

TD 04

Normes et espaces vectoriels normés

1 Exercices classiques

Exercice 1. Norme « d'énergie ». ●●○ On définit sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'application N par :

$$N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt}$$

1. Démontrer que N est une norme.
2. Démontrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 2. ●●○ On considère les trois applications définies sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\|M\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}|; \quad \|M\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i, j \leq n} m_{ij}^2}; \quad \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |m_{ij}|$$

1. Montrer que ces applications sont des normes sur E .
2. Montrer qu'elles vérifient de plus, pour les deux premières : $\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$.
3. Prouver que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|MN\| \leq c \cdot \|M\| \cdot \|N\|$$

Exercice 3. Normes et boules unité. ●○○ Soient N_1 et N_2 deux normes sur un e.v. E et B_1 et B_2 les boules unités fermées associées. Montrer que $B_1 = B_2$ si, et seulement si, $N_1 = N_2$.

Exercice 4. Une autre norme ∞ . ●●● Soient $\mathcal{C}$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}$. On pose $\forall f \in \mathcal{C}, N_g(f) = \|fg\|_\infty$.

1. À quelle condition sur g l'application N_g est-elle une norme ?
2. Si la condition précédente est réalisée, N_g est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 5. ●●○ Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (où la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang) on pose :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt, \quad N_3(P) = \sup_{t \in [0, 1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E .
2. Donner trois inégalités optimales entre N_1 et N_2, N_2 et N_3, N_1 et N_3 . Démontrer qu'à chaque fois, les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 6. Des normes intégrales non équivalentes. ●●○ Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}, N_a$ est une norme.
2. Démontrer que pour tous $a, b \in [0, 1], N_a$ et N_b sont équivalentes.
3. (a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, P_n = X^n/2^n$. Déterminer pour quelles valeurs de a la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de N_a et préciser dans ce cas sa limite.
 (b) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$.

Exercice 7. Normes ∞ et dérivées. ●●○ Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose

$$\forall f \in E \quad N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f + f'\|_\infty$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E puis les comparer entre elles.
2. Sont-elles équivalentes à $\|f\|_\infty$?

Exercice 8. Inégalités de Hölder et de Minkowski. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout réel $p > 1$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. (a) Montrer que pour tous réels positifs α et β , $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$.
(b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$. On commencera par traiter le cas $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
2. (a) Établir que $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1}$.
(b) En déduire l'inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
3. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$.

2 Normes concrètes

Exercice 9. Dessins de boules unité. ●○○ On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$.

1. Vérifier que N est une norme.
2. Représenter les boules unité pour les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ et N .
3. ●●○ Reprendre les questions précédentes avec la norme définie par : $N'(x, y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.

Exercice 10. CNS pour être une norme sur $\mathbb{K}^n$. ●○○ Soit $E = \mathcal{C}^0([0; 1], \mathbb{K})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$ pour que l'application N définie par $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|_\infty$ soit une norme.

Exercice 11. Normes et équations différentielles. ●●○ Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0; \pi], \mathbb{R}), f(0) = f'(\pi) = 0\}$.

1. On pose, $\forall f \in E$, $N(f) = \|f + f''\|_\infty$.
Montrer que N est une norme puis étudier l'équivalence de N et $\|\cdot\|_\infty$.
2. On pose, $\forall f \in E$, $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f'' + 2f' + f\|_\infty$.
Justifier que N_1 et N_2 sont des normes puis les comparer.

Exercice 12. Une norme discrète sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. ●●● On note $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$. On note, pour $f \in E$, $N_1(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{|f(a_n)|}{2^n}$.

1. À quelle CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'application N_1 est-elle une norme ?
2. Est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 13. Norme et convergence simple. ●●○ Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On considère la propriété (P) suivante :

$$\forall f \in E, \quad \forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}}, \quad \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff \forall t \in [0, 1], \quad f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t). \quad (\mathcal{P})$$

1. Montrer qu'il n'existe aucune norme $\|\cdot\|$ vérifiant la propriété (P).

2. Soient F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus k définies sur $[0, 1]$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_k \in [0, 1]$ distincts.

