

Chapitre 04 – Normes sur un espace vectoriel

Proposition 1 (Un rappel).

- Soit A une partie de $\mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
 - $M = \sup(A)$ (i.e. M est le plus petit des majorants de A)
 - M majore A et $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, |a - M| \leq \varepsilon$
 - M majore A et $\exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$.
- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
- Si $\lambda > 0$, si A admet une borne supérieure, alors $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$ aussi et $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

1 Norme sur un espace vectoriel

Définition 2. Une norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

- (i) $N(x) = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)
- (ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$ (homogénéité)
- (iii) $\forall (x, y) \in E \times E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

On dit alors que (E, N) est un espace vectoriel normé. La **distance** associée à la norme N est $d(x, y) = N(x - y)$.

Exemple 3.

- Norme associée à un produit scalaire dans un espace préhilbertien réel.
- Normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Norme $\|\cdot\|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Norme intégrale sur un espace de fonctions continues sur un segment.
- Norme intégrale sur $L^1(I), L^2(I)$.
- Normes sur des espaces de polynômes.

Proposition 4. La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$. On dit que c'est une norme d'algèbre.

Proposition 5. Soit (E, N) un espace vectoriel normé, d la distance associée. Alors :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$,
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 6. Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

- La boule ouverte de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $B(x_0, R) = \{x \in E, N(x - x_0) < R\}$.
- La boule fermée de centre x_0 et de rayon R est l'ensemble $B_f(x_0, R) = \overline{B(x_0, R)} = \{x \in E, N(x - x_0) \leq R\}$.
- La sphère de centre x_0 et de rayon R , noté $S(x_0, R)$ est l'ensemble $\{x \in E, N(x - x_0) = R\}$.

Définition 7. Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

- Une partie A de E est dite **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in A, N(x) \leq M$.
- Une partie A de E est dite **convexe** si pour tous x et y dans A , le segment $[x, y]$ est dans A , où $[x, y] = \{(1 - t)x + ty, t \in [0, 1]\}$.
- Une suite d'éléments de E , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, N(x_n) \leq M$.
- Une fonction $f : X \rightarrow E$ est dite bornée s'il existe $M > 0$ tel que : $\forall x \in X, N(f(x)) \leq M$.

Remarque 8. Une boule est toujours bornée, convexe et symétrique par rapport à son centre.

2 Suites d'un espace vectoriel normé

Définition 9 (Convergence au sens d'une norme). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, N une norme sur E , $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

1. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convergente **pour** N s'il existe $\ell \in E$ tel que $N(x_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On dit que ℓ est la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la norme N .
2. Une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{\varphi(n)}$.
3. Une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la limite d'une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

Proposition 10.

1. Il y a unicité de la limite pour une norme donnée.
2. Toute suite convergente est bornée.
3. La limite d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des limites.
4. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.

Théorème 11 (Bolzano-Weierstrass). De toute suite bornée d'un evn de dimension finie on peut extraire une sous-suite convergente.

Exercice 12. Montrer qu'une suite réelle bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge.

3 Comparaison de normes

Définition 13. Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes s'il existe deux réels α et β tels que :

$$\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \text{ et } N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Proposition 14. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, N_1 et N_2 deux normes sur E .

- | | |
|---|---|
| 1. Les assertions suivantes sont équivalentes : | 2. Les assertions suivantes sont équivalentes : |
| (a) $\exists \alpha > 0, \forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$, | (a) N_1 et N_2 sont équivalentes, |
| (b) toute suite bornée pour N_2 l'est pour N_1 , | (b) toute suite bornée pour l'une est bornée pour l'autre, |
| (c) toute suite convergente pour N_2 l'est pour N_1 (et converge vers la même limite) | (c) toute suite convergente pour l'une converge pour l'autre vers la même limite. |

Point de méthode 15. Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 **ne sont pas équivalentes**, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui soit bornée pour N_1 et pas pour N_2 , ou bien qui tende vers 0 pour N_1 mais pas pour N_2 .

Proposition 16. Dans un espace vectoriel **de dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.

4 Séries dans un evn

Définition 17. On définit les sommes partielles, la convergence d'une série d'éléments d'un evn (E, N) comme pour les séries de complexes. On définit la **convergence absolue** comme étant la convergence de $\sum N(u_n)$.

Proposition 18. Toute série absolument convergente est convergente.

Proposition et Définition 19.

1. **Prop.** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge. De même pour $u \in \mathcal{L}(E)$.
3. **Déf.** On note sa somme e^A et on l'appelle exponentielle de A . On adapte pour $u \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 20. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.