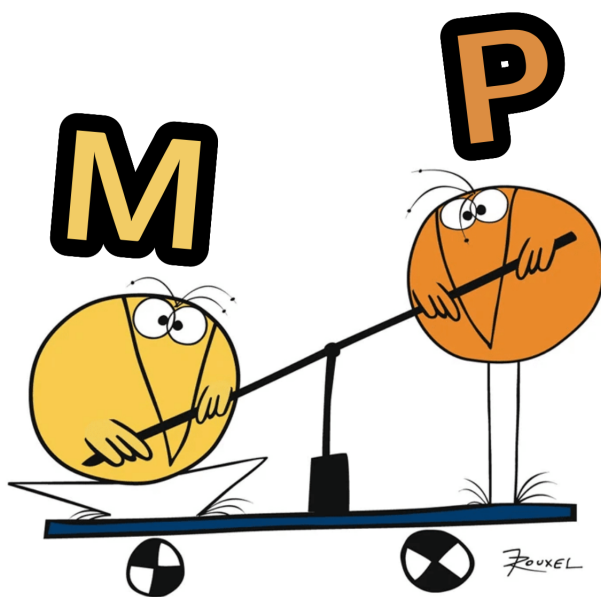




Mathématiques

DS 02

Samedi 03 octobre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le soin et la présentation seront pris en compte dans la notation. **Mettez en valeur vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- Le **correcteur blanc** (liquide ou en ruban) est **interdit** : toute utilisation entraînera une non-correction de la question.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir et pour y mettre les numéros des questions.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.

♪ Bon courage ! ♪

Problème 1. Équivalents d'intégrales, d'après Centrale PC 2003 (1h)

Dans tout le problème, on utilisera les propriétés d'intégration des relations de comparaison.

A. Quelques déterminations d'équivalents

1. Déterminer l'intégrabilité ou non de $t \mapsto \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)}$ en 0, et un équivalent simple de $\int_x^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)} dt$ en 0^+ .

Correction. Soit $f : t \mapsto \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)}$. Alors

- f est continue sur $]0, +\infty[$,
- $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$, positive, non intégrable en 0,

donc f n'est pas intégrable en 0. Par théorème d'intégration des relations de comparaison, $\int_x^1 f(t) dt \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln(x)$.

2. En déduire un équivalent simple de $\int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt$ en 0^+ .

Correction. On doit juste être propres : on écrit que

$$\begin{aligned} \int_{x^3}^{x^2} \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt &= \int_{x^3}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt - \int_{x^2}^1 \frac{e^t}{\text{Arcsin } t} dt \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\ln(x^3) + o(\ln(x^3)) + \ln(x^2) + o(\ln(x^2)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -\ln(x) + o(\ln(x)) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x). \end{aligned}$$

3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'en $+\infty$, on a $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$.

Correction. On note $u(t) = t$, donc $u'(t) = 1$, $v(t) = \frac{1}{\ln(t)}$, donc $v'(t) = -\frac{1}{t \ln(t)^2}$, d'où, par intégration par parties sur le segment $[2, x]$, on a

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)^2}.$$

Or, $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t}$, non intégrable en $+\infty$, et $\frac{1}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{\ln(t)}\right)$, d'où, par intégration des relations de comparaison,

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}\right).$$

d'où

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \sim \frac{x}{\ln(x)}$$

B. Un équivalent plus théorique

Soit a un nombre réel strictement positif et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ à valeurs strictement positives.

On suppose que le quotient $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ tend vers une limite finie α en $+\infty$.

4. Montrer qu'en $+\infty$, $\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)}$ tend vers α (on pourra distinguer le cas $\alpha = 0$).

Correction. Supposons $\alpha \neq 0$. On remarque que $\frac{f'}{f}$ est la dérivée de $\ln \circ f$... Utilisons cela. On sait que $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{x}$, qui n'est pas intégrable en $+\infty$. Ainsi, par intégration des relations de comparaison, on a

$$\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x \frac{\alpha}{t} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \ln(x),$$

d'où

$$\ln(f(x)) - \ln(f(a)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \ln(x),$$

ce qui assure la limite voulue.

Dans le cas où $\alpha = 0$, on fait pareil, mais en intégrant la relation $\frac{f'(x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

On suppose dans les deux questions suivantes que $\alpha < -1$.

