

DM 03 à rendre le lundi 28 septembre

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules.

- formule « bases » : problème 1. Durée conseillée : 2h.
- formule « intermédiaire » : problème 2. Durée conseillée : 3h.

Problème 1. Matrices semblables à leur inverse, Petites Mines MPSI 2002

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \dots \circ u$ (n fois).

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et I_3 la matrice unité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera par 0 l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, on dira que la matrice A est **semblable** à la matrice B s'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$. On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E , si P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, si u est un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$ (c'est-à-dire, la matrice A est semblable à la matrice B).

Partie A

1. On notera $A \sim B$ pour dire que la matrice A est semblable à la matrice B .

Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On pourra désormais dire que les matrices A et B **sont** semblables.

Correction. C'est une question de cours.

2. Démontrer que deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ de traces différents ne sont pas semblables.

Correction. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. Alors on dispose de P inversible tel que $B = PAP^{-1}$. Donc $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}PA) = \text{Tr}(A)$. Donc si A et B sont semblables, alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$. D'où la contraposée.

3. Soit u un endomorphisme de E et soit i et j deux entiers naturels.
On considère l'application w de $\ker u^{i+j}$ vers E définie par : $w(x) = u^j(x)$.

- (a) Montrer que $\text{Im } w \subset \ker u^i$.

Correction. Soit y dans $\text{Im}(w)$. Alors on dispose de x dans $\ker(u^{i+j})$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$. Donc $u^i(y) = u^i(u^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0$ car $x \in \ker(u^{i+j})$. D'où l'inclusion désirée.

- (b) En déduire que $\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j)$.

Correction. On sait, d'après le théorème du rang, que

$$\dim(\ker(u^{i+j})) = \dim(\ker(w)) + \text{rg}(w).$$

Or, $\text{Im}(w) \subset \ker(u^i)$ donc $\text{rg}(w) \leq \dim(\ker(u^i))$. De plus, si $x \in \ker(w)$, alors $u^j(x) = 0$ donc $\ker(w) \subset \ker(u^j)$. Donc $\dim(\ker(w)) \leq \dim(\ker(u^j))$. Donc

$$\dim(\ker u^{i+j}) \leq \dim(\ker u^i) + \dim(\ker u^j).$$

4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2$.

- (a) Montrer que $\dim(\ker u^2) = 2$. (On pourra utiliser deux fois la question 3b.).

Correction. Comme $\text{rg}(u) = 2$, $\dim(\ker(u)) = 1$. Donc, puisque $u^3 = 0$, on obtient par la question précédente que

$$3 = \dim(\ker(u^3)) \leq \dim \ker(u^2) + \dim(\ker(u)) = \dim \ker(u^2) + 1, \text{ i.e. } 2 \leq \dim \ker(u^2)$$

$$\dim \ker(u^2) \leq \dim \ker(u) + \dim \ker(u) = 2,$$

donc $\dim \ker(u^2) = 2$.

- (b) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$, et en déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E .

Correction. On sait que $u^2 \neq 0$ car sinon on aurait $\ker(u^2) = E$, donc $\dim(\ker(u^2)) = 3$. Donc on dispose de a dans E tel que $u^2(a) \neq 0$. a n'est en particulier pas nul. On montre alors que $u^2(a), u(a), a$ est une base de E . Soient λ, μ et ν tels que

$$\lambda u^2(a) + \mu u(a) + \nu a = 0. \quad (1)$$

En composant une fois par u , et comme $u^3 = 0$, il vient

$$\mu u^2(a) + \nu u(a) = 0, \quad (2)$$

donc, en composant une nouvelle fois par u ,

$$\nu u^2(a) = 0, \quad (3)$$

donc, comme $u^2(a) \neq 0$, $\nu = 0$, donc, par (2), $\mu u^2(a) = 0$ donc $\mu = 0$, donc, par (1), $\lambda = 0$.

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc $(u^2(a), u(a), a)$ est libre.

De cardinal $3 = \dim(E)$, cette famille est donc une base de E .

- (c) Ecrire alors la matrice U de u et la matrice V de $u^2 - u$ dans cette base.

Correction. En posant $e_1 = u^2(a)$, $e_2 = u(a)$ et $e_3 = a$, on a $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$, donc la matrice de u dans cette base est donc

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$V = U^2 - U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\text{rg } u = 1$.

- (a) Montrer que l'on peut trouver un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

Correction. Comme $\text{rg}(u) = 1$, $u \neq 0$, donc on dispose de b dans E tel que $u(b) \neq 0$. En particulier, $b \neq 0$.

- (b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E .

