

TD 05 Probabilités (1)

1 Exercices classiques

Exercice 1. *Lemmes de Borel-Cantelli et applications.* ●●○ Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. On considère l'événement : $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n \right)$.

- Traduire avec des mots en français l'événement A .
- On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ converge. En se rappelant que la probabilité d'une réunion est inférieure à la somme des probabilités, déterminer $\mathbb{P}(A)$.
- On suppose maintenant que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$ diverge. En étudiant $\mathbb{P}(\bar{A})$, et en remarquant que $1 - x \leq e^{-x}$, déterminer $\mathbb{P}(A)$.
- Application.** On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ iid vérifiant $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = 0)$ et démontrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, alors, presque sûrement, S_n ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

Exercice 2. *La loi géométrique est sans mémoire.* Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire si pour tous j, k entiers naturels, $\mathbb{P}_{X>j}(X > j+k) = \mathbb{P}(X > k)$.

- Démontrer que si X suit une loi géométrique, alors X est sans mémoire.
- Démontrer que, réciproquement, si X est sans mémoire, X suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

Exercice 3. *Loi des événements rares – théorème de Poisson.* On considère $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$.

Démontrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

Exercice 4. *Sommes de lois de Poisson et conditionnement.* Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ .

- Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
- Calculer $P_{Z=n}(X = k)$ pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$.
- Reconnaître alors la loi conditionnelle de X sachant $(Z = n)$.

Exercice 5. *Amincissement poissonnien.* Pour un habillage de cet exercice, cf. l'exercice 56. On considère deux variables aléatoires réelles X et Y , où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda > 0$) et la loi de Y sachant $X = n$, est une loi binomiale de paramètre (n, p) .

- Déterminer la loi de Y . X et Y sont-ils indépendants ?
- Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Z et Y sont-ils indépendants ?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance V . Soit $\varepsilon > 0$.

- Montrer que $\forall x \geq 0, \mathbb{P}(X - m \geq \varepsilon) \leq \frac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.
- En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geq \varepsilon) \leq \frac{V}{V + \varepsilon^2}$ et que $\mathbb{P}(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{2V}{V + \varepsilon^2}$.
- Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef.

Exercice 7. Soient X et Y des variables aléatoires.

- Démontrer que $\mathbb{E}(XY)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).
- Retrouver l'inégalité de Cantelli, en remarquant que $\mathbb{E}(\varepsilon + m - X) \leq \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X < m+\varepsilon})$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X < m+\varepsilon}$.

Exercice 8. *Espérance comme somme de queues.* ●●○

- Calculer l'espérance du minimum/du maximum de n v.a.i.i.d géométriques/uniformes.

2. Soit une urne contenant p boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à p . On tire n fois, avec remise, une boule, et on note M le plus grand numéro obtenu.

(a) Que vaut $\mathbb{P}(M \leq k)$? En déduire la loi de M .

(b) À l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(M)$.

(c) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{k}{p} \right)^n \right)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite à calculer.

(d) En déduire que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(M)}{p} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 9. Mines-Télécom 24. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. Calculer $P(X_i > k)$ et $P(X_i \leq k)$.

2. Soit $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Calculer $P(Y > k)$ puis $P(Y \leq k)$ et $P(Y = k)$.

(b) Montrer que Y a une espérance finie, que l'on calculera.

Exercice 10. Formule de Wald pour l'espérance. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire indépendante des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et, $S = \sum_{i=1}^N X_i$: cela signifie que pour tout ω de Ω ,

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

1. Justifier que S est bien une variable aléatoire discrète.

2. On suppose que X_1 et N admettent une espérance. Démontrer que $S \in L^1$ et que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice 11. ●●○ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires de Rademacher iid.

1. Montrer $\forall (t, \varepsilon) \in]0, +\infty[^2, \mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-t n \varepsilon} \text{ch}^n t$.

2. Pour $t > 0$, comparer $e^{\frac{t^2}{2}}$ et $\text{ch} t$.

3. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq e^{-n \varepsilon^2 / 2}$.

4. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

Exercice 12. Inégalité de Popoviciu. ●●○ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que à valeurs dans $[a, b]$.

1. Démontrer que $\mathbb{V}(X) \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

2. Cette inégalité est-elle optimale?

Exercice 13. Marches aléatoires : les bases. ●●○ Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v iid, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. Donner la loi de Y_k .

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Donner la loi de T_n et en déduire celle de S_n . Donner l'espérance et la variance de S_n .

