 0 est toujours symétrique par rapport à 0, on aurait pu traiter juste deux zones !

D'où les 4 boules unité ainsi représentées.



3. ●●○ Reprendre les questions précédentes avec la norme définie par : $N'(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.

Correction. Vérifier que l'on a une norme n'est pas très dur... On va juste dessiner les boules unité! En changeant t en $-t$, on voit que $N'(x, -y) = N'(x, y)$: la boule est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, et aussi par rapport à 0, donc par rapport à l'axe des ordonnées. On peut donc ne traiter que la zone $(x \geq 0, y \geq 0)$.

- si $y = 0$, alors $N'(x, 0) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{x}{1 + t^2} = x$ (atteint en $t = 0$).
- si $y > 0$, alors, pour $t \geq 0$, $|x - ty| \leq x + ty$, donc il suffit de chercher le sup sur $[0, +\infty[$ de $f : t \mapsto \frac{x + ty}{1 + t^2}$. La fonction f est dérivable et

$$f'(t) = \frac{y(1 + t^2) - 2t(x + ty)}{(1 + t^2)^2} = \frac{-yt^2 - 2xt + y}{(1 + t^2)^2}.$$

Le numérateur est un trinôme de coefficient dominant $-y < 0$, qui vaut $y > 0$ en 0 : il s'annule une seule fois sur $[0, +\infty[$, en $t_0 = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$, en étant positif avant et négatif après. Ainsi f croît sur $[0, t_0]$ puis décroît, d'où $N'(x, y) = f(t_0)$. Or $f'(t_0) = 0$ donne $y(1 + t_0^2) = 2t_0(x + t_0y)$, d'où

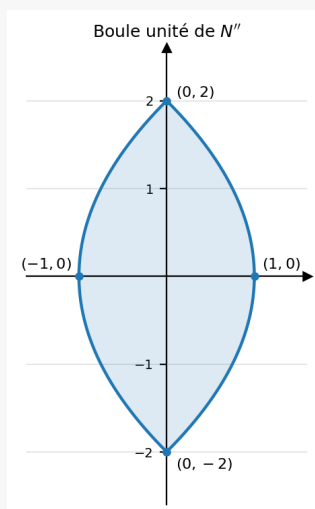
$$\begin{aligned} N'(x, y) = f(t_0) &= \frac{y}{2t_0} \\ &= \frac{y^2}{2(\sqrt{x^2 + y^2} - x)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}, \end{aligned}$$

en multipliant par la quantité conjuguée.

Cette formule reste vraie pour $y = 0$. Ainsi, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} N'(x, y) \leq 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 - x \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 4 - 4x + x^2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 \text{ et } x \leq 1 - \frac{y^2}{4} \\ &\Leftrightarrow x \leq 1 - \frac{y^2}{4}. \end{aligned}$$

Le bord est donc un arc de parabole, joignant $(1, 0)$ à $(0, 2)$. On complète par symétries : la boule unité est délimitée par deux arcs de paraboles, qui se coupent en $(0, 2)$ et $(0, -2)$, d'où la boule unité ainsi représentée.



Exercice 10. CNS pour être une norme sur $\mathbb{K}^n$. ●○○ Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{K})$. Déterminer une condition nécessaire et

suffisante sur $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ pour que l'application N définie par $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|_\infty$ soit une norme.

Correction. Déjà, N vérifie clairement les propriétés de positivité, d'inégalité triangulaire et d'homogénéité. Montrons qu'il y a séparation si, et seulement si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

- si la famille est liée, on dispose de $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ vérifiant $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0_E$, d'où la non-séparation.
- si la famille est libre, soit $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $N(x_1, \dots, x_n) = 0$. Alors $\left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|_\infty = 0$, donc $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0_E$, ce qui, par liberté de $(f_1, \dots, f_n)$, assure que $x_1 = \dots = x_n = 0$. D'où la séparation.

Donc N est une norme si, et seulement si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 11. Normes et équations différentielles. ●●○ Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; \pi], \mathbb{R}), f(0) = f'(\pi) = 0\}$.

1. On pose, $\forall f \in E$, $N(f) = \|f + f''\|_\infty$

Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.

Correction. On ne vérifie pas la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire.

Vérifions la séparation. Soit $f \in E$ vérifiant $N(f) = 0$. Alors pour tout t dans $[0, \pi]$, $f(t) + f''(t) = 0$, donc on dispose de a et b réels tels que $f : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$. Comme $f(0) = f'(\pi) = 0$, $f = 0$. Ceci assure la séparation.

En revanche, si $f_n : t \mapsto \sin(nt)$, alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n + f_n''\|_\infty = (n^2 - 1)$, donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$, mais pas pour N .

2. On pose, $\forall f \in E$, $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$.

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Correction. Le fait que N_1 est une norme est évident. Pour N_2 , la positivité, homogénéité, et l'inégalité triangulaire sont évidentes. Pour la séparation, si $f'' + 2f' + f = 0_E$, alors, l'équation caractéristique de l'équation différentielle étant $r^2 + 2r + 1 = 0$, on dispose de (a, b) réels tels que $f : t \mapsto (a + bt)e^{-t}$. Comme $f(0) = f'(\pi) = 0$, $f = 0_E$. D'où la séparation.

Ensuite, pour tout $f \in E$, $N_2(f) \leq \|f''\|_\infty + 2\|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2N_1(f)$.

Réciproquement, soit $f \in E$ et $g : t \mapsto e^t f(t)$. Alors $g'(t) = e^t(f(t) + f'(t))$ et $g''(t) = e^t(f(t) + 2f'(t) + f''(t))$, donc $|g''(t)| \leq e^\pi N_2(f)$ pour tout $t \in [0, \pi]$. Comme $g'(0) = f(0) + f'(0) = 0$, on a pour tout $t \in [0, \pi]$

$$|f(t) + f'(t)| = e^{-t} |g'(t)| \leq \left| \int_0^t g''(s) ds \right| \leq \pi e^\pi N_2(f).$$

Posons $h = f + f'$. Comme $f(0) = 0$, la méthode de variation de la constante donne $f(t) = \int_0^t e^{s-t} h(s) ds$,

d'où $|f(t)| \leq \|h\|_\infty \int_0^t e^{s-t} ds \leq \|h\|_\infty$. Ainsi

$$\|f\|_\infty \leq \pi e^\pi N_2(f), \quad \|f'\|_\infty \leq \|h\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\pi e^\pi N_2(f),$$

$$\|f''\|_\infty \leq N_2(f) + 2\|f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq (1 + 5\pi e^\pi) N_2(f).$$

Finalement $N_1(f) \leq (1 + 8\pi e^\pi) N_2(f)$, et N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 12. Une norme discrète sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. ●●● On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^\mathbb{N}$. On note, pour $f \in E$, $N_1(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{|f(a_n)|}{2^n}$.