Correction. Comme $\text{rg}(u) = 1$, $\ker(u)$ est de dimension 2. Or, si tous les vecteurs de $\ker(u)$ étaient colinéaires à $u(b)$, $\ker(u)$ serait une droite, absurde. Donc on dispose d'un vecteur c dans $\ker(u)$ qui ne soit pas colinéaire à $u(b)$, donc $(u(b), c)$ est libre.

On montre ensuite que $(b, u(b), c)$ est libre. Soient λ, μ et ν tels que

$$\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0. \quad (4)$$

En composant par u , et comme $u(c) = 0$, et $u^2 = 0$,

$$\lambda u(b) = 0. \quad (5)$$

Donc, comme $u(b) \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc, par (4),

$$\mu u(b) + \nu c = 0,$$

donc, comme $(u(b), c)$ est libre, $\mu = \nu = 0$.

Donc $\lambda = \mu = \nu = 0$, donc

$(b, u(b), c)$ est une famille libre de cardinal $3 = \dim(E)$, donc est une base de E .

(c) Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Correction. Si l'on pose $\varepsilon_1 = b$, $\varepsilon_2 = u(b)$ et $\varepsilon_3 = c$, alors

$$u(\varepsilon_1) = \varepsilon_2, \quad u(\varepsilon_2) = 0, \quad u(\varepsilon_3) = 0,$$

donc

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V' = U'^2 - U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie B

Soit désormais une matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1} .

On pose alors $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et soit une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.

Correction. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire avec une diagonale non nulle. Cette matrice triangulaire est inversible, car de rang 3, donc A est elle-même inversible (car deux matrices semblables sont équivalentes donc de même rang).

2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

Correction. On remarque que $N^3 = 0$. Donc

$$(I_3 - N + N^2)(I_3 + N) = I_3 + N - N - N^2 + N^2 + N^3 = I_3 + 0 + 0 + 0 = I_3,$$

donc $I_3 + N$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$, donc $P^{-1}AP$ est inversible d'inverse $I_3 - N + N^2$, donc

$$PA^{-1}P^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

3. On suppose dans cette question que $N = 0$, montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction. Si $N = 0$, alors A est semblable à I_3 donc $A = I_3$ donc $A^{-1} = I_3 = A$. Égales, A et A^{-1} sont semblables.

4. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire, en utilisant la question **A.4.**, une matrice semblable à la matrice M .

Correction. Par la partie A.4, si u est l'endomorphisme canoniquement associé à N , alors $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2$ donc on dispose d'une base dans laquelle la matrice de u a pour forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice de u dans la base canonique, N , est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit que $M = N^2 - N$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer M^3 et déterminer $\text{rg}(M)$.

Correction. Si on pose $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on calcule $M'^3 = 0$. De plus, une base de $\text{Im}(M')$ est $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc M' est de rang 2, donc M aussi.

(c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.

Correction. $M^3 = 0$ et $\text{rg}(M) = 2$ donc si v est l'endomorphisme canoniquement associé à M , $v^3 = 0$ et $\text{rg}(v) = 2$ donc, d'après la partie A.4, on dispose d'une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de v est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, comme M est la matrice de v dans la base canonique, M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme N est aussi semblable à cette matrice et que la relation de similitude est une relation d'équivalence, M et N sont semblables.

(d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction. On sait que M et N sont semblables donc on dispose de Q inversible tel que $M = QNQ^{-1}$. Donc

$$I + M = I + QNQ^{-1} = Q(I + N)Q^{-1},$$

donc

$$P^{-1}A^{-1}P = QP^{-1}APQ^{-1},$$

donc

$$A^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1},$$

donc A et A^{-1} sont semblables.

5. On suppose dans cette question que $\text{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction. Si $\text{rg}(N) = 1$, par le même raisonnement que précédemment, en prenant u l'endomorphisme canoniquement associé à N , et en utilisant la question A.5, N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M = N^2 - N$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $M^2 = 0$ et $\text{rg}(M) = 1$, donc M est aussi semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc

M est semblable à N .

Le même raisonnement que précédemment permet de conclure : A et A^{-1} sont semblables.

6. **Exemple** : soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note (a, b, c) une base de E et u l'endomorphisme de E de matrice A dans cette base.

(a) Montrer que $\ker(u - \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1, e_2) .

Correction. Déterminons $\ker(u - \text{Id}_E)$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un vecteur de E dans la base (a, b, c) .

Alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(u - \text{Id}_E) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x = 0 \\ -z - y = 0 \\ y + 2z - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

Donc $\ker(u - \text{Id}_E) = \text{Vect}(a, b - c)$, donc

$\ker(u - \text{Id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

Une base de cet espace vectoriel est (e_1, e_2) avec $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$.