- (a) Montrer que $\|P\| = \sum_{i=0}^k |P(\alpha_i)|$ définit une norme sur F .
- (b) Montrer que la propriété $(\mathcal{P})$ est vérifiée dans F .

Exercice 14. Normes invariantes par conjugaison. ●●○

- Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| = \|A\|\|B\|$?
- Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \|AB\| = \|BA\|$?
- On veut démontrer de deux manières différentes qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables entre elles, on ait $\|A\| = \|B\|$. On raisonne par l'absurde.
 - Démontrer que pour toutes A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et B dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $\|AB\| = \|BA\|$.
 - Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour p dans $\mathbb{N}$, $B_p = B - \frac{1}{p}I_n$. Démontrer que, pour p assez grand, $B_p \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
 - En déduire que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|AB\| = \|BA\|$. Conclure.

Exercice 15. Suites de matrices et d'endomorphismes. ●●○ Dans cet exercice, on admet la continuité du produit matriciel, c'est-à-dire que si $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ et $B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} B$, alors $A_n B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} AB$.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $AM = MA$ puis que M est une matrice de projection.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice M inversible. Déterminer M .
- Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les suites $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(A_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers les matrices A et B . Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$.
- Soit E un $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie, $\|\cdot\|$ une norme sur E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|u(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$. En considérant $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$ avec n entier non nul, montrer que :

$$E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$$

Exercice 16. ●●○ Soit E l'espace des suites réelles bornées. On note, pour $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E ,

$$N_1(\mathbf{u}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|, \quad N_2(\mathbf{u}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + |u_{2n}| \quad \text{et} \quad N_3(\mathbf{u}) = \sum_{n \geq 0} \frac{|u_n|}{2^n}$$

- Montrer que sont N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes.
- Soit F l'ensemble des suites réelles bornées vérifiant $u_0 = 0$. Montrer que $N_4(\mathbf{u}) = \sup_n |u_{n+1} - u_n|$ est une norme sur F , que $N_4(\mathbf{u}) \leq 2N_1(\mathbf{u})$. Peut-il y avoir égalité ? Montrer que N_1 et N_4 ne sont pas équivalentes.
- N_1 et N_3 sont-elles équivalentes ?
- Si G désigne le sev des suites nulles à partir d'un certain rang, quels sont les éléments de E adhérents à G pour N_1 , i.e. limites de suites d'éléments de G .

Exercice 17. Normes ∞ sur l'ensemble des polynômes. ●●○ Soient $E = \mathbb{R}[X]$, $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments disjoints de $\mathbb{R}$. On définit alors $N_1(P) = \sup_{[a, b]} |P|$ et $N_2(P) = \sup_{[c, d]} |P|$.

- Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
- Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 18. Deux normes polynomiales, deux limites différentes. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour tout $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in E$,

$$N_1(P) = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n} \quad \text{et} \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)| dt.$$

Justifier que N_1 et N_2 sont des normes sur E puis exhiber une suite convergente pour chaque norme mais avec des limites distinctes.

Exercice 19. Deux normes non équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, on note

$$N_1(P) = \|P' - P\|_{\infty, [0;1]} \quad \text{et} \quad N_2(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

1. Vérifier que ce sont des normes.
2. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 20. Une autre norme sur $\mathbb{R}[X]$. ●●○ Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit, pour $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$,

$$N_u(P) = \sum_{n \geq 0} u_n |a_n|.$$

1. À quelle CNS sur $\mathbf{u}$ l'application N_u définit-elle une norme ?
2. À quelle CNS sur $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ les normes N_u et N_v sont-elles équivalentes ?

Exercice 21. Faire converger $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers n'importe quel polynôme. ●●● Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer qu'il existe une norme N sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers P .

3 Exercices théoriques

Exercice 22. ○○○ Soit E un espace vectoriel normé.

