

DM 02 à rendre le lundi 21 septembre

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules

1. **Bases.** Problème 1, questions 1 et 2 ; problème 2, parties A et B-I. Durée : 3h.
2. **+ d'algèbre.** Problème 1, questions 1 et 2 ; problème 2 en entier. Durée : 4h.
3. **+ d'analyse** Problème 1 ; problème 2, parties A et B-I. Durée : 4h.
4. **La totale.** Durée : 6h.

Problème 1. Intégration – BECEAS 2020

1. *Les sous-questions sont indépendantes.*

(a) On considère la fonction

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0; \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

(b) i. Prouver la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

On **admet** l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

ii. Déterminer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(jt)}{t} dt$.

(c) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $t \mapsto \ln g(t)$.

(d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Donner, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, un équivalent de $\int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt$.

2. Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Vérifier que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^n t}{t^n} dt$ est convergente.

(b) Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$?

3. On pose, pour tout entier naturel n non nul et tout réel $t > 0$, $h_n(t) = \sin^n t$.

Soit n un entier naturel au moins égal à 2.

(a) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Justifier l'existence d'un réel $K > 0$ pour lequel, pour tout réel t , on a : $|h_n^{(k)}(t)| \leq K$.

(b) i. Quel est le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n ?

ii. Établir l'égalité : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(c) Justifier, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, la convergence absolue de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(k)}(t)}{t^{n-k}} dt$.

(d) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt$ et établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{h_n^{(n-1)}(t)}{t} dt.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Établir, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}(t) = \sin^{2n} t = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+k} \binom{2n}{k} e^{i(2n-2k)t}.$$

(b) En déduire, pour tout réel t , l'égalité

$$h_{2n}^{(2n-1)}(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1} \sin(2jt).$$

(c) En déduire l'égalité : $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2n} dt = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(2n-1)!} \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} \binom{2n}{n+j} j^{2n-1}$.

5. Étude asymptotique de la suite de terme général $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$

(a) Prouver, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

(b) i. Étudier la monotonie de la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$.

ii. En déduire, quand l'entier n tend vers $+\infty$, l'évaluation asymptotique :

$$\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

On pourra, en utilisant le résultat de la question 1-c), donner un équivalent de $\ln\left(\frac{\sin \varepsilon_n}{\varepsilon_n}\right)$ où $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.

(c) i. Justifier l'existence de $a > 0$ tel que, pour tout $u \in [0, a]$, on a : $|e^{-u} - 1| \leq 2u$.

ii. Justifier l'existence d'un réel $b > 0$ tel que, pour tout $t \in]0, b]$,

$$-t^3 \leq \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) + \frac{t^2}{6} \leq 0.$$

On utilisera le résultat de la question 1-c).

iii. En déduire, pour tout entier n assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} (1 - e^{-nt^3}) dt,$$

puis, toujours quand l'entier n est assez grand, l'inégalité

$$\left| \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt - \int_0^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\frac{nt^2}{6}} dt \right| \leq 2 \frac{\ln^4 n}{n}.$$

(d) En déduire, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^n dt \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.$$

On se souviendra du résultat de 1-d).

Problème 2. Algèbre linéaire – d'après Mines PC 2001

Racines carrées de l'endomorphisme $P \mapsto \lambda P + P'$

Soit V un espace vectoriel réel, $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V .

Si $f \in V$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \text{Id}_V$. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes

réels et, étant donné un $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

On note alors D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$; on note D_n l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{cases} \quad \text{et} \quad D_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}.$$

L'objectif du problème est déterminer, en fonction de la valeur du paramètre réel λ , s'il existe g un endomorphisme de E (respectivement de E_n) tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$ (respectivement $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$).

A. Préliminaires

Soient V un espace vectoriel réel et f un endomorphisme de V .

5. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes f^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels emboîtés :

$$\ker(f^0) \subset \ker(f^1) \subset \ker(f^2) \subset \dots \subset \ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1}) \subset \dots$$

On l'appelle *suite des noyaux itérés*.

Correction. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0$ donc $f^{k+1}(x) = 0$. Donc $x \in \ker(f^{k+1})$. D'où la croissance de la suite.

