

MP – Programme de colles

Semaine 03 – du 28 septembre au 2 octobre 2026

Programme en bref

- cours de révisions d'algèbre linéaire et sur les prolongements
- exercices de révision d'algèbre linéaire (en insistant moins sur les déterminants, revus en fin de semaine)

Exemples de questions de cours ou d'exercices très classiques

1. Formule de Grassmann
2. Les hyperplans sont exactement les supplémentaires des droites
3. Théorème du rang
4. Dimension d'une somme quelconque : inégalité et cas d'égalité
5. Inversibilité de la matrice de Vandermonde (sans utiliser de déterminant)
6. Déterminant de Vandermonde
7. Si u est nilpotent, alors son indice de nilpotence est $\leq n$ (preuve par noyaux itérés ou par liberté de la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$, au choix de l'élève)
8. Noyau et image de la matrice J ne contenant que des 1
9. Déterminant tridiagonal

Programme en détail (extraits du programme officiel)

Révisions et compléments d'algèbre linéaire

- espaces vectoriels, sev, familles de vecteurs
- applications linéaires, noyau, image
- dimension finie
- matrices
- déterminants (cours surtout)

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Compléments d'algèbre linéaire

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout i .

Matrices définies par blocs.

Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe.

Base adaptée à une décomposition en somme directe.

Interprétation géométrique des blocs.

La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.

Transvections par blocs. Invariance du déterminant.