(b) Justifier que la famille (e_1, e_2, c) est une base de E , et écrire la matrice de u dans cette base.

Correction. On sait que (a, b, c) est une base de E , donc $(a, b - c, c)$ est une base de E (combinaison entre vecteurs). Or, on a vu que $u(a) = a$, $u(e_2) = e_2$ et, en calculant, $u(c) = -b + 2c = -e_2 + c$, donc, dans la base (e_1, e_2, c) , la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Correction. A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc, par les questions précédentes, A est semblable à son inverse !

7. Réciproquement, toute matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Correction. Non ! La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est égale à son inverse, mais ne peut pas être semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car leurs traces sont différentes.

Problème 2. Idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ESIM 2000

Définitions d'algèbre linéaire

- n et p étant deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q , carrée, inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.
- A étant un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de A , noté $\ker(A)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\ker(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}.$$

- On appelle image de A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ noté $\text{Im}(A)$:

$$\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}.$$

Structures algébriques

- Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée un **idéal à droite** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
 - $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$,
 - $\forall A \in \mathcal{J}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM \in \mathcal{J}$.
- Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée un **idéal à gauche** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
 - $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$,
 - $\forall A \in \mathcal{J}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), MA \in \mathcal{J}$.
- Une partie $\mathcal{J}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée un **idéal bilatère** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si :
 - $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$,
 - $\forall A \in \mathcal{J}, \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM \in \mathcal{J}$ et $MA \in \mathcal{J}$.

Ainsi, un idéal à droite (respectivement à gauche) est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ stable par multiplication par un élément **quelconque** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à droite (respectivement à gauche).

Un idéal bilatère est un idéal à la fois à droite et à gauche.

Notre but est de déterminer les idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les parties A. et B. sont indépendantes. La partie C. a besoin de la compréhension des méthodes de la partie B..

A. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{J}$ un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Démontrer que si $I_n \in \mathcal{J}$, alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. Si $I_n \in \mathcal{J}$, alors pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $I_n \times M \in \mathcal{J}$, donc $M \in \mathcal{J}$.
Donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{J}$, donc, par double inclusion, $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Montrer que si $\mathcal{J}$ contient une matrice inversible, alors $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. Si $\mathcal{J}$ contient une matrice M inversible, alors, comme $M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \times M^{-1} \in \mathcal{J}$.
Donc $M \times M^{-1} \in \mathcal{J}$, donc $I_n \in \mathcal{J}$, donc $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que $\mathcal{J}$ n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice non nulle appartenant à $\mathcal{J}$, et r son rang.

10. Montrer que $\mathcal{J}$ contient la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

Correction. On sait que A est de rang r , donc équivalente à $J_{n,n,r}$, donc on dispose de P et Q inversibles telles que $PAQ = J_{n,n,r}$. Or

- $A \in \mathcal{J}$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $PA \in \mathcal{J}$,
- $PA \in \mathcal{J}$, $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $PAQ \in \mathcal{J}$.

Donc $J_{n,p,r} \in \mathcal{J}$.

11. Montrer l'existence de $n - r + 1$ matrices, notées $A_1, A_2, \dots, A_{n-r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que la somme $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-r+1}$ soit une matrice inversible.

Correction. Appelons A_i la matrice $\begin{pmatrix} 0_i & & \\ & I_r & \\ & & 0_{n-r-i} \end{pmatrix}$. Par la question ??, A_i est équivalente à A donc, d'après le même raisonnement que la question précédente, $A_i \in \mathcal{J}$. De plus, $A_1 + A_2 + \dots + A_{n-r+1}$ est une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont supérieurs ou égaux à 1, donc sont non nuls, donc cette matrice est inversible.

12. Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Correction. Comme $\mathcal{J}$ est stable par somme, $A_1 + \dots + A_{n-r+1}$ est dans $\mathcal{J}$ et est inversible, donc, d'après la question 9., $\mathcal{J} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

B. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

B-I. Un exemple

13. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On désigne par

$$\mathcal{I}_F = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Im}(A) \subset F\}.$$

Montrer que $\mathcal{I}_F$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. Déjà, $\mathcal{I}_F$ est bien une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soient ensuite A et B dans $\mathcal{I}_F$, et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

- $\text{Im}(A + B) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B) \subset F$ car une somme de deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev est aussi un sev de ce $\mathbb{K}$ -ev. Donc $A + B \in \mathcal{I}_F$,
- $\text{Im}(-A) = \text{Im}(A) \subset F$, donc $-A \in \mathcal{I}_F$,
- on montre enfin que $AM \in \mathcal{I}_F$. Soit $y \in \text{Im}(AM)$. Alors on dispose de $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $y = AMx$. Mais alors $y \in \text{Im}(A) \subset F$. Donc $\text{Im}(AM) \subset F$ donc $AM \in \mathcal{I}_F$.