5. Montrer que f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

Correction. Attention ! On ne peut pas dire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha$! On ne peut pas passer les équivalents à l'exponentielle.

En revanche, si $\beta \in]\alpha, -1[$, alors on remarque que

$$x^{-\beta} f(x) = e^{-\beta \ln(x) + \ln(f(x))}.$$

Or,

$$\begin{aligned} -\beta \ln(x) + \ln(f(x)) &= \ln(x) \left(\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} - \beta \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha - \beta) \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty, \end{aligned}$$

ce qui implique que $x^{-\beta} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, ou encore que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta)$, qui est intégrable en $+\infty$, donc f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

6. Montrer qu'en $+\infty$, on a $\int_x^{+\infty} f \sim \frac{-xf(x)}{\alpha + 1}$.

Correction. Question plus délicate. On sait que l'on va utiliser une intégration des relations de comparaison. On regarde le membre de droite, et on sait que l'on va intégrer une fonction dont la dérivée est $x \mapsto xf(x)$. Soit $g : t \mapsto f(t) + tf'(t)$. Alors on sait que $g(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} f(t) \left(1 + t \frac{f'(t)}{f(t)} \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (1 + \alpha)f(t)$, qui est intégrable en $+\infty$. Ainsi, par intégration des relations de comparaison,

$$\int_x^{+\infty} g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha + 1) \int_x^{+\infty} f(t) dt,$$

d'où, comme $\int_x^{+\infty} g(t) dt = [tf(t)]_x^{+\infty} = -xf(x)$, on a le résultat.

On suppose dans les deux questions suivantes que $\alpha > -1$.

7. Étudier l'intégrabilité de f sur $[a, +\infty[$.

Correction. En revanche, si $\beta \in]-1, \alpha[$, alors on remarque que

$$x^{-\beta} f(x) = e^{-\beta \ln(x) + \ln(f(x))}.$$

Or,

$$\begin{aligned} -\beta \ln(x) + \ln(f(x)) &= \ln(x) \left(\frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} - \beta \right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (\alpha - \beta) \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

ce qui implique que $x^{-\beta}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ou encore que $x^\beta = o(f(x))$, et x^β n'est pas intégrable en $+\infty$, donc f n'est pas intégrable sur $[a, +\infty[$.

8. Montrer qu'en $+\infty$, on a $\int_a^x f \sim \frac{xf(x)}{\alpha + 1}$.

Correction. On note toujours $g : t \mapsto f(t) + tf'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (1 + \alpha)f(t)$, non intégrable en $+\infty$, ce qui assure que

$$\int_a^x g(t)dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_a^x (1 + \alpha)f(t)dt,$$

ce qui assure le résultat cherché.

Problème 2. Représentation matricielle Ae^A , d'après Mines MP 2014 (3h)

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$.

Elle est dite *nilpotente d'indice p* si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$. **On « rappelle » que l'on a démontré que $p \leq n$.**

On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices de la forme $\lambda I_n + N$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et N est nilpotente.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente, on appelle exponentielle de A , et on note $\exp(A)$ ou e^A , la matrice $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. Cette

somme est en fait finie car pour tout $k \geq n$, $A^k = 0$, donc $e^A = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{k!}$.

Pour $A \in \mathcal{F}$, si $A = \lambda I_n + N$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et N est nilpotente, on note $\exp(A)$ ou e^A la matrice $e^\lambda e^N$, où e^N a été défini précédemment. On admet que l'écriture de $A \in \mathcal{F}$ comme $\lambda I_n + N$ est unique.

Ainsi, e^A est un polynôme en A , quel que soit A dans $\mathcal{F}$.

Enfin, on appelle *bloc de Jordan d'ordre n* associé au nombre complexe λ , la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Par convention, si $n = 1$, $J_1(\lambda) = (\lambda)$.

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A. Préliminaires 1 : représentation ze^z dans $\mathbb{C}$

1. Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $w = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = w$ équivaut au système :

$$\begin{cases} Re^{R \cos(\theta)} = r \\ R \sin(\theta) = \alpha - \theta \quad (\text{modulo } 2\pi). \end{cases}$$

Correction. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} ze^z = w &\Leftrightarrow Re^{i\theta} e^{R \cos(\theta) + iR \sin(\theta)} = re^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow Re^{R \cos(\theta)} e^{i(\theta + R \sin(\theta))} = re^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Re^{R \cos(\theta)} = r \\ R \sin(\theta) = \alpha - \theta \quad (\text{modulo } 2\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \exp\left((\alpha - \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right).$$

2. Déterminer les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \rightarrow 0^+$ et lorsque $\theta \rightarrow \pi^-$. Que peut-on en déduire sur l'existence de solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé ?