3. Déterminer en particulier un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

4. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)$ converge, et donner sa limite.

2 Probabilités, événements

Exercice 14. *Opérations ensemblistes.* ●○○ Soient A et B deux événements. Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Exercice 15. *CCINP 2019.* Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Montrer :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) + n - 1.$$

Exercice 16. *Loi de succession de Laplace.* ●●○ On considère $p + 1$ urnes $U_0, \dots, U_p$ en supposant que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, l'urne U_k contient k boules blanches et $p - k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir aléatoirement une urne puis à effectuer des tirages avec remise.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_n défini par « les n -premiers tirages ont donné des boules blanches ».
2. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)$ puis déterminer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_{n+1} | A_n)$.

Exercice 17. *Inégalité de Kosmanek.* ●●○ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2 \quad |\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}$$

puis préciser le cas d'égalité.

Exercice 18. *Le produit eulérien, version probabiliste.* ●●○ Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application $\mathbb{P}$ définit-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \mid n\}$. Exprimer simplement $\mathbb{P}(A_p)$.
3. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p \in \mathcal{Q}}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.
4. En étudiant $\mathbb{P}(\{1\})$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p \in \mathcal{Q}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}.$$

Exercice 19. *Urne de Polya.* ●●○ Soient b, r, c dans $\mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. On tire une boule que l'on remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur. On répète cette opération. Notons A_n l'événement « le n -ième tirage amène une boule blanche ». On a : $\mathbb{P}(A_1) = \frac{b}{b+r}$. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{b}{b+r}.$$

3 Lois de variables aléatoires

Exercice 20. *Mines-Télécom PC 2015.* Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Comparer les événements (X prend une valeur paire) et (X prend une valeur impaire).

Exercice 21. *CCINP 2023.* Soit une urne avec 3 jetons numérotés. On tire avec remise des jetons de l'urne. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaire pour obtenir 2 jetons différents pour la première fois. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 jetons pour la première fois.

1. Donner la loi de Y .
2. Reconnaître la loi de $Y - 1$. En déduire la variance et l'espérance de Y .
3. Déterminer la loi de (Y, Z) .
4. Donner enfin la loi de Z .

Exercice 22. *Fonction de répartition.* ●●○ Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition la fonction $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$.

1. Représenter les fonctions de répartition d'une loi de Bernoulli, binomiale.
2. Soient $p \in]0, 1[$ et une variable aléatoire X telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$.
 - (a) Déterminer F_X .
 - (b) Retrouver le fait que la loi géométrique est une loi sans mémoire.
3. Soient $\lambda > 0$ et une variable aléatoire Y telle que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_Y(n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-x} x^n dx$$

4. Soient $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles discrètes telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Pour x point de continuité de $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$, montrer que

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x)$$

Exercice 23. Une caractérisation de la loi de Poisson via les processus composés. ●●○ Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.i.d., telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On note $A = X_1 + \dots + X_N$ et $B = N - A$.

1. Montrer que A et B sont des variables aléatoires discrètes.
2. On suppose que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer qu'alors A et B sont indépendantes.
3. Réciproquement, on suppose A et B indépendantes. En écrivant $\mathbb{P}(N = i+j)$ sous la forme $\frac{a_i b_j}{(i+j)!}$, et en montrant que (a_i) est une suite géométrique, démontrer qu'il existe λ tel que $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 24. Probabilité d'être nilpotente. ●●○ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note A la matrice aléatoire réelle définie par $\forall \omega \in \Omega \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) \\ -Y(\omega) & -Y(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathbb{P}(A \text{ est nilpotente})$.

Exercice 25. Minimum, maximum de géométriques. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables géométriques iid de même paramètre p .

1. Déterminer la loi de $\min(X_1, \dots, X_n)$ et de $\max(X_1, \dots, X_n)$.
2. Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, $U = \min(X, Y)$ et $V = |Y - X|$. Montrer que U et V sont indépendantes, déterminer leurs lois.

Exercice 26. Un jeu de pile ou face à deux. ●●○ Deux joueuses jouent avec des pièces équilibrées. Elles lancent chacune n fois une pièce. Celle qui gagne est celle qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait une gagnante ?