1. À quelle CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'application N_1 est-elle une norme ?

Correction. Comme (très) souvent, la positivité, homogénéité, inégalité triangulaire sont évidentes. On montre que N_1 est une norme si, et seulement si $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

- si A n'est pas dense dans $[0, 1]$, alors on dispose de $\alpha < \beta$ tels que $A \cap]\alpha, \beta[= \emptyset$. Si on pose f une fonction nulle partout sauf sur $]\alpha, \beta[$, f est non nulle mais $N_1(f) = 0$, ce qui empêche la séparation.
- si A est dense dans $[0, 1]$, alors si $f \in E$ vérifie $N_1(f) = 0$, on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|f(a_n)| = 0$, i.e. $f(a_n) = 0$. Ainsi, f est nulle sur une partie dense de $[0, 1]$ donc, par continuité, est nulle sur $[0, 1]$. D'où la séparation.

2. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Correction. Déjà, on a facilement, pour $f \in E$,

$$N_1(f) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\|f\|_\infty}{2^n} = 2\|f\|_\infty.$$

En revanche, les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit $p \in \mathbb{N}$. on construit f_p vérifiant $\|f_p\|_\infty = 1$ et $f_p(a_0) = \dots = f_p(a_p) = 0$ (ce qui est toujours possible avec des fonctions affines). Alors

$$N_1(f_p) \leq \sum_{n \geq p+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^p}.$$

Ainsi, $N_1(f_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $\|f_p\|_\infty = 1$ pour tout p , donc N_1 et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 13. Norme et convergence simple. ●●○ Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On considère la propriété (P) suivante :

$$\forall f \in E, \quad \forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}}, \quad \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff \forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t). \quad (\mathcal{P})$$

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme $\|\cdot\|$ vérifiant la propriété (P).

Correction. Déjà, comme on sait que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ implique que pour tout t dans $[0, 1]$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)$, cela signifie que, si l'on veut construire un contre-exemple, il sera nécessairement dans le sens « trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f mais pas pour telle norme.

On note, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, f_n nulle en 0, affine de 0 à $\frac{1}{n}$, valant 1 en $\frac{1}{n}$, affine de $\frac{1}{n}$ à $\frac{2}{n}$ et nulle à partir de $\frac{2}{n}$. On note $g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$. Alors pour tout t dans $[0, 1]$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (nulle en 0 et, si $a > 0$, alors $a > \frac{2}{n}$ à pcr), mais $\|0_E - g_n\| = \|g_n\| = 1$, qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

2. Soient F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus k définies sur $[0, 1]$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in [0, 1]$ distincts.

(a) Montrer que $\|P\| = \sum_{i=0}^k |P(\alpha_i)|$ définit une norme sur F .

Correction. Les trois hypothèses évidentes sont évidentes. La séparation vient du fait qu'un polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ qui s'annule $k+1$ fois est nul.

(b) Montrer que la propriété (P) est vérifiée dans F .

Correction. On note $(L_0, \dots, L_k)$ la base d'interpolation de Lagrange. Alors, pour tout P dans F , $P = \sum_{i=0}^k P(\alpha_i) L_i$.
Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ et $P \in F$.

- si $\|P - P_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\sum_{i=0}^k |P(\alpha_i) - P_n(\alpha_i)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, ce qui assure que pour tout i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, $P_n(\alpha_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\alpha_i)$. Ainsi, si $t \in [0, 1]$,

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^k P_n(\alpha_i) L_i(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k P(\alpha_i) L_i(t) = P(t).$$

• Réciproquement, si pour tout t dans $[0, 1]$, $P_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(t)$, ceci assure que pour tout i dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, $P_n(\alpha_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(\alpha_i)$, et donc que $\|P - P_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
L'équivalence est donc prouvée.

Exercice 14. Normes invariantes par conjugaison. ●●○

1. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\|AB\| = \|A\|\|B\|$?

Correction. Supposons qu'il existe une telle norme. Soit N une matrice nilpotente non nulle. Alors, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\|N^k\| = \|N\|^k$, donc, pour $k = n$, comme $N^n = 0_n$, $\|N\|^n = 0$, donc $\|N\| = 0$, donc $N = 0_n$, absurde !

2. Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\|AB\| = \|BA\|$?

Correction. Supposons qu'il existe une telle norme. On considère $A = E_{11}$ et $B = E_{12}$ (matrices de la base canonique.) Alors $AB = E_{11}$ et $BA = 0_n$. Donc $\|E_{11}\| = 0$, absurde car $E_{11} \neq 0_n$. Il n'existe donc pas de telle norme.

3. On veut démontrer de deux manières différentes qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables entre elles, on ait $\|A\| = \|B\|$. On raisonne par l'absurde.

- (a) Démontrer que pour toutes A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $\|AB\| = \|BA\|$.

Correction. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $AB = B^{-1}(BA)B$, donc AB est semblable à BA . Ainsi, par hypothèse, $\|AB\| = \|BA\|$.

- (b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour p dans $\mathbb{N}$, $B_p = B - \frac{1}{p}I_n$. Démontrer que, pour p assez grand, $B_p \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$

Correction. Notons, pour $t \in \mathbb{C}$, $P(t) = \det(B - tI_n)$. Alors P est polynomiale en t (car le déterminant est polynomial en les coefficients de la matrice) donc P admet un nombre fini de zéros sur $\mathbb{C}$. Notons α le zéro de P de plus petit module non nul. Alors pour $p \geq \frac{1}{|\alpha|}$, on a $\det\left(B - \frac{1}{p}I_n\right) \neq 0$, donc $B_p \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

- (c) En déduire que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| = \|BA\|$. Conclure.

Correction. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit (B_p) la suite définie comme à la question précédente. Alors on sait que pour tout p dans $\mathbb{N}$, $\|AB_p\| = \|B_pA\|$. Comme tous les coefficients de B_p tendent vers ceux de B quand $p \rightarrow +\infty$ et que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on en déduit, en faisant $p \rightarrow +\infty$, que $\|AB\| = \|BA\|$. Ceci permet de conclure grâce à la question 2.

Exercice 15. Suites de matrices et d'endomorphismes. ●●○ Dans cet exercice, on admet la continuité du produit matriciel, c'est-à-dire que si $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ et $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$, alors $A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AM = MA$ puis que M est une matrice de projection.

Correction. On écrit d'une part que $AA^k = A^kA$ donc, par continuité du produit matriciel, $AM = MA$. Ensuite, $A^{2k} = A^k \times A^k$ donc, par continuité du produit matriciel, $M = M \times M$, i.e. M est une matrice de projection.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M inversible. Déterminer M .

Correction. On sait, par la question précédente, que M est une matrice de projection. La seule projection inversible est l'identité, d'où $M = I_n$.

3. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les suites $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(A_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les matrices A et B . Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.