Correction. On remarque que l'on a les équivalents

$$\frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{\theta} \quad \text{et} \quad (\alpha - \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha}{\theta},$$

quantité qui tend vers $+\infty$, donc, par croissances comparées, $\varphi(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} +\infty$.

Ensuite, on note $\theta = \pi - h$. Alors

$$\frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)} = \frac{\alpha - \pi + h}{\sin(h)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\alpha - \pi}{h} \text{ et } (\alpha - \theta) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = (\alpha - \pi + h) \frac{-\cos(h)}{\sin(h)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\alpha - \pi}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} -\infty,$$

donc, par croissances comparées, $\varphi(\theta) \xrightarrow{\theta \rightarrow \pi} 0$.

La fonction φ étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires en assure la surjectivité de $]0, \pi[$ dans $]0, +\infty[$.

Soit $D = \{Re^{i\theta}; R > 0 \text{ et } 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et g l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

3. Dédurre de ce qui précède que g est surjective.

Correction. Soit $w \in \mathbb{C}$. Si $w = 0$, $w = 0e^0$.

Sinon, avec les notations des questions précédentes, soit θ l'unique réel de $]0, \pi[$ vérifiant $\varphi(\theta) = r$. Alors, en posant $R = \frac{\alpha - \theta}{\sin(\theta)}$ et $z = Re^{i\theta}$, on a $z \in D$ et $w = ze^z$.

B. Préliminaires 2 : calcul d'exponentielles

4. Démontrer que si deux matrices nilpotentes A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont telles que $AB = BA$, alors $A + B$ est nilpotente et $e^{A+B} = e^A e^B$.

Correction. Si A et B sont nilpotentes et commutent,

$$(A + B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} A^k B^{2n-k}.$$

Or, si $k \leq n$, $2n - k \geq n$ donc $B^{2n-k} = 0$. Si $k \geq n$, $A^k = 0$. Dans tous les cas, $A^k B^{2n-k} = 0$, donc $(A + B)^{2n} = 0$, donc $A + B$ est nilpotente.

Enfin, les sommes étant en réalité finies,

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{B^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} \text{ en regroupant par paquets ces sommes finies.} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A + B)^n = e^{A+B}. \end{aligned}$$

On admet que si A et B sont dans $\mathcal{F}$ et commutent, alors $A + B \in \mathcal{F}$ et $e^{A+B} = e^A e^B$.

C. Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan nilpotent

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n .

5. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre.

Correction. C'est une question « de cours » (ou en tout cas d'exercice fait en TD!). On sait que $N^{n-1} \neq 0$, donc on dispose de X tel que $N^{n-1}X \neq 0$. On montre alors que $(X, NX, \dots, N^{n-1}X)$ est libre. Si $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ sont n scalaires tels que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i N^i X = 0 \quad (1)$$

on pose $A = \{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$. Si $A \neq \emptyset$, on prend k_0 son minimum. En composant (1) par N^{n-k_0-1} ,

on obtient, comme $\lambda_0 = \dots = \lambda_{k_0-1} = 0$, $\lambda_{k_0} N^{n-1} X = 0$, donc $\lambda_{k_0} = 0$ car $N^{n-1} X \neq 0$, absurde !

Donc $A = \emptyset$ et la famille est libre.

6. En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

Correction. Dans la base précédente, comme $N(N^k X) = N^{k+1} X$ et est nul si $k = n-1$, on en déduit que la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N est $J_n(0)$. Ceci signifie exactement que N est semblable à $J_n(0)$.

7. Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible et que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .

Correction.

- Il est possible de calculer explicitement l'exponentielle, mais utilisons une facilité donnée par l'énoncé : comme $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent,

$$I_n = e^0 = e^{J_n(0) - J_n(0)} = e^{J_n(0)} e^{-J_n(0)},$$

donc $e^{J_n(0)}$ est inversible, d'inverse $e^{-J_n(0)}$.

- Ensuite, comme $e^{J_n(0)}$ est un polynôme en $J_n(0)$, $J_n(0)$ et $e^{J_n(0)}$ commutent. Donc

$$(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = J_n(0)^n (e^{J_n(0)})^n = 0.$$

Donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente.