1. Démontrer que pour tous x et y dans E , $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$.
2. Soient $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x + y + z = 0$. Montrer que $\|x - y\| + \|y - z\| + \|z - x\| \geq \frac{3}{2}(\|x\| + \|y\| + \|z\|)$.

Exercice 23. ●●○ Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E . On appelle diamètre de A la borne supérieure, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, définie par :

$$\Delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} \|x - y\|.$$

1. Démontrer que A est bornée si et seulement si $\Delta(A)$ est fini.
2. Quel est le diamètre d'une boule fermée de rayon $r > 0$?
3. Soit B une partie non vide de E . On appelle distance de A à B le réel positif :

$$d(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\|.$$

Démontrer que $\Delta(A \cup B) \leq \Delta(A) + \Delta(B) + d(A, B)$.

Exercice 24. Tout parallélogramme est une boule !. ●●○ Soit P un vrai parallélogramme du plan $\mathbb{R}^2$ centré sur l'origine. Construire une norme dont P soit la boule unité fermée.

Exercice 25. Norme et convexité de la boule. ●●○ Soit E un $\mathbb{R}$ -ev et $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et la séparation. Montrer que N est une norme si et seulement si l'ensemble $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ est une partie convexe de E .

Exercice 26. Suites de Cauchy réelles. ●●○ Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \geq N, \quad |u_n - u_p| \leq \varepsilon$$

1. Montrer que toute suite réelle convergente est de Cauchy.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.
 - (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.
 - (b) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. Énoncer un nouveau critère de convergence d'une série numérique réelle.

Exercice 27. Complétude et séries absolument convergentes. ●●○ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une suite (u_n) d'éléments de E est dite de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n, p \geq N, \quad \|u_n - u_p\| \leq \varepsilon$$

Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :

1. toute suite de Cauchy d'éléments de E converge ;

2. pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , la convergence de la série $\sum \|u_n\|$ implique la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 28. ●●○ Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, par $\|P\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$. On dit qu'une suite $(P_n)_n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 \quad n \geq N \implies \|P_{n+p} - P_n\| \leq \varepsilon$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}$.

1. Montrer que $(P_n)_n$ est de Cauchy.
2. Montrer que $(P_n)_n$ ne converge pas.

Exercice 29. Suites vérifiant $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. ●●●

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs d'adhérence de $u_n = \sqrt[3]{n} \cos(\pi \sqrt{n})$.
2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^n$ avec $u_{k+1} - u_k \rightarrow 0$ et un nombre fini de valeurs d'adhérence. Montrer qu'elle converge. Que se passe-t-il si elle n'est pas bornée ?

Exercice 30. Autour de la distance à un sev. ●●○ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Si A est une partie de E et $x \in E$, on définit $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

1. Démontrer que pour tout x dans E , pour tout λ dans $\mathbb{K}$, $d(\lambda x, F) = |\lambda| d(x, F)$.

On définit $N : x \mapsto d(x, F) + d(x, G)$.

2. Démontrer que N vérifie les axiomes de positivité, homogénéité, inégalité triangulaire.
3. (5/2) CNS pour que N soit une norme ?

4 Du côté des concours

Exercice 31. Mines-Ponts 22. 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire.

Montrer l'égalité du parallélogramme : $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

2. On note, sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(t)| dt$. Vérifier qu'il s'agit d'une norme sur E mais qu'elle n'est pas euclidienne (i.e. qu'elle ne vient pas d'un produit scalaire).
3. Réciproquement, on veut montrer que si une norme $\|\cdot\|$ satisfait l'identité du parallélogramme, alors elle est associée à produit scalaire $\varphi(x, y) = \alpha (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. Préciser la valeur de α puis montrer que φ est alors bien un produit scalaire, de norme $\|\cdot\|$.

Exercice 32. Mines-Ponts 22. Soit $a \in \mathbb{R}$, pour $P \in \mathbb{R}[X]$ on pose : $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_\infty^{[0,1]}$.

1. Montrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si a et b sont dans $[0, 1]$ alors N_a et N_b sont équivalentes.
3. Pour quelles valeurs de a la suite des $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Exercice 33. CCINP 24. Soit $a \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour tout $P \in E$:

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$$

1. Montrer que N_a est une norme.
2. (a) Montrer que N_0 et N_1 sont équivalentes.

- (b) Montrer que pour toute suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, P_n converge dans (E, N_0) si et seulement si elle converge dans (E, N_1) .
3. (a) Montrer que $\forall (a, b) \in [0, 1]^2$, P_n converge dans (E, N_a) si et seulement si P_n converge dans (E, N_b) .
(b) Montrer que si $1 \leq a < b$, alors l'équivalence précédente n'est plus valable. (Indication : on pourra poser $P_n = \left(\frac{X}{c}\right)^n$ avec c une constante.)
4. Que dire si $E = \mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 34. Mines-Ponts PC 24. Soit E l'espace des suites complexes bornées. Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ on pose

$$N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \text{ et } N_2(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n!}.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont bien définis.
2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E .
3. Montrer qu'il existe une constante C telle que $N_2 \leq CN_1$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de constante positive D telle que $N_1 \leq DN_2$.

Indications

- Ex 1.** 1. Pour l'inégalité triangulaire, on pourra noter $A(f) = \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 dt}$ et remarquer que $N(f)$ est la norme 2 du vecteur $\begin{pmatrix} f(0) \\ A(f) \end{pmatrix}$.
2. On pourra utiliser, en le démontrant, que pour tous a et b positifs, $a + b \leq \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Ex 2.** 2. Il peut être utile de se rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si on ne veut pas trop mettre les mains dans le cambouis...
3. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie...
- Ex 7.** 1. On aura intérêt à penser à la variation de la constante ou, plus directement, à considérer $t \mapsto f(t)e^t$.
- Ex 9.** 2. Pour la boule unité pour N , remarquer qu'elle est symétrique par rapport à 0, et considérer les quatre quarts de plan.
3. On aura intérêt à étudier la fonction $t \mapsto \frac{|x + ty|}{1 + t^2}$.
- Ex 10.** Penser au cours d'algèbre linéaire...
- Ex 11.** 2. Utiliser l'exercice 7.
- Ex 12.** 1. Penser au fait qu'il ne doit pas y avoir de « trou » entre les $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Montrer que ce n'est pas le cas : trouver une suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que $\|f_p\|_\infty = 1$ mais $N_1(f_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
- Ex 13.** 1. On construira une suite de fonctions affines par morceaux de support $\left[0, \frac{2}{n}\right]$.
- 2.b. On utilisera la base d'interpolation de Lagrange.
- Ex 14.** 3.b. On remarquera que $t \mapsto \det(B - tI_n)$ est une fonction polynomiale qui admet, donc un nombre fini de zéros.
- Ex 16.** 2. La difficulté ici est dans la manipulation des objets : on manipule des suites de suites ! Pour la non équivalence, on a intérêt à prendre des suites nulles à partir d'un certain rang, qui forment des « pics ».
- Ex 19.** 2. Pour trouver une suite qui tend vers 0 pour N_1 , se poser la question de ce que serait une fonction f vérifiant $N_1(f) = 0$. Et construire un polynôme à partir de cette fonction.
- Ex 21.** On construira une norme du type $N(Q) = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda_n}{2^n}$ où $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les coefficients de Q dans une base de $\mathbb{R}[X]$ bien choisie.
- Ex 24.** Dessiner ! Supposer que le parallélogramme est centré en 0, et écrire les équations des droites le délimitant.
- Ex 27.** Pour montrer que $(2) \implies (1)$, on pourra construire une sous-suite convergente.
- Ex 29.** 1. Pour la première partie, penser au fait qu'un ensemble I est un intervalle si et seulement si pour tous $a < b$, on a $[a, b] \subset I$. Pour la seconde, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence est un intervalle de $\mathbb{R}$ non borné.
- Ex 30.** 1. Revenir à des éléments $f \in F$ et penser à la définition de la borne inférieure.