Correction. On sait que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A_k A_k^{-1} = I_n$, d'où, par continuité du produit matriciel, $AB = I_n$. D'où, A étant carrée, A est inversible et $A^{-1} = B$.

4. Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie, $\|\cdot\|$ une norme sur E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. En considérant $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ avec n entier non nul, montrer que :

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$$

Correction. Déjà, on sait que $\dim(\text{ker}(u - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Im}(u - \text{Id}_E)) = \dim(E)$. Il suffit donc de montrer que l'image et le noyau sont en somme directe.

Soit $x \in \text{ker}(u - \text{Id}_E) \cap \text{Im}(u - \text{Id}_E)$. Alors $u(x) = x$ et on dispose de $w \in E$ tel que $x = u(w) - w$. On considère alors $v_n(x)$, que l'on exprime de deux manières différentes :

- déjà, $v_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x = x$ car $x \in \text{ker}(u - \text{Id}_E)$. On en déduit que $v_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
- ensuite,

$$v_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(u(w) - w) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1}(w) - u^k(w) = \frac{1}{n} (u^{n+1}(w) - w).$$

Mais alors

$$\|v_n(x)\| \leq \frac{1}{n} (\|u^{n+1}(w)\| + \|w\|) \leq \frac{2}{n} \|w\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E.$$

Ainsi, par unicité de la limite, $x = 0_E$ et $\text{ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E) = E$.

Exercice 16. ●●○ Soit E l'espace des suites réelles bornées. On note, pour $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E ,

$$N_1(\mathbf{u}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|, \quad N_2(\mathbf{u}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + |u_{2n}| \text{ et } N_3(\mathbf{u}) = \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{2^n}$$

Correction. J'ai tapé BEAUCOUP de vérifications que des objets sont des normes. Là, rien n'est difficile pour N_1 , N_2 et N_3 : je ne vais donc pas vérifier que ce sont des normes.

1. Montrer que sont N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes.

Correction. Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Déjà, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq |u_n| + |u_{2n}| \leq N_2(\mathbf{u}),$$

donc $N_1(\mathbf{u}) \leq N_2(\mathbf{u})$. Ensuite,

$$|u_n| + |u_{2n}| \leq 2N_1(\mathbf{u}),$$

d'où $N_2(\mathbf{u}) \leq 2N_1(\mathbf{u})$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

2. Soit F l'ensemble des suites réelles bornées vérifiant $u_0 = 0$. Montrer que $N_4(\mathbf{u}) = \sup_n |u_{n+1} - u_n|$ est une norme sur F , que $N_4(\mathbf{u}) \leq 2N_1(\mathbf{u})$. Peut-il y avoir égalité ? Montrer que N_1 et N_4 ne sont pas équivalentes.

Correction. On vérifie la séparation pour N_4 . On remarque que si $\sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| = 0$, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Nulle en zéro, on en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = 0$. Donc N_4 est bien une norme.

On a immédiatement, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2N_1(\mathbf{u})$. Il y a égalité lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n \delta_{n \neq 0}$. Alors $N_4(\mathbf{u}) = 2$ et $N_1(\mathbf{u}) = 1$.

Pour montrer que N_1 et N_4 ne sont pas équivalentes, il faut trouver une suite de suites bornée pour N_4 mais pas pour N_1 . On note, pour p dans $\mathbb{N}$, $\mathbf{u}^{(p)} = (u_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$, définie par

- pour tout n dans $\llbracket 0, p \rrbracket$, $u_n^{(p)} = n$,
- pour tout n dans $\llbracket p, 2p \rrbracket$, $u_n^{(p)} = 2p - n$,
- pour tout $n \geq 2p$, $u_n^{(p)} = 0$.

Ainsi, $\mathbf{u}^{(p)}$ est bornée, $N_1(\mathbf{u}^{(p)}) = p$ et $N_4(\mathbf{u}^{(p)}) = 1$ (au maximum, la différence entre deux termes consécutifs vaut 0). Ainsi, $(\mathbf{u}^{(p)})_{p \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite (de suites) bornée pour N_4 mais pas pour N_1 , ce qui assure la non équivalence de ces deux normes.

3. N_1 et N_3 sont-elles équivalentes ?

Correction. Non, N_1 et N_3 ne sont pas équivalentes. Pour ce faire, on note, pour $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}^{(p)} = (u_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite nulle jusqu'au rang p et égale à 1 ensuite. Alors $N_1(\mathbf{u}^{(p)}) = 1$ alors que $N_3(\mathbf{u}^{(p)}) = \sum_{n \geq p+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^p} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, ce qui signifie que la suite de suites $(\mathbf{u}^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour N_3 mais pas pour N_1 : les deux normes ne sont pas équivalentes.

4. Si G désigne le sev des suites nulles à partir d'un certain rang, quels sont les éléments de E adhérents à G pour N_1 , i.e. limites de suites d'éléments de G .

Correction. On montre que ce sont les suites qui tendent vers 0.

- déjà, si $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui tend vers 0, si on note $\mathbf{u}^{(p)} = (u_n \mathbb{1}_{n \leq p})_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$N_1(\mathbf{u} - \mathbf{u}^{(p)}) = \sup_{n \geq p} |u_n| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0,$$

car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- si $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite ne tendant pas vers 0, alors on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ vérifiant $|u_n| \geq \varepsilon$. Ceci assure que pour toute suite $\mathbf{v}$ nulle à partir d'un certain rang, $N_1(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \geq \varepsilon$, donc $\mathbf{u}$ ne peut pas être la limite d'une suite de suites nulles à partir d'un certain rang.

Exercice 17. Normes ∞ sur l'ensemble des polynômes. ●●○ Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments disjoints de $\mathbb{R}$. On définit alors $N_1(P) = \sup_{[a, b]} |P|$ et $N_2(P) = \sup_{[c, d]} |P|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Correction. On a déjà vu ça en cours... je passe !

2. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Correction. On suppose, sans perte de généralité, que $b < c$. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P_n(X) = \left(\frac{X-a}{b-a}\right)^n$. Alors $N_1(P_n) = 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors que $N_2(P_n) \geq \left(\frac{c-a}{b-a}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc (P_n) est bornée pour N_1 sans l'être pour N_2 , ce qui montre que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 18. Deux normes polynomiales, deux limites différentes. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in E$,

$N_1(P) = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n}$ et $N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt$. Justifier que N_1 et N_2 sont des normes sur E puis exhiber une suite convergente pour chaque norme mais avec des limites distinctes.

Correction. C'est évident que N_2 est une norme (on l'a vue en cours !). Pour N_1 , tout est évident, sauf la séparation, presque évidente : si $N_1(P) = 0$, alors $\sum_{n \geq 0} a_n = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $|a_n| = 0$. Ainsi, $a_0 = -\sum_{n \geq 1} a_n = 0$. D'où

$P = 0_E$.