- Enfin, si on avait $(J_n(0)e^{J_n(0)})^n = 0$, on aurait $J_n(0)^{n-1} (e^{J_n(0)})^{n-1} = 0$, donc, comme $(e^{J_n(0)})^{n-1}$ est inversible, $J_n(0)^{n-1} = 0$, absurde car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice n .

Donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n .

8. Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, $PJ_n(0)P^{-1}$ est nilpotente et qu'on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$. En déduire qu'il existe $\bar{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente, telle que $J_n(0) = \bar{N}e^{\bar{N}}$.

Correction.

- Déjà, on montre par récurrence immédiate que pour tout k dans $\mathbb{N}$,

$$(PJ_n(0)P^{-1})^k = PJ_n(0)^k P^{-1},$$

donc $(PJ_n(0)P^{-1})^n = 0$ et $(PJ_n(0)P^{-1})^{n-1} \neq 0$, donc $PJ_n(0)P^{-1}$ est nilpotente d'indice n .

- Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} Pe^{J_n(0)}P^{-1} &= P \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^k \right) P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} PJ_n(0)^k P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (PJ_n(0)P^{-1})^k \\ &= e^{PJ_n(0)P^{-1}}. \end{aligned}$$

- Enfin, comme $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n , on sait d'après les premières questions qu'elle est semblable à $J_n(0)$, i.e. il existe P inversible telle que

$$J_n(0) = PJ_n(0)e^{J_n(0)}P^{-1} = PJ_n(0)P^{-1} \times Pe^{J_n(0)}P^{-1} = PJ_n(0)P^{-1}e^{PJ_n(0)P^{-1}}.$$

En posant $\bar{N} = PJ_n(0)P^{-1}$, on a $\bar{N}$ nilpotente, et $J_n(0) = \bar{N}e^{\bar{N}}$, d'où le résultat !

On admet que pour toute A dans $\mathcal{F}$, pour toute P inversible, $Pe^AP^{-1} = e^{PAP^{-1}}$.

D. Forme de Jordan et représentation Ae^A d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p . On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

9. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Correction. Comme N est nilpotente d'indice p , par le même raisonnement qu'en question 5., on a l'existence d'un vecteur X tel que $(X, NX, \dots, N^{p-1}X)$ est libre. On complète cette famille libre en une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à N est alors de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$$

Ceci signifie donc que N et A sont semblables.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

10. Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array} \right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

Correction.

- T_X est facilement inversible d'inverse $T_X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right)$.
- On fait alors le calcul

$$\begin{aligned} A' &= T_X A T_X^{-1} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B + XC \\ \hline O & C \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c|c} I_p & -X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & -J_p(0)X + B + XC \\ \hline O & C \end{array} \right), \end{aligned}$$

donc est de la forme voulue avec $Y = -J_p(0)X + B + XC$ et $Z = C$.

11. Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes les lignes de Y , à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles.

Correction. Soient $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes de X , $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes de Y et $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes de B . Alors

l'expression $Y = -J_p(0)X + B + XC$ nous permet d'avoir

$$\begin{cases} Y_1 = -X_2 + B_1 + X_1C \\ Y_2 = -X_3 + B_2 + X_2C \\ \vdots \\ Y_{n-1} = -X_n + B_{n-1} + X_{n-1}C \\ Y_n = B_n + X_nC. \end{cases}$$

Donc, si on prend $X_1 = 0$, on peut choisir $X_2 = B_1$ pour que $Y_1 = 0$, puis $X_3 = B_2 + X_2C$, etc, jusqu'à $X_n = B_{n-1} + X_{n-1}C$.

Ainsi on a annulé toutes les lignes de Y , sauf éventuellement la dernière !

12. Justifier que A' est nilpotente d'indice p . En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle.

On pourra étudier l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et éventuellement raisonner par l'absurde.

Correction.

- A' est semblable à A donc à N , nilpotente d'indice p , donc est nilpotente d'indice p .
- Ensuite, on suppose par l'absurde que dans A' , la dernière ligne de Y n'est pas nulle. On pose f l'endomorphisme canoniquement associé à A' , $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors, en particulier,

$$f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, \dots, f(e_p) = e_{p-1}.$$

Supposer que la dernière ligne de Y n'est pas nulle revient à supposer qu'il existe i dans $[[p+1, n]]$ tel que $f(e_i) = \lambda e_p + x$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$.