Donc $\mathcal{I}_F$ est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On veut démontrer que les idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont tous de la forme précédente.

B-II. Quelques résultats préliminaires

Soit M un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et N un élément de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{Im}(N) \subset \text{Im}(M)$. On veut montrer qu'il existe une matrice P appartenant à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ telle que $N = MP$. On fixe un supplémentaire $\mathcal{S}$ de $\ker(M)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

14. Soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

Justifier l'existence, pour tout i compris entre 1 et q , d'un unique élément ε_i de $\mathcal{S}$ tel que $M\varepsilon_i = Ne_i$.

Correction. On sait que toute application linéaire réalise un isomorphisme d'un supplémentaire de son noyau sur son image. Donc

$$u : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \text{Im}(M) \\ X \mapsto MX \end{cases}$$

est un isomorphisme. Mais si $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $Ne_i \in \text{Im}(N) \subset \text{Im}(M)$, donc on dispose d'un unique ε_i dans $\mathcal{S}$ tel que $u(\varepsilon_i) = Ne_i$, i.e. $M\varepsilon_i = Ne_i$.

15. Soit P l'élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les matrices $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$. Montrer que $N = MP$.

Correction. On fait alors le calcul. Par produit matriciel par blocs,

$$MP = M(\varepsilon_1 | \dots | \varepsilon_q) = (M\varepsilon_1 | \dots | M\varepsilon_q) = (Ne_1 | \dots | Ne_q) = N,$$

car N est la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N dans la base canonique.

Soient maintenant A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$\text{Im}(C) \subset \text{Im}(A) + \text{Im}(B).$$

16. On désigne par $D = (A|B)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B , c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières colonnes de D sont celles de B .
Montrer que $\text{Im}(D) = \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$.

Correction. Soit U dans $\text{Im}(D)$. Alors on dispose de $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tel que $U = DX$. Écrivons $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec Y et Z dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors par les règles de produit par blocs,

$$DX = AY + BZ \in \text{Im}(A) + \text{Im}(B),$$

d'où l'inclusion directe.

Maintenant, si $V \in \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$, on dispose de Y et Z dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $V = AY + BZ = D \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in \text{Im}(D)$, d'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

17. En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ telle que : $C = DW$.

Correction. On sait que $\text{Im}(C) \subset \text{Im}(D)$ donc, d'après la question 15., on dispose de W dans $\mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$ telle que $C = DW$.

18. En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $C = AU + BV$.

Correction. Comme $W \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{R})$, on peut écrire $W = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ où U et V sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mais alors, par les règles de produit par blocs,

$$C = DW = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = AU + BV.$$

B-III. Détermination des idéaux à droite

Soit $\mathcal{J}$ un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que : $\forall M \in \mathcal{J}, \text{rg}(M) \leq r$ et tel qu'il existe $M_0 \in \mathcal{J}$ vérifiant $\text{rg}(M_0) = r$.

Correction. Soit la partie $\mathcal{A} = \{\text{rg}(M), M \in \mathcal{J}\}$. Alors $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, bornée par n car $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{A}$ admet un plus grand élément r . Il existe donc $M_0 \in \mathcal{J}$ telle que $\text{rg}(M_0) = r$.

20. Soit M un élément quelconque de $\mathcal{J}$.

On suppose que $\text{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\text{Im}(M_0)$.

En utilisant le sous-espace vectoriel $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$, montrer l'existence d'un élément de $\mathcal{J}$ de rang strictement supérieur à r .

Correction. Si $\text{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\text{Im}(M_0)$, alors $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$ est de dimension strictement supérieure à $\text{Im}(M_0)$. Soit C la matrice dans la base canonique de la projection sur $\text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$ parallèlement à un supplémentaire.

Alors $\text{Im}(C) = \text{Im}(M) + \text{Im}(M_0)$ donc d'après la question 18., on dispose de U et V telles que $C = MU + M_0V$. Mais $MU \in \mathcal{J}$ car $M \in \mathcal{J}$, $M_0V \in \mathcal{J}$, donc $C \in \mathcal{J}$ et $\text{rg}(C) > r$. Absurde !

21. Dédurre des questions précédentes que $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\text{Im}(M_0)}$.

Correction. Si M est un élément quelconque de $\mathcal{J}$, alors $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$ par la question précédente, donc $M \in \mathcal{I}_{\text{Im}(M_0)}$.