Si on considère, pour $q \geq 1$, $P_q = X^q - 1$, alors

$$N_1(P_q) = 0 + \frac{1}{q} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $P_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$ pour N_1 , et

$$N_2(P_q - 1) = \int_0^1 t^q dt = \frac{1}{q+1} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $P_q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 1$ pour N_2 .

Exercice 19. Deux normes non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on note

$$N_1(P) = \|P' - P\|_{\infty, [0;1]} \quad \text{et} \quad N_2(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

1. Vérifier que ce sont des normes.

Correction. Comme d'habitude, positivité, homogénéité, inégalité triangulaire... c'est bon ! Pour la séparation :

- si $N_1(P) = 0$, alors $P' - P$ s'annule une infinité de fois, donc $P' - P = 0_E$, donc $P = P'$, ce qui est impossible si $P \neq 0_E$, à cause du degré.
- si $N_2(P) = 0$, alors tous les coefficients de P sont nuls, donc P est nul.

Donc N_1 et N_2 sont des normes.

2. Sont-elles équivalentes ?

Correction. Notons $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Alors $P_n - P'_n = \frac{X^n}{n!}$. Ainsi, $N_1(P_n) = \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En revanche, $N_2(P_n) = 1$ pour tout n , ce qui fait que (P_n) ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Ainsi, N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes. On peut cependant se demander si on a l'existence de C vérifiant, pour tout P , $N_1(P) \leq CN_2(P)$. Mais si on considère $P_n = \frac{1}{n} X^n$, alors $N_2(P_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors que $N_1(P_n) = \sup_{t \in [0,1]} \left| t^{n-1} - \frac{1}{n} t^n \right|$. Or, si on note $f : t \mapsto t^{n-1} - \frac{1}{n} t^n$, on a $f' : t \mapsto (n-1)t^{n-2} - t^{n-1}$, qui est toujours positif sur $[0, 1]$. Ainsi,

$$N_1(P_n) = 1 - \frac{1}{n},$$

qui ne tend pas vers 0, ce qui assure qu'il n'existe pas de C telle que $N_1(P) \leq CN_2(P)$ pour tout P .

Exercice 20. Une autre norme sur $\mathbb{R}[X]$. ●●○ Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit, pour $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_u(P) = \sum_{n \geq 0} u_n |a_n|.$$

1. À quelle CNS sur $\mathbf{u}$ l'application N_u définit-elle une norme ?

Correction. La CNS est que $\mathbf{u}$ soit strictement positive.

- s'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} < 0$, alors N_u n'est même pas à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (on prend $P = X^{n_0}$)
- s'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = 0$, le même polynôme que ci-dessus donne $N_u(P) = 0$ mais $P \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$.

On suppose désormais $\mathbf{u}$ strictement positive et on montre que l'on a bien une norme : tout est évident, je le laisse pour vous.

2. À quelle CNS sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ les normes N_u et N_v sont-elles équivalentes ?

Correction. On montre que les normes sont équivalentes si et seulement si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ (en informatique, on dit que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \Theta(v_n)$).

- si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, comme les deux suites ne s'annulent pas, il existe $C > 0$ et $D > 0$ telles que **pour tout** n , $u_n \leq C v_n$ et $v_n \leq D u_n$. Alors on obtient immédiatement, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_u(P) \leq C N_v(P)$ et $N_v(P) \leq D N_u(P)$, ce qui signifie exactement que les deux normes sont équivalentes.
- si, au contraire, la proposition n'est pas vérifiée, disons que l'on n'a pas $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$. Alors, pour tout C dans $\mathbb{N}$, pour tout N dans $\mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $u_n > C v_n$. Cela permet de construire une extraction φ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \geq \varphi(n) v_{\varphi(n)}$. Ainsi, si $P_n = \frac{X^{\varphi(n)}}{v_n}$, la suite (P_n) est bornée par 1 pour N_v mais n'est pas bornée pour N_u .

Exercice 21. Faire converger $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers n'importe quel polynôme. ●●● Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers P .

Correction. On remarque déjà que, quelle que soit la base $\mathcal{B} = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$, si, pour $P = \sum_{n \geq 0} \lambda_n Q_n$, on note

$$N_{\mathcal{B}}(P) = \sum_{n \geq 0} \frac{|\lambda_n|}{2^n},$$

alors $N_{\mathcal{B}}$ définit une norme.

On fixe alors P dans $\mathbb{R}[X]$, de degré d et $\mathcal{B} = (Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$Q_k = X^k \text{ pour } k \leq d \text{ et } Q_k = X^k - P \text{ si } k > d.$$

Il s'agit bien d'une base car $\deg(Q_k) = k$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

On a alors $X^k - P = 1 \cdot Q_k$ pour tout $k > d$. Donc, pour $k > d$, on a

$$N_{\mathcal{B}}(X^k - P) = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers P pour la norme $N_{\mathcal{B}}$.

3 Exercices théoriques

Exercice 22. ○○○ Soit E un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que pour tous x et y dans E , $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$.

Correction. On écrit que

$$\begin{aligned} \|x\| + \|y\| &= \left\| \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right\| + \left\| \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{x+y}{2} \right\| + \left\| \frac{x-y}{2} \right\| + \left\| \frac{x+y}{2} \right\| + \left\| \frac{x-y}{2} \right\| \\ &\leq \|x + y\| + \|x - y\|. \end{aligned}$$

2. Soient $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x + y + z = 0$. Montrer que $\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$.

Correction. On remarque (un peu astucieusement) que

$$x = \frac{3x}{3} = \frac{1}{3}[2x - y - z] = \frac{1}{3}[x - y + y - z]$$

D'où, par l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leq \frac{1}{3} \|x - y\| + \frac{1}{3} \|y - z\|.$$

Ainsi, en faisant de même pour y et z ,

$$\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$$

Exercice 23. ●○○ Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E . On appelle diamètre de A la borne supérieure, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, définie par :

$$\Delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|.$$

1. Démontrer que A est bornée si et seulement si $\Delta(A)$ est fini.

Correction. Si A est bornée, disons que pour tout x dans A , $\|x\| \leq M$, où $M > 0$. Alors pour tous x et y dans A ,

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M,$$

d'où $\{\|x - y\|, (x, y) \in A^2\}$ est non vide, majorée, donc admet une borne supérieure finie.

Réciproquement, si A n'est pas bornée, on prend $x_0 \in A$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $x_n \in A$ vérifiant $\|x_n\| \geq n$. Alors

$$\begin{aligned} \|x_n - x_0\| &\geq |\|x_n\| - \|x_0\|| \\ &\geq n - \|x_0\| \text{ pour } n \geq \|x_0\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

donc $\Delta(A) = +\infty$.