6. Démontrer que, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, alors : $\forall q \geq p, \ker(f^q) = \ker(f^{q+1})$.
En déduire que pour tout entier $k \geq p$, $\ker(f^k) = \ker(f^p)$.

En déduire que, si l'espace vectoriel V est de dimension finie n , la suite des dimensions des noyaux des endomorphismes f^k est constante à partir d'un rang $p \leq n$. En particulier les noyaux $\ker(f^n)$, $\ker(f^{n+1})$ sont égaux.

Correction.

- Déjà, on suppose qu'il existe p tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$. Soit $q \geq p$. Alors

$$\begin{aligned}\ker(f^q) &= \{x \in E, f^q(x) = 0\} \\ &= \{x \in E, f^p(f^{q-p}(x)) = 0\} \\ &= \{x \in E, f^{q-p}(x) \in \ker(f^p)\} \\ &= \{x \in E, f^{q-p}(x) \in \ker(f^{p+1})\} \\ &= \{x \in E, f^{p+1}(f^{q-p}(x)) = 0\} \\ &= \{x \in E, f^{q+1}(x) = 0\} = \ker(f^{q+1}).\end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(f^q) = \ker(f^{q+1})$.

- Par récurrence immédiate, comme la suite $(\ker(f^q))_{q \geq p}$ est constante, on en déduit que pour tout $q \geq p$, $\ker(f^q) = \ker(f^p)$.
- Si $\dim(V) = n \in \mathbb{N}$, on remarque qu'alors la suite $(\dim(\ker(f^q)))_{q \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante tant qu'elle n'est pas constante. Comme elle est majorée, elle est constante à partir d'un certain rang p . Mais comme
 $0 = \dim(\ker(f^0)) < \dim(\ker(f)) < \dim(\ker(f^2)) < \dots < \dim(\ker(f^p)) = \dim(\ker(f^{p+1})),$
on en déduit que $\dim(\ker(f^p)) \geq p$. Comme $\ker(f^p) \subset V$, de dimension n , $p \leq n$.

7. Démontrer que, si $u \in \mathcal{L}(V)$, s'il existe $q \geq 1$ tel que $u^q = 0_{\mathcal{L}(V)}$, alors $u^n = 0_{\mathcal{L}(V)}$.

Correction. C'est une conséquence de la question précédente. S'il existe $q \geq 1$ tel que $u^q = 0$, alors $\ker(u^q) = V$. Donc comme $(\ker(u^q))_{q \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang $p \leq n$, elle est constante égale à V à partir d'un certain rang $p \leq n$. On en déduit que $\ker(u^n) = \ker(u^q) = V$, c'est-à-dire que $u^n = 0$.

L'endomorphisme u est dit nilpotent.

8. Vérifier que, si $n \in \mathbb{N}$, D_n est nilpotent. Expliciter la suite des noyaux itérés $(\ker(D_n^\ell))_{0 \leq \ell \leq n+1}$.

Correction. Si $n \in \mathbb{N}$, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , $P^{(n+1)} = 0$, donc D_n est nilpotent. Si $\ell \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$,

$$\ker(D_n^\ell) = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P^{(\ell)} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}\} = \mathbb{R}_{\ell-1}[X],$$

avec la convention $\mathbb{R}_{-1}[X] = \{0\}$.

9. Soit P un polynôme de degré n . Démontrer que $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^n(P))$ est une base de E_n .

Correction. On remarque que $\deg(P) = n$, $\deg(D(P)) = n-1, \dots, \deg(D^n(P)) = 0$. Ainsi, la famille $(P_0, \dots, P_n) = (D^n(P), D^{n-1}(P), \dots, D(P), P)$ est une famille de $n+1$ polynômes tels que $\deg(P_k) = k$, donc c'est une base de $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

B. Premiers résultats

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple. On note toujours $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

B-I. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Démontrer que, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$, alors g commute avec D_n . En déduire que E_p est **stable** par g , i.e. pour tout Q dans E_p , $g(Q) \in E_p$.

On note $g_p : \begin{cases} E_p \rightarrow E_p \\ P \mapsto g(P) \end{cases}$. Démontrer la relation : $(g_p)^2 = \lambda \text{Id}_{E_p} + D_p$.