Exercice 27. Loi des séries. ●●● Soient $p \in]0, 1[$ et une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a.d. indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , portées par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_r = \inf \{n \geq r \mid X_{n-r+1} = \dots = X_n = 1\}$ avec, comme convention, $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Que représente T_r ?
2. Montrer que T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
3. Prouver que pour tous $n, r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T_r = n + r + 1) = (1 - p)p^r \mathbb{P}(T_r > n)$.
4. Montrer que T_r est presque sûrement finie et calculer son espérance.

4 Moments d'une variable aléatoire

Exercice 28. Mines-Télécom 24. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(Y = k) = \frac{1 + a^k}{4k!}$.

1. Déterminer la valeur de a .

- Déterminer l'espérance de X .
- Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 29. *Une caractérisation des Rademacher.* ●○○ Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 4 et vérifiant $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) = 1$.

- Montrer que $|\mathbb{E}(X)| \leq 1$.
- Déterminer la loi de X .

Exercice 30. *Espérance de $1/(1+X)$.* ●○○ Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$ lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, puis lorsque $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Comparer avec $\frac{1}{1+\mathbb{E}(X)}$.

Exercice 31. *Espérance conditionnelle.* ●●○ Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}(X | A) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x | A)$$

- Montrer que si X admet une espérance finie, alors $\mathbb{E}(X | A)$ est bien définie.
- Prouver alors que $\mathbb{E}(X | A) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbb{P}(A)}$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$, calculer $\mathbb{E}(X | X > m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
- Montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un système (quasi-)complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors on a
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \mathbb{E}(X | A_k).$$
- Application : identité de Wald.* Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $N, X_1, X_2, \dots$ soient mutuellement indépendantes. On suppose que N et X_1 sont d'espérance finie et on pose $S = \sum_{i=1}^N X_i$. Retrouver la formule $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X_1)$ à l'aide de la question précédente.

Exercice 32. *Médianes d'une variable aléatoire.* ●●○ Si X est une v.a.d. réelle, on appelle médiane de X tout nombre réel m tel que $\mathbb{P}(X \geq m)$ et $\mathbb{P}(X \leq m)$ soient supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$.

- Montrer que l'ensemble des médianes $\mathcal{M}$ de X est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Vérifier que c'est même un segment de $\mathbb{R}$.
- Montrer que $\mathcal{M}$ n'est pas réduit à un point si et seulement s'il existe des réels $a < b$ tels que $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X \geq b) = \frac{1}{2}$, et qu'on a alors $\mathcal{M} = [a, b]$.
- Lorsque X est d'espérance finie, montrer qu'un réel m est une médiane de X si et seulement si $t \mapsto \mathbb{E}(|X - t|)$ est minimale en m .

Exercice 33. *Inégalité de Paley-Zygmund.* ●●○ Soient X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle $\mathbb{E}(X^2) > 0$ et $\eta \in [0, 1]$.

- Montrer que $\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geq \eta \mathbb{E}(X)\}})^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \mathbb{P}(X \geq \eta \mathbb{E}(X))$.
- En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund : $\mathbb{P}(X \geq \eta \mathbb{E}(X)) \geq (1 - \eta)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

Exercice 34. *Inégalité de Jensen pour l'espérance.* ●●○ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(X)$ admettent une espérance finie. Montrer $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$...

- ... dans le cas où $X(\Omega)$ est fini
- ... dans le cas où X est discrète et f est dérivable

Exercice 35. ●●○ Une urne contient n billes numérotées de 1 à n . On saisit une poignée de billes et on note X la somme des numéros des billes. En supposant que toutes les poignées sont équiprobables, que vaut $\mathbb{E}(X)$?

Exercice 36. Corrélation et régression. ●●○ Soient X et Y des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, de variances non nulles, et $\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

1. Montrer que $|\rho| \leq 1$ et étudier le cas d'égalité.
2. Déterminer $\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \mathbb{E}((Y - aX - b)^2)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$ et ρ .
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. de variance non nulle et $S_k = X_1 + \dots + X_k$. Calculer $\rho(S_m, S_n)$ pour $m \leq n$.

Exercice 37. Formule de Wald pour la variance. ●●○ On reprend les notations de l'exercice 10. On suppose que X_1 et N admettent une variance. Démontrer que $S \in L^2$ et que $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(X_1)^2$.

Exercice 38. Inégalité de Popoviciu raffinée. ●●○ Soit X une v.a.d. à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance m .

1. Montrer que $\mathbb{V}(X) \leq (m - a)(b - m) \leq \frac{(b - a)^2}{4}$.
2. Si $m \in [a, b]$, exhiber une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$ d'espérance m et de variance $(m - a)(b - m)$. Quelle est la variance maximale d'une v.a.d. à valeurs dans $[a, b]$?