On remarque alors, comme $x \in \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ que

$$f(x) \in \text{Vect}(e_p, \dots, e_n),$$

puis que

$$f^2(x) \in \text{Vect}(e_{p-1}, e_p, \dots, e_n),$$

puis, par récurrence immédiate,

$$f^{p-1}(x) \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_n).$$

Mais comme $f^{p-1}(e_p) = e_1$, en appliquant f^{p-1} à $f(e_i)$, on obtient

$$0 = f^p(e_i) = f^{p-1}(f(e_i)) = \lambda e_1 + x,$$

soit, comme $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ sont en somme directe, $\lambda e_1 = 0$, donc $\lambda = 0$, absurde !

Donc la dernière ligne de Y est nulle.

Remarque : l'absurde était inutile ici, mais proposée par le sujet des Mines.

13. En déduire que lorsque $1 \leq p \leq n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

Correction. On procède alors par récurrence forte sur n .

On note Pr_n la proposition : pour toute N nilpotente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, N est semblable à une matrice diagonale par

blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, \dots, p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

L'**initialisation** est évidente, pour $n = 1$: toute matrice nilpotente est la matrice nulle !

Pour l'**hérédité**, si N est une matrice nilpotente de taille n , soit p son indice de nilpotence :

- si $p = n$, par la question 6., N est semblable à $J_n(0)$.
- si $p < n$, par les questions 10., 11. et 12., on sait que N est semblable à $\begin{pmatrix} J_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Z \end{pmatrix}$. Mais alors, comme $N^p = 0$, par produit par blocs, $Z^p = 0$, donc Z est nilpotente. Donc, par hypothèse de récurrence, on dispose de Q dans $GL_{n-p}(\mathbb{C})$ telle que

$$Z = Q \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

En posant $P = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Q \end{pmatrix}$, P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Q^{-1} \end{pmatrix}$ et

$$P \begin{pmatrix} J_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & Z \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} J_p(0) & & (0) \\ & J_{p_1}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

Donc N est semblable à cette dernière matrice (par transitivité).

D'où l'hérédité et le résultat par le principe de récurrence !

14. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente, telle que $N = Me^M$.

Correction. On sait que N est semblable à $\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$. Mais, par la question 8., on sait que pour tout i dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, on dispose de N_i nilpotente telle que $J_{p_i} = N_i e^{N_i}$. Mais alors si l'on pose

$$M = \begin{pmatrix} N_1 & & (0) \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & N_r \end{pmatrix},$$

M est nilpotente (par produit par blocs), et, toujours par calculs par blocs,

$$Me^M = \begin{pmatrix} N_1 e^{N_1} & & (0) \\ & N_2 e^{N_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & N_r e^{N_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix},$$

donc Me^M est semblable à N .

E. Représentation Ae^A d'un élément de $\mathcal{F}$

Dans les deux questions suivantes, λ désigne un nombre complexe non nul.

15. Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$ (on pourra utiliser la partie A.) et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 Q(J_n(0))$$

où Q est un polynôme à coefficients complexes qui dépend de μ .

Correction. Par la partie A., on sait qu'il existe $\mu \in D \cup \{0\}$ vérifiant $\lambda = \mu e^\mu$. Mais D ne contient pas -1 donc $\mu \neq -1$.

On a alors

$$\begin{aligned} J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} &= (\mu I_n + J_n(0)) e^\mu e^{J_n(0)} = \mu e^\mu e^{J_n(0)} + e^\mu J_n(0) e^{J_n(0)} \\ &= \mu e^\mu \left(I_n + J_n(0) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{J_n(0)^k}{k!} \right) + e^\mu \left(J_n(0) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{J_n(0)^k}{(k-1)!} \right) \\ &= \underbrace{\mu e^\mu}_{=\lambda} I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{\mu e^\mu}{k!} + \frac{e^\mu}{(k-1)!} \right) J_n(0)^{k-2}. \end{aligned}$$

En posant $Q(X) = e^\mu \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{\mu}{k!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) X^{k-2} \in \mathbb{C}[X]$, on obtient bien

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 Q(J_n(0)).$$

16. Montrer que $(\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 Q(J_n(0))$ est nilpotente d'indice n . En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{F}$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