Correction. Là encore, il faut distinguer par plusieurs points les différentes étapes de la question.

- On calcule

$$g \circ D_n = g \circ (g^2 - \lambda \text{Id}_{E_n}) = g^3 - \lambda g = (g^2 - \lambda \text{Id}_{E_n}) \circ g = D_n \circ g,$$

donc g commute avec D_n .

- ensuite, g commute avec D_n donc avec D_n^p pour tout p , donc g stabilise le noyau de D_n^p pour tout p , donc g stabilise E_p pour tout p .
- On a alors pour tout P dans E_p ,

$$g_p^2(P) = g^2(P) = \lambda P + P' = \lambda \text{Id}_{E_p}(P) + D_p(P),$$

d'où l'égalité désirée.

On admet que, de même, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$, tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$, alors g commute avec D ; de même pour tout n dans $\mathbb{N}$, E_n est stable par g .

Et, en notant $g_n : \begin{cases} E_n \rightarrow E_n \\ P \mapsto g(P) \end{cases}$, on a encore $(g_n)^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$.

On fixe alors g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$.

11. Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension $n + 1$, stable par D .

Démontrer qu'il existe un polynôme P de F de degré maximal d .

Démontrer que la famille $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^d(P))$ est une famille libre et dans F , puis que $d \leq n$.

En déduire que F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Déterminer ensuite tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D .

Correction.

- On note $(P_0, \dots, P_n)$ une base de F , et $d = \max_{0 \leq k \leq n} \deg(P_k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\deg(P_0) = d$. Ainsi, tout polynôme étant combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_n$, $F \subset \mathbb{R}_d[X]$. Donc P_0 est un polynôme de F de degré d , maximal.
 - La famille $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^d(P))$ est alors une famille de $d + 1$ polynômes à degrés échelonnés, dans F , donc $d + 1 \leq \dim(F) = n + 1$. Donc $F \subset \mathbb{R}_n[X]$. Comme ces deux espaces sont de même dimension, $F = \mathbb{R}_n[X]$.
 - On en déduit que si G est un sous-espace vectoriel de E stable par D ,
 - ou bien G est de dimension finie et alors $G = \mathbb{R}_n[X]$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$,
 - ou bien G n'est pas de dimension finie. Alors si $n \in \mathbb{N}$, il existe P un polynôme de G de degré $m \geq n$. Ainsi, par le même argument que précédemment, $(P, D(P), \dots, D^m(P))$ est une famille de $m + 1$ polynômes tels que $\deg(P) = m$, $\deg(D(P)) = m - 1$, ..., $\deg(D^m(P)) = 0$. Cette famille est donc dans G (par stabilité) et, en même temps, est une base de $\mathbb{R}_m[X]$. Donc $\mathbb{R}_m[X] \subset G$. Donc $\mathbb{R}_n[X] \subset G$.
- Ainsi, G contient tous les $\mathbb{R}_n[X]$ pour $n \in \mathbb{N}$, donc $G = \mathbb{R}[X]$.

12. Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par g , il faut et il suffit qu'il soit stable par D .

Correction. Soit G un sous-espace vectoriel de E . Raisonnons par double implication.

$\Rightarrow$ Supposons que G soit stable par g . Alors si $P \in G$,

$$D(P) = (g^2 - \lambda \text{Id}_E)(P) = g^2(P) - \lambda P.$$

Or, $g^2(P) \in G$ et $P \in G$, donc, comme G est un sous-espace vectoriel, $g^2(P) - \lambda P \in G$. Ainsi, $D(P)$ est dans G . Donc G est stable par D .

$\Leftarrow$ Supposons que G soit stable par D . Alors $G = \{0\}$, $\mathbb{R}_n[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$, sev tous stables par g . Donc G est stable par g .

D'où l'équivalence souhaitée.

B-II. Une application immédiate : le cas $\lambda < 0$

13. Démontrer que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_0)$ tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_0} + D_0$, alors $\lambda \geq 0$.