2. Quel est le diamètre d'une boule fermée de rayon $r > 0$?

Correction. Soit B une telle boule, x_0 son centre. Par inégalité triangulaire, pour tous x et y dans B , $\|x - y\| = \|x - x_0 + x_0 - y\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0 - y\| \leq 2r$.
Ensuite, soit a de norme r . Alors $x = x_0 + a \in B$ et $y = x_0 - a \in B$. Et $\|x - y\| = 2\|a\| = 2r$, d'où $\Delta(B) = 2r$.

3. Soit B une partie non vide de E . On appelle distance de A à B le réel positif :

$$d(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\|.$$

Démontrer que $\Delta(A \cup B) \leq \Delta(A) + \Delta(B) + d(A, B)$.

Correction. Si $\Delta(A) = +\infty$ ou $\Delta(B) = +\infty$, l'inégalité est triviale. On suppose donc A et B bornées. Soient x et y dans $A \cup B$. Trois cas se présentent :

- Si $(x, y) \in A^2$, $\|x - y\| \leq \Delta(A) \leq \Delta(A) + \Delta(B) + d(A, B)$.
- Si $(x, y) \in B^2$, $\|x - y\| \leq \Delta(B) \leq \Delta(A) + \Delta(B) + d(A, B)$.
- Si $x \in A$ et $y \in B$ (le cas $x \in B$ et $y \in A$ est symétrique). Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\leq \|x - a\| + \|a - b\| + \|b - y\| \\ &\leq \Delta(A) + \|a - b\| + \Delta(B). \end{aligned}$$

Cette majoration étant vraie pour tout couple $(a, b) \in A \times B$, on peut « passer à la borne inférieure » sur (a, b) dans le membre de droite :

$$\|x - y\| \leq \Delta(A) + d(A, B) + \Delta(B).$$

Dans tous les cas, le réel $\Delta(A) + \Delta(B) + d(A, B)$ est un majorant de l'ensemble $\{\|x - y\|, (x, y) \in (A \cup B)^2\}$. En passant à la borne supérieure, on obtient bien :

$$\Delta(A \cup B) \leq \Delta(A) + \Delta(B) + d(A, B).$$

Exercice 24. *Tout parallélogramme est une boule !.* ●●○ Soit P un vrai parallélogramme du plan $\mathbb{R}^2$ centré sur l'origine. Construire une norme dont P soit la boule unité fermée.

Correction. Soit $\mathcal{P} = ABCD$ un parallélogramme. On suppose, quitte à faire une translation, que $ABCD$ est centré en 0. Alors le parallélogramme est une figure délimitée par 4 droites, deux paires parallèles. Or, deux droites parallèles sont d'équation $ax + by = \pm 1$ (on écrit $y = mx \pm p$ et on divise par p), les deux autres de la forme $cx + dy = \pm 1$. Alors $\mathcal{P}$ est la boule unité pour la norme

$$N(x, y) = \max(|ax + by|, |cx + dy|).$$

Exercice 25. *Norme et convexité de la boule.* ●●○ Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ est une partie convexe de E .

Correction. Pour une fois, on va s'intéresser à d'autres choses que la séparation !

Déjà, si on a une norme, on a vu que la boule unité était convexe !

Ensuite, si B est convexe, on montre l'inégalité triangulaire. Soient x et y dans E , non nuls. On note $a = \frac{x}{\|x\|}$ et

$b = \frac{y}{\|y\|}$, on a $a \in B$, $b \in B$. Mais, en notant $\lambda = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}$ et $\mu = \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}$, on a, par convexité de la boule,

$\lambda a + \mu b \in B$, d'où $\frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|} a + \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|} b \in B$, i.e. $\frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \in B$, d'où

$$\left\| \frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \right\| \leq 1,$$

ou encore

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

ce qui est exactement l'inégalité triangulaire.

Exercice 26. Suites de Cauchy réelles. ●●○ Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \geq N, \quad |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

1. Montrer que toute suite réelle convergente est de Cauchy.

Correction. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente, ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soient n et p supérieurs ou égaux à N . Alors

$$|u_n - u_p| = |u_n - \ell| + |\ell - u_p| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc la suite est de Cauchy.

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

- (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

Correction. On remarque juste que l'on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - u_N| \leq 1$, i.e. $|u_n| \leq 1 + |u_N|$, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang, donc est bornée. Donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.

- (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Correction. Soit ℓ la valeur d'adhérence de (u_n) trouvée précédemment, φ une extraction telle que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, on dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq N'$, $|u_n - u_p| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq \max(N, N')$. Alors $\varphi(n) \geq \max(N, N')$ aussi, d'où

$$|u_n - \ell| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui signifie que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

3. Énoncer un nouveau critère de convergence d'une série numérique réelle.

Correction. Pour démontrer que $\sum a_n$ converge, il suffit que pour tout ε , il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

On utilise surtout la contraposée pour montrer la divergence d'une série.

Exercice 27. Complétude et séries absolument convergentes. ●●○ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite (u_n) d'éléments de E est dite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \geq N, \quad \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$$

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

- toute suite de Cauchy d'éléments de E converge ;
- pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la convergence de la série $\sum \|u_n\|$ implique la convergence de la série $\sum u_n$.

Correction.

- si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\sum \|u_n\|$ converge. Notons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Montrons que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$\sum_{n \geq N} \|u_n\| \leq \varepsilon$. Soient $n, p \geq N$, disons $n \leq p$. Alors

$$\|S_p - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^p \|u_k\| \leq \sum_{k \geq n+1} \|u_k\| \leq \varepsilon,$$

donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge par hypothèse. Donc $\sum u_n$ converge.

- si pour toutes suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la convergence de la série $\sum \|u_n\|$ implique la convergence de la série $\sum u_n$, démontrons que toute suite de Cauchy d'éléments de E converge.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E . Soit $k \in \mathbb{N}$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$. On dispose alors que $\varphi(k) \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq \varphi(k)$, $\|v_n - v_p\| \leq \varepsilon = \frac{1}{2^k}$. Sans perte de généralité, on peut de plus supposer $\varphi(k) \geq \varphi(k-1)$.

Ainsi, si l'on considère $(v_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, on a, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\|v_{\varphi(k+1)} - v_{\varphi(k)}\| \leq \frac{1}{2^k}$, donc la série $\sum \|v_{\varphi(k+1)} - v_{\varphi(k)}\|$ converge, donc, par hypothèse, la série $\sum v_{\varphi(k+1)} - v_{\varphi(k)}$ converge, donc la suite $(v_{\varphi(k)})$ converge vers $\ell \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $n, p \geq N$, $\|v_n - v_p\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On dispose aussi de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\|v_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq \max(N, N')$, on a

$$\|v_n - \ell\| = \|v_n - v_{\varphi(n)} + v_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \|v_n - v_{\varphi(n)}\| + \|v_{\varphi(n)} - \ell\| = \varepsilon,$$

ce qui signifie que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Exercice 28. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, par $\|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. On dit qu'une suite $(P_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq N \implies \|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$.