Correction. On note $K = (\mu + 1)e^\mu J_n(0) + J_n(0)^2 Q(J_n(0))$. On remarque que l'on peut factoriser par $J_n(0)$:

$$K = J_n(0)U \text{ où } U = (\mu + 1)e^\mu I_n + J_n(0)Q(J_n(0)).$$

- Déjà, U est un polynôme en $J_n(0)$, donc U et $J_n(0)$ commutent.
- Ensuite, $J_n(0)Q(J_n(0))$ est triangulaire supérieure stricte, donc U est triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux tous égaux à $(\mu + 1)e^\mu$, qui est non nul car $\mu \neq -1$ (c'est ici que cela sert!). Donc U est inversible.
- Mais alors, par la question précédente,

$$K^n = J_n(0)^n U^n = 0 \text{ et } K^{n-1} = J_n(0)^{n-1} U^{n-1} \neq 0,$$

car U^{n-1} est inversible et $J_n(0)^{n-1} \neq 0$. Donc K est nilpotente d'indice n .

Par la question 6., K est donc semblable à $J_n(0)$: on dispose de P inversible telle que $K = PJ_n(0)P^{-1}$. Mais alors, par la question précédente,

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + K = P(\lambda I_n + J_n(0))P^{-1} = PJ_n(\lambda)P^{-1},$$

soit, en utilisant le résultat admis ($J_n(\mu)$ est bien dans $\mathcal{F}$),

$$J_n(\lambda) = P^{-1}J_n(\mu)P \times P^{-1}e^{J_n(\mu)}P = P^{-1}J_n(\mu)Pe^{P^{-1}J_n(\mu)P}.$$

En posant $M = P^{-1}J_n(\mu)P = \mu I_n + P^{-1}J_n(0)P$, on a $M \in \mathcal{F}$ (car $P^{-1}J_n(0)P$ est nilpotente) et

$$J_n(\lambda) = Me^M!$$

17. Conclure enfin que pour toute B dans $\mathcal{F}$, il existe A dans $\mathcal{F}$ telle que $B = Ae^A$.

Correction. Soit $B \in \mathcal{F}$, que l'on écrit $B = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente.

- Si $\lambda = 0$, $B = N$ est nilpotente, et la question 15 nous donne M nilpotente, donc dans $\mathcal{F}$, telle que $B = Me^M$.
- Sinon, on sait par la question 14 que l'on dispose de P inversible telle que

$$N = P \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ donc } B = P \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & (0) \\ & J_{p_2}(\lambda) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(\lambda) \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On fixe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^\mu$. Par la question précédente (appliquée en taille p_i), pour tout i dans $\llbracket 1, r \rrbracket$, on dispose de $M_i = \mu I_{p_i} + N_i$, avec N_i nilpotente, telle que $J_{p_i}(\lambda) = M_i e^{M_i}$.

Attention ! Il est important ici que μ soit le même pour tous les blocs (il ne dépend que de λ), sinon la matrice diagonale par blocs que l'on va construire n'aurait aucune raison d'être dans $\mathcal{F}$!

On pose alors

$$M' = \begin{pmatrix} M_1 & & (0) \\ & M_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & M_r \end{pmatrix} = \mu I_n + \begin{pmatrix} N_1 & & (0) \\ & N_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & & N_r \end{pmatrix},$$

qui est dans $\mathcal{F}$ (la deuxième matrice est nilpotente par produit par blocs). Par calculs par blocs,

$$e^{M'} = e^\mu \begin{pmatrix} e^{M_1} & & (0) \\ & e^{M_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & e^{M_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{M_1} & & (0) \\ & e^{M_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & e^{M_r} \end{pmatrix},$$

donc

$$M' e^{M'} = \begin{pmatrix} M_1 e^{M_1} & & (0) \\ & M_2 e^{M_2} & \\ & & \ddots \\ (0) & & & M_r e^{M_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & & (0) \\ & J_{p_2}(\lambda) & \\ & & \ddots \\ (0) & & & J_{p_r}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Enfin, en posant $A = PM'P^{-1}$, on a $A \in \mathcal{F}$ et, par le résultat admis,

$$Ae^A = PM'P^{-1}Pe^{M'}P^{-1} = PM'e^{M'}P^{-1} = B.$$

D'où le résultat : pour toute B dans $\mathcal{F}$, il existe A dans $\mathcal{F}$ telle que $B = Ae^A$!