Correction. On remarque que pour tout P dans E_0 , P est constant ! Alors $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_0}$. Ainsi, $g^2(1) = \lambda$. Mais si on note $g(1) = c \in \mathbb{R}$, alors $g^2(1) = g(c) = cg(1) = c^2$. Donc $c^2 = \lambda$, donc $\lambda \geq 0$.

14. Soit $\lambda < 0$. Déduire des résultats précédents les deux propriétés :

- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$.

Correction. S'il existait un tel endomorphisme g , alors g stabiliserait tous les sous-espaces vectoriels stables par D , en particulier il stabilise E_0 .
Mais alors $g_0^2 = \lambda \text{Id}_{E_0} + D_0$. Par la question précédente, $\lambda \geq 0$, absurde !
Donc un tel g n'existe pas.

- Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n vérifiant $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$.

Correction. On adapte le résultat de la question précédente.

B-III. Un exemple pour $n = 2$

15. Soit $h \in \mathcal{L}(E_2)$. Démontrer que h commute avec D_2 si et seulement s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2$. On pourra utiliser la question 9.

Correction. Raisonnons par double implication.

- Déjà, s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2$, on en déduit que

$$D_2 \circ h = D_2 \circ (a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2) = aD_2 + bD_2^2 + cD_2^3 = (a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2) \circ D_2.$$

- Réciproquement (et c'est le sens le plus difficile !) si h commute avec D_2 , on considère P un polynôme de degré 2. Alors $(D_2^2(P), D_2(P), P)$ est une base de E_2 . Décomposons $h(P)$ sur la base considérée :

$$h(P) = aP + bD_2(P) + cD_2^2(P).$$

On montre alors que $h = a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2$, en vérifiant l'égalité sur une base de E_2 . L'égalité est vraie en P et, par commutation,

$$h(D_2(P)) = D_2(h(P)) = D_2(aP + bD_2(P) + cD_2^2(P)) = aD_2(P) + bD_2(D_2(P)) + cD_2^2(D_2(P)),$$

et on a la même chose sur $D_2^2(P)$. Les deux applications coïncident sur une base, elles sont donc égales.

16. Démontrer que $(\text{Id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_2)$. En déduire que si $\lambda > 0$, il existe exactement deux $g \in \mathcal{L}(E_2)$ tels que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_2} + D_2$.

Correction. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2 = 0_{\mathcal{L}(E_2)}$. Alors en évaluant l'égalité en $D_2^2(P)$ (avec P comme ci-dessus), on a $a = 0$, puis en évaluant en $D_2(P)$, on a $b = 0$, puis en évaluant en P , on a $c = 0$. Donc la famille est libre.

Soit maintenant $g \in \mathcal{L}(E_2)$.

- **Analyse.** Si $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_2} + D_2$, alors g commute avec D_2 , donc on dispose de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $g = a \text{Id}_{E_2} + bD_2 + c(D_2)^2$. Ainsi,

$$g^2 = a^2 \text{Id}_{E_2} + 2abD_2 + (2ac + b^2)D_2^2$$

(les termes en D_2^3 et D_2^4 sont nuls car $D_2^3 = 0$). Par liberté de la famille $(\text{Id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$, l'égalité $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_2} + D_2 + 0 \cdot D_2^2$ équivaut à

$$a^2 = \lambda, \quad 2ab = 1, \quad 2ac + b^2 = 0.$$

La première équation donne $a = \varepsilon \sqrt{\lambda}$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$; comme $a \neq 0$, la deuxième donne $b = \frac{1}{2a} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\lambda}}$, et la troisième $c = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{\varepsilon}{8\lambda\sqrt{\lambda}}$. Ainsi

$$g = \varepsilon \left(\sqrt{\lambda} \text{Id}_{E_2} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} D_2 - \frac{1}{8\lambda\sqrt{\lambda}} D_2^2 \right), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

- **Synthèse.** Réciproquement, si g est de cette forme, on a $a^2 = \lambda$, $2ab = 1$ et $2ac + b^2 = -\frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{4\lambda} = 0$, donc, par le calcul de l'analyse, $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_2} + D_2$.
- **Conclusion.** Les deux endomorphismes obtenus ($\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = -1$) sont distincts, puisque leurs coordonnées sur la famille libre $(\text{Id}_{E_2}, D_2, D_2^2)$ diffèrent ($\sqrt{\lambda} \neq -\sqrt{\lambda}$). Il existe donc exactement deux endomorphismes g de E_2 tels que $g^2 = \lambda \text{Id}_{E_2} + D_2$.