Réciproquement, si $M \in \mathcal{I}_{\text{Im}(M_0)}$, alors $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(M_0)$ donc, par la question 15., on dispose de P telle que $M = M_0P$, donc $M \in \mathcal{J}$.

D'où l'inclusion réciproque, et l'égalité !

C. Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

22. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathcal{K}_F$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\mathcal{K}_F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), F \subset \ker(M)\}.$$

Démontrer que $\mathcal{K}_F$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. Déjà, $\mathcal{K}_F$ est non vide car la matrice nulle appartient à $\mathcal{K}_F$.

Ensuite, si A et B sont dans $\mathcal{K}_F$, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

- $\forall X \in F, (A+B)X = AX + BX = 0 + 0 = 0$ donc $X \in \ker(A+B)$ donc $A+B \in \mathcal{K}_F$,
- $\forall X \in F, -AX = 0$ donc $X \in \ker(-A)$ donc $-A \in \mathcal{K}_F$,
- $\forall X \in F, MAX = M0 = 0 + 0 = 0$ donc $X \in \ker(MA)$ donc $MA \in \mathcal{K}_F$,

Donc $\mathcal{K}_F$ est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

23. Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ telles que $\ker(M) \subset \ker(N)$. Démontrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que $N = PM$.

Correction. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à M , v l'application linéaire canoniquement associée à N .

Soit $r = \dim(\ker(u))$, $s = \dim(\ker(v))$. Soit alors

$$(e_1, \dots, e_r) \text{ une base de } \ker(u),$$

que l'on complète en une base

$$(e_1, \dots, e_r, \dots, e_s) \text{ une base de } \ker(v),$$

que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$(u(e_{r+1}), \dots, u(e_n)) \text{ est une base de } \operatorname{Im}(u).$$

(image d'un supplémentaire de $\ker(u)$).

Soit enfin S un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u)$ dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Posons w l'endomorphisme défini sur $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ par

- $\forall x \in S, w(x) = 0$,
- $\forall i \in \llbracket r+1, n \rrbracket, w(u(e_i)) = v(e_i)$.

Alors w est bien défini et pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- si $i \in \llbracket 1, r \rrbracket, v(e_i) = 0 = w \circ u(e_i)$,
- si $i \geq r+1$,

$$w(u(e_i)) = v(e_i),$$

donc v et $w \circ u$ coïncident sur une base, donc sont égaux !

Si P est la matrice de w dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée, on en déduit que $N = PM$.

24. Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que

$$\ker(A) \cap \ker(B) \subset \ker(C).$$

Démontrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n , U et V , telles que

$$C = UA + VB.$$

Correction. On va utiliser le même raisonnement qu'à la partie précédente. Soit $D = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ la matrice à laquelle

on a accolé verticalement A et B . Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors on a les équivalences

$$\begin{aligned} DX = 0_{2n,1} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} X = 0_{2n,1} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX \\ BX \end{pmatrix} = 0_{2n,1} = \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow AX = 0_{n,1} \text{ et } BX = 0_{n,1}, \end{aligned}$$

donc $\ker(D) = \ker(A) \cap \ker(B)$. Mais on sait que $\ker(A) \cap \ker(B) \subset \ker(C)$, donc $\ker(D) \subset \ker(C)$. Donc on dispose de $P \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$ telle que $C = PD$. Si l'on écrit $P = \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix}$, alors

$$C = \begin{pmatrix} U & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = UA + VB,$$

d'où le résultat désiré !

25. Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Correction. De même, on s'inspire des questions précédentes.

Soit $\mathcal{J}$ un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $M_0 \in \mathcal{J}$ tel que $\dim(\ker(M_0))$ est minimale.

Soit $M \in \mathcal{J}$. Montrons que $\ker(M_0) \subset \ker(M)$.

Si ce n'était pas le cas, alors $\ker(M_0) \cap \ker(M)$ serait de dimension strictement inférieure à $\dim(\ker(M_0))$. En prenant C un projecteur de noyau $\ker(M_0) \cap \ker(M)$, alors $\ker(M_0) \cap \ker(M) \subset \ker(C)$ donc on dispose de U et V tels que $C = UA + VB$, donc C est dans $\mathcal{J}$ et $\dim(\ker(C)) < \dim(\ker(M_0))$ absurde !

Donc $\ker(M_0) \subset \ker(M)$, i.e. $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}_{\ker(M_0)}$.

Réciproquement, l'inclusion est claire car si $\ker(M_0) \subset \ker(M)$, par la question 23., $M = PM_0 \in \mathcal{J}$.

Donc les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont les idéaux de la forme $\mathcal{K}_F$ avec F un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.