1. Montrer que $(P_n)_n$ est de Cauchy.

Correction. Soient n, p des entiers. Alors

$$\|P_{n+p} - P_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{X^k}{k!} \right\| = \frac{1}{n+1}$$

Ainsi, si $\varepsilon > 0$, si N est tel que $\frac{1}{N+1} \leq \varepsilon$, on a, pour tous $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $n \geq N \implies \|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$. Donc la suite est de Cauchy.

2. Montrer que $(P_n)_n$ ne converge pas.

Correction. Supposons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $d = \deg(P)$. Alors, pour $n \geq d+1$, $\|P_n - P\| \geq \frac{1}{d+1}$, étant donné que, pour $k > d$, le coefficient de $P_n - P$ devant X^k est $\frac{1}{k}$. Donc $\|P_n - P\|$ ne tend pas vers 0, ce qui empêche $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de converger.

Exercice 29. Suites vérifiant $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. ●●●

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs d'adhérence de $u_n = \sqrt[3]{n} \cos(\pi \sqrt{n})$.

Correction. Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont, par définition, les parties I de $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (a, b) \in I^2$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset I$.

Notons donc I l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) . On rappelle que x est une valeur d'adhérence de (u_n) ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - x| \leq \varepsilon.$$

Soient a et b dans I . Soit $c \in [a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$ (que l'on peut supposer strictement inférieur à $c - a$), soit N dans $\mathbb{N}$.

On dispose de $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

Notons $N'' = \max(N, N')$. On dispose aussi de $n \geq N''$ et de $p \geq N''$ tels que $|u_n - a| \leq \varepsilon$ et $|u_p - b| \leq \varepsilon$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $n < p$.

On note alors $A = \{k \in \llbracket n, p \rrbracket, u_k \leq c\}$. A est une partie non vide car $\varepsilon < c - a$, donc $u_n < c$. A est majorée par p . Donc A admet un plus grand élément q . Mais alors $u_q \leq c < u_{q+1}$, ce qui assure que $|u_q - c| \leq |u_q - u_{q+1}| \leq \varepsilon$.

Ainsi, c est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc I est un intervalle.

Pour l'exemple d'application, on montre déjà que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt[3]{n+1} \cos(\pi \sqrt{n+1}) - \sqrt[3]{n} \cos(\pi \sqrt{n}) \\ &= \sqrt[3]{n+1} \cos(\pi \sqrt{n+1}) - \sqrt[3]{n} \cos(\pi \sqrt{n+1}) + \sqrt[3]{n} \cos(\pi \sqrt{n+1}) - \sqrt[3]{n} \cos(\pi \sqrt{n}) \\ &= (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cos(\pi \sqrt{n+1}) + \sqrt[3]{n} (\cos(\pi \sqrt{n+1}) - \cos(\pi \sqrt{n})) \\ &= (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cos(\pi \sqrt{n+1}) - 2\sqrt[3]{n} \sin\left(\pi \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} &= \sqrt[3]{n} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1/3}}{3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc $(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \cos(\pi \sqrt{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{n} \sin\left(\pi \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n} \frac{1}{4\sqrt{n}} = \frac{1}{4n^{1/6}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc $\sqrt[3]{n} \sin\left(\pi \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}\right) \sin\left(\pi \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.

Mais $u_{4n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $u_{(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$, donc l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est $\mathbb{R}$.

2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^n$ avec $u_{k+1} - u_k \rightarrow 0$ et un nombre fini de valeurs d'adhérence. Montrer qu'elle converge. Que se passe-t-il si elle n'est pas bornée ?

Correction. Par le résultat précédent, l'ensemble des valeurs de (u_n) est un intervalle. Or, un intervalle ayant un nombre fini de points est un singleton, donc (u_n) converge. Si (u_n) n'est pas bornée, (u_n) converge ou tend vers $\pm\infty$.

Exercice 30. Autour de la distance à un sev. ●●○ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si A est une partie de E et $\varepsilon \in E$, on définit $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Démontrer que pour tout x dans E , pour tout λ dans $\mathbb{K}$, $d(\lambda x, F) = |\lambda|d(x, F)$.

Correction. Soit x dans E et λ dans $\mathbb{K}^*$ (si $\lambda = 0$, tout est évident). Soit $f \in F$. Alors

$$\|\lambda x - f\| = |\lambda| \left\| x - \frac{1}{\lambda} f \right\|.$$

Or, $f \in F$, ce qui assure que

$$d(\lambda x, F) \leq \|\lambda x - f\| = |\lambda| \left\| x - \frac{1}{\lambda} f \right\|,$$

ce pour tout f dans F . Mais $f \mapsto \frac{1}{\lambda} f$ est une bijection de F dans F , donc, pour tout f' dans F ,

$$d(\lambda x, F) \leq |\lambda| \|x - f'\|.$$

Ainsi, $\frac{1}{|\lambda|} d(\lambda x, F)$ est un minorant de $\{\|x - f'\|, f' \in F\}$, ce qui assure que $d(\lambda x, F) \leq |\lambda|d(x, F)$.

On fait de même pour l'autre inégalité en remarquant que, si $f \in F$,

$$|\lambda|d(x, F) \leq |\lambda| \left\| x - \frac{1}{\lambda} f \right\| = d(\lambda x, F).$$

On définit $N : x \mapsto d(x, F) + d(x, G)$.

2. Démontrer que N vérifie les axiomes de positivité, homogénéité, inégalité triangulaire.

Correction.

- La positivité est évidente.
- l'homogénéité vient d'être démontrée.
- Démontrons l'inégalité triangulaire : soient x et y dans E . Soient f et f' dans F . Alors, par définition, comme $f_1 + f_2 \in F$,

$$d(x + y, F) \leq \|x + y - f - f'\| \leq \|x - f\| + \|y - f'\|,$$

ceci étant vrai pour tout f dans F et f' dans F . On voudrait « passer à l'inf », on le justifie proprement : on prend (f_n) dans F telle que $\|x - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x, F)$. En utilisant l'inégalité précédente avec f_n et f' et en faisant $n \rightarrow +\infty$, on a

$$d(x + y, F) \leq d(x, F) + \|y - f'\|,$$

Puis on fait de même pour y , ce qui permet d'avoir

$$d(x + y, F) \leq d(x, F) + d(y, F).$$

D'où l'inégalité triangulaire pour N .

3. (5/2) CNS pour que N soit une norme ?

Correction. La CNS est $\overline{F} \cap \overline{G} = \{0_E\}$. En effet, si ce n'est pas le cas, on prend $x \in \overline{F} \cap \overline{G}$ différent de 0_E et alors $N(x) = 0$.

Et, si c'est le cas, soit x dans E tel que $N(x) = 0$. Alors $d(x, F) = 0$ et $d(x, G) = 0$, donc $x \in \overline{F}$ et $x \in \overline{G}$ donc $x = 0_E$.