Remarque : on retrouve le développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \sqrt{\lambda + x}$ en 0, à savoir $\sqrt{\lambda} + \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{x^2}{8\lambda\sqrt{\lambda}}$.

C. Cas $\lambda = 0$

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul, et d'étendre le résultat à une situation plus générale. Dans cette partie l'entier n est supposé donné supérieur ou égal à 1.

17. Montrer que, s'il existe $g \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et $\dim \ker g^2 \geq 2$.

Correction. Déjà, $g^{2n+2} = D_n^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E_n)}$ donc g est nilpotent. Donc $\ker(g) \neq 0$, donc $\dim(\ker(g)) \geq 1$. Par stricte inclusion des noyaux, $\dim(\ker(g^2)) \geq 2$.

18. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$, puis qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

Correction. S'il existait un tel endomorphisme, alors $\dim(\ker(g^2)) \geq 2$, ce qui est absurde car $\dim(\ker(D_n)) = 1$...
On fait pareil avec D , en disant que D stabilise $\mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 1$.

D. Existence dans le cas $\lambda > 0$

19. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{1+x} =_{x \rightarrow 0} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$. Préciser en particulier les valeurs de a_0, a_1, a_2 , et démontrer que pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}} \binom{2k-1}{k}$.

Correction. On sait que $\sqrt{1+x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0, et que son développement limité est

$$\sqrt{1+x} =_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \dots$$

Le coefficient devant x^n est donc

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2} - k \right) \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-2k}{2} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} (1-2k) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \prod_{k=1}^{n-1} (1-2k) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=1}^{n-1} (2k-1) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)) \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n-1)!}{2 \times 4 \times \dots \times (2n-2)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{(2n-1)!}{2^{n-1} (n-1)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n}, \end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !

20. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Correction. On peut y aller « de manière bourrine », mais je vais donner un joli argument à la place. On multiplie par lui-même le développement limité à l'ordre n , et l'on tronque à l'ordre n . On obtient

$$1 + x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n).$$

Mais c_k est le produit de Cauchy $\sum_{i=0}^k a_i a_{k-i}$! (produit de deux polynômes) Ainsi, par unicité du développement limité, $\sum_{i=0}^k a_i a_{k-i} = 1$ si $k = 0$ ou $k = 1$ et 0 sinon !

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on note $h_n = a_0 \text{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \dots + a_n D_n^n$.

21. Démontrer que $h_n^2 = \text{Id}_{E_n} + D_n$.

Correction. *Bis repetita placent...*

On calcule

$$h_n^2 = (a_0 \text{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \dots + a_n D_n^n) \circ (a_0 \text{Id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \dots + a_n D_n^n)$$

Lorsqu'on développe ce produit, les termes D_n^k avec $k \geq n+1$ s'annulent. Il nous reste donc simplement

$$h_n^2 = \sum_{k=0}^n c_k D_n^k,$$

avec c_k le produit de Cauchy de la question précédente ! Ainsi, on obtient $h_n^2 = \text{Id}_{E_n} + D_n$!

22. En déduire un élément g_n dans $\mathcal{L}(E_n)$ tel que $g_n^2 = \lambda \text{Id}_{E_n} + D_n$, puis un élément g de E tel que $g^2 = \lambda \text{Id}_E + D$.

Correction.

- On écrit que

$$\lambda \text{Id}_{E_n} + D_n = \lambda \left(\text{Id}_{E_n} + \frac{1}{\lambda} D_n \right).$$

En posant

$$g_n = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1}{\lambda} D_n \right)^k,$$

on a le résultat désiré !

- Enfin, en définissant, pour tout P dans E ,

$$g(P) = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\deg(P)} a_k \left(\frac{1}{\lambda} D_n \right)^k (P),$$

on définit une application linéaire de E dans E telle que $g^2 = D$.