4 Du côté des concours

Exercice 31. Mines-Ponts 22. 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Montrer l'égalité du parallélogramme : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Correction. C'est quasi-immédiat : soit $(x, y) \in E^2$. Alors

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.\end{aligned}$$

2. On note, sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)| dt$. Vérifier qu'il s'agit d'une norme sur E mais qu'elle n'est pas euclidienne (i.e. qu'elle ne vient pas d'un produit scalaire).

Correction. On ne montre pas qu'il s'agit d'une norme. On considère la fonction $f : x \mapsto 1$ et $g : x \mapsto x$. Alors $f - g : x \mapsto 1 - x$ et $f + g : x \mapsto 1 + x$

$$\|f - g\|_{L^1}^2 + \|f + g\|_{L^1}^2 = \left(\int_0^1 1 - x dx\right)^2 + \left(\int_0^1 1 + x dx\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}.$$

alors que

$$2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 2\frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{2} \neq \frac{5}{2}.$$

Donc $\|\cdot\|_{L^1}$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Donc elle ne vient pas d'un produit scalaire.

3. Réciproquement, on veut montrer que si une norme $\|\cdot\|$ satisfait l'identité du parallélogramme, alors elle est associée à produit scalaire $\varphi(x, y) = \alpha(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. Préciser la valeur de α puis montrer que φ est alors bien un produit scalaire, de norme $\|\cdot\|$.

Correction. Analyse. Supposons que $\|\cdot\|$ soit associée à un produit scalaire $\varphi(x, y)$. Alors on aurait

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle - \|y\|^2 = 4\langle x, y \rangle,$$

donc, nécessairement,

$$\varphi(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

Synthèse. Posons, pour tous (x, y) , $\varphi(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$. Alors φ est clairement symétrique. Il faut vérifier la bilinéarité, qui est **très difficile**.

- déjà,

Exercice 32. Mines-Ponts 22. Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose : $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_{\infty}^{[0,1]}$.

1. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction. Comme toujours, la positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont évidentes. Réfléchissons à la séparation.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $N_a(P) = 0$. Alors $|P(a)| + \|P'\|_{\infty}^{[0,1]} = 0$. Donc

- $\forall t \in [0, 1], P'(t) = 0$ donc P' possède une infinité de racines, donc P' est le polynôme nul. On en déduit que P est constant.
- De plus, $|P(a)| = 0$. Le polynôme P étant constant, on en déduit que c'est le polynôme nul.

La séparation est donc prouvée.

2. Montrer que si a et b sont dans $[0, 1]$ alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction. Soient a et b dans $[0, 1]$, $a < b$. On remarque que

$$P(b) = P(a) + \int_a^b P'(t) dt,$$

donc

$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_a^b |P'(t)| dt \leq |P(a)| + (b - a) \|P'\|_{\infty}^{[0,1]} \leq |P(a)| + \|P'\|_{\infty} \leq N_a(P).$$

Donc $N_b(P) = |P(b)| + \|P'\|_{\infty}^{[0,1]} \leq 2N_a(P)$. De même, par symétrie des rôles de a et de b , on montre que

$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$

Donc les normes N_a et N_b sont équivalentes.

3. Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Correction. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $P_n(a) = \frac{a^n}{2^n}$. De plus, $P'_n = n \frac{X^{n-1}}{2^n}$, maximum en $X = 1$. donc $\|P'_n\|_\infty^{[0,1]} = \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Ensuite,

- si $|a| < 2$, alors $|P_n(a)| = \frac{|a|^n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 pour la norme N_a .
- si $|a| > 2$, alors $|P_n(a)| = \frac{|a|^n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée pour N_a donc ne peut pas converger,
- si $a = 2$, $|P_n(a)| = \frac{|a|^n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc **si** (P_n) converge vers Q , on a nécessairement $N_a(Q) = 1$. On teste $Q(X) = 1$:

$$N_a(P_n - Q) = |P_n(a) - Q(a)| + \|P'_n\|_\infty^{[0,1]} = 0 + \|P'_n\|_\infty^{[0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 pour N_a .

Attention ! Savoir que $N_a(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ ne permet pas de conclure a priori. Il faut trouver un candidat Q et montrer que $N_a(P_n - Q) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- si $a = -2$, il y a un problème car $P_n(a) = (-1)^n$. On va montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger. Supposons que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors

$$N_a(P_n - Q) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ en particulier } |P_n(a) - Q(a)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc $P_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Q(a)$. Comme $(P_n(a))_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui n'a pas de limite, on en déduit que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Finalement, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $a \in]-2, 2]$. Si $a \in]-2, 2[$, sa limite est 0 ; si $a = 2$, sa limite est 1.

Exercice 33. CCINP 24. Soit $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour tout $P \in E$:

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$$

1. Montrer que N_a est une norme.

Correction.

- Déjà N_a va bien de E dans $\mathbb{R}_+$,
- (homogénéité) Ensuite, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} N_a(\lambda P) &= |\lambda P(a)| + \int_0^1 |\lambda P'(t)| dt \\ &= |\lambda| \cdot |P(a)| + |\lambda| \int_0^1 |P'(t)| dt \\ &= |\lambda| N_a(P), \end{aligned}$$

d'où l'homogénéité.

- (séparation) Soit $P \in E$ tel que $N_a(P) = 0$. Alors $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$. Mais $|P'|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, donc pour tout t dans $[0, 1]$, $|P'(t)| = 0$. Donc P' admet une infinité de racines, donc P' est le polynôme nul. Ainsi, P est constant et, comme $P(a) = 0$, P est nul. D'où la séparation.

- (inégalité triangulaire) Soient P et Q dans E . Alors

$$N_a(P + Q) = |P(a) + Q(a)| + \int_0^1 |P'(t) + Q'(t)| dt \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt + |Q(a)| + \int_0^1 |Q'(t)| dt = N_a(P) + N_a(Q)$$

d'où la séparation.

Donc N_a définit bien une norme.

2. (a) Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.

Correction. Soit $P \in E$. On remarque que

$$\begin{aligned} |P(1)| &= \left| P(0) + \int_0^1 P'(t) dt \right| \\ &\leq |P(0)| + \int_0^1 |P'(t)| dt = N_0(P) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$N_1(P) = |P(1)| + \int_0^1 |P(t)| dt \leq 2N_0(P).$$

De même,

$$|P(0)| = \left| P(1) - \int_0^1 P'(t) dt \right| \leq N_1(P),$$

donc

$$N_0(P) \leq 2N_1(P).$$

Donc les normes N_0 et N_1 sont équivalentes.

- (b) Montrer que pour toute suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, P_n converge dans (E, N_0) si et seulement si elle converge dans (E, N_1) .

Correction. C'est une question de cours, liée à la définition de normes équivalentes.

3. (a) Montrer que $\forall (a, b) \in [0, 1]^2$, P_n converge dans (E, N_a) si et seulement si P_n converge dans (E, N_b) .

Correction. On raisonne comme précédemment. On écrit que

$$\begin{aligned} |P(b)| &= \left| P(a) + \int_a^b P'(t) dt \right| \\ &\leq |P(a)| + \int_a^b |P'(t)| dt \\ &\leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt \text{ car } [a, b] \subset [0, 1] \\ &\leq N_a(P). \end{aligned}$$

Donc $N_b(P) \leq 2N_a(P)$ et $N_a(P) \leq 2N_b(P)$, donc N_a et N_b sont équivalentes, donc P_n converge dans (E, N_a) si et seulement si P_n converge dans (E, N_b) .

- (b) Montrer que si $1 \leq a < b$, alors l'équivalence précédente n'est plus valable. (Indication : on pourra poser $P_n = \left(\frac{X}{c}\right)^n$ avec c une constante.)

Correction. On considère $c = \frac{a+b}{2}$, i.e. $a < c < b$, et

$$P_n(X) = \left(\frac{X}{c}\right)^n.$$

Alors

$$\begin{aligned} N_a(P_n) &= \left(\frac{a}{c}\right)^n + \int_0^1 n \frac{x^{n-1}}{c^n} dx \\ &= \left(\frac{a}{c}\right)^n + \frac{1}{c^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

donc (P_n) converge vers le polynôme nul pour N_a .

En revanche,

$$N_b(P_n) = \left(\frac{b}{c}\right)^n + \frac{1}{c^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc (P_n) ne converge pas pour la norme N_b (car toute suite convergente est bornée).

4. Que dire si $E = \mathbb{R}_n[X]$?

Correction. Si $E = \mathbb{R}_n[X]$, E est de dimension finie et, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 34. Mines-Ponts PC 24. Soit E l'espace des suites complexes bornées. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ on pose

$$N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \text{ et } N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont bien définis.

Correction. Notons M un majorant de $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{|u_n|}{2^n} \leq \frac{M}{2^n} \text{ et } \frac{|u_n|}{n!} \leq \frac{M}{n!}$$

Comme la série géométrique de terme général $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge et la série de l'exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout x , on en déduit, par comparaison de séries à termes positifs, que

les séries de termes généraux $\left(\frac{|u_n|}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{|u_n|}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .

Correction. On ne vérifie que N_1 , pour N_2 on fait de même.

- (positivité) déjà, N_1 est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,
- (homogénéité) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$N_1(u) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda u_n|}{2^n} = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} = |\lambda| N_1(u),$$

d'où l'homogénéité.

- (séparation) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, vérifiant $N_1(u) = 0$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} = 0,$$

mais, comme pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{|u_n|}{2^n} \geq 0$, on en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{|u_n|}{2^n} = 0$, ce qui signifie que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle. D'où la séparation.

- (inégalité triangulaire) Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E . Alors

$$\begin{aligned} N_1(u+v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n + v_n|}{2^n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n| + |v_n|}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|v_n|}{2^n} = N_1(u) + N_1(v). \end{aligned}$$

3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $N_2 \leq C N_1$.

Correction. On sait, comme la série de terme général $\frac{2^n}{n!}$ converge, que $\frac{2^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\frac{1}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right)$, donc, a fortiori, $\frac{1}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{2^n}\right)$. On dispose donc de $C > 0$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\frac{1}{n!} \leq \frac{C}{2^n}$. Ainsi, pour tout $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E ,

$$N_2(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{n!} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{C \cdot |u_n|}{2^n} = C N_1(u).$$

D'où le résultat attendu.

4. Montrer qu'il n'existe pas de constante positive D telle que $N_1 \leq D N_2$.

Correction. Supposons qu'il existe une telle constante D . Alors pour toute $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E , on aurait

$$\sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{2^n} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{n!}.$$

Prenons, pour k dans $\mathbb{N}$, $u^{(k)} = (u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_n^{(k)} = \delta_{n,k} k!$. Alors $N_1(u^{(k)}) = \frac{k!}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$ et $N_2(u^{(k)}) = \frac{2^k}{2^k} = 1$, ce qui est en contradiction avec l'existence de D .

Indications

- Ex 1.** 1. Pour l'inégalité triangulaire, on pourra noter $A(f) = \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$ et remarquer que $N(f)$ est la norme 2 du vecteur $\begin{pmatrix} f(0) \\ A(f) \end{pmatrix}$.
2. On pourra utiliser, en le démontrant, que pour tous a et b positifs, $a + b \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Ex 2.** 2. Il peut être utile de se rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si on ne veut pas trop mettre les mains dans le cambouis...
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie...
- Ex 7.** 1. On aura intérêt à penser à la variation de la constante ou, plus directement, à considérer $t \mapsto f(t)e^t$.
- Ex 9.** 2. Pour la boule unité pour N , remarquer qu'elle est symétrique par rapport à 0, et considérer les quatre quarts de plan.
3. On aura intérêt à étudier la fonction $t \mapsto \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.
- Ex 10.** Penser au cours d'algèbre linéaire...
- Ex 11.** 2. Utiliser l'exercice 7.
- Ex 12.** 1. Penser au fait qu'il ne doit pas y avoir de « trou » entre les $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Montrer que ce n'est pas le cas : trouver une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\|f_p\|_\infty = 1$ mais $N_1(f_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
- Ex 13.** 1. On construira une suite de fonctions affines par morceaux de support $\left[0, \frac{2}{n}\right]$.
- 2.b. On utilisera la base d'interpolation de Lagrange.
- Ex 14.** 3.b. On remarquera que $t \mapsto \det(B - tI_n)$ est une fonction polynomiale qui admet, donc un nombre fini de zéros.
- Ex 16.** 2. La difficulté ici est dans la manipulation des objets : on manipule des suites de suites ! Pour la non équivalence, on a intérêt à prendre des suites nulles à partir d'un certain rang, qui forment des « pics ».
- Ex 19.** 2. Pour trouver une suite qui tend vers 0 pour N_1 , se poser la question de ce que serait une fonction f vérifiant $N_1(f) = 0$. Et construire un polynôme à partir de cette fonction.
- Ex 21.** On construira une norme du type $N(Q) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{2^n}$ où $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les coefficients de Q dans une base de $\mathbb{R}[X]$ bien choisie.
- Ex 24.** Dessiner ! Supposer que le parallélogramme est centré en 0, et écrire les équations des droites le délimitant.
- Ex 27.** Pour montrer que $(2) \implies (1)$, on pourra construire une sous-suite convergente.
- Ex 29.** 1. Pour la première partie, penser au fait qu'un ensemble I est un intervalle si et seulement si pour tous $a < b$, on a $[a, b] \subset I$. Pour la seconde, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle de $\mathbb{R}$ non borné.
- Ex 30.** 1. Revenir à des éléments $f \in F$ et penser à la définition de la borne inférieure.