Exercice 39. Espérance d'un quotient (2). ●●○

1. Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, $Z = \frac{Y}{X}$. Montrer que $\mathbb{E}(Z) \geq 1$ et caractériser l'égalité.
2. Montrer que le résultat de la question précédente subsiste sans hypothèse d'indépendance. On pourra commencer par le cas où $\ln(X)$ est d'espérance finie et utiliser $\ln(Z) \leq Z - 1$.

Exercice 40. ●●●

1. Soit X une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k)$.

Soit une variable aléatoire X et une suite de variables aléatoires (X_n) , toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles positives.

2. À l'aide de la variable $\lceil X \rceil$, montrer que $0 \leq \mathbb{E}(X) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
3. On suppose que X_0 est d'espérance finie et que pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle. Au moyen d'un découpage judicieux, montrer que $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
4. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n) < +\infty$. Montrer que X est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 41. Inégalité de Hoeffding pour des variables symétriquement bornées. ●●●

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que $e^{tx} \leq \frac{1}{2}(1 - x)e^{-t} + \frac{1}{2}(1 + x)e^t$.
2. Soit X une variable aléatoire telle que $|X| \leq 1$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \cosh t \leq \exp(t^2/2)$.
3. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que $|X_i| \leq a_i$ pour tout i . On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Montrer que

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right),$$

puis que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2} \sum_{i=1}^n a_i^2\right)$.

4. En choisissant une bonne valeur de t , montrer que

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{i=1}^n a_i^2}\right).$$

5. Commenter le résultat de la première question.

5 Modélisation et applications à d'autres domaines des maths

Exercice 42. *Transmission d'informations.* ●○○ On donne une information I à une première personne, qui doit la transmettre à une autre, etc. Chaque personne donne l'information reçue avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou en donne le contraire avec une probabilité $1 - p$.

On note p_n la probabilité que la personne n donne l'information I .

1. Calculer p_1 et p_2 .
2. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n puis exprimer p_n en fonction de n . Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de p_n .

Exercice 43. *CCINP MP 2015.* Une secrétaire effectue un appel téléphonique vers n correspondants. Lors d'un appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $p \in]0, 1[$. Les appels sont des événements mutuellement indépendants. Soit X la variable aléatoire du nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X .
2. La secrétaire rappelle les $n - X$ correspondants non joints. On nomme Y le nombre de correspondants joints lors de la seconde tentative.
 - (i) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k | X = i)$.
 - (ii) Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale, en donner les caractéristiques.
 - (iii) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Exercice 44. *Mines-Ponts MP 2026.* Soient $X_1 \dots X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli

de paramètre p . On pose $U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $M = UU^T$.

1. Déterminer la loi de $\text{tr}(M)$ et la loi de $\text{rang}(M)$.
2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?
3. Dans cette question, $n = 2$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = V^T M V$. Calculer $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{V}(S)$.

Exercice 45. *Coefficients d'une matrice aléatoire.* ●○○ Les coefficients d'une matrice aléatoire $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont indépendants et suivent tous une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

1. Donner la loi de $\text{tr}(M)$ et l'espérance de $\text{tr}(M)^2$.
2. Les coefficients de M^2 sont-ils indépendants ?

Exercice 46. *Déterminants aléatoires, d'après Centrale MP 2021.* ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une suite de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

et $D = \det(A)$. On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance.

1. Démontrer que $\mathbb{E}(D) = \det(M)$ où $M = (\mathbb{E}(X_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$.

On suppose désormais que pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_{ij} est centrée réduite.

2. Soit σ et τ deux permutations de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que

$$\text{Cov} \left(\prod_{i=1}^n X_{\sigma(i), i}, \prod_{j=1}^n X_{\tau(j), j} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq \tau \\ 1 & \text{si } \sigma = \tau \end{cases}$$

3. En déduire que la variance de D est égale à $n!$
4. Soit $\alpha > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(|D| \geq \alpha \sqrt{n!}) \leq \frac{1}{\alpha^2}$.
5. Démontrer qu'il existe une matrice M à coefficients dans $\{-1, 1\}$ et vérifiant $|\det(M)| \geq \sqrt{n!}$.

Exercice 47. *Permutations aléatoires, d'après Centrale MP 2019.* ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}$, $n \geq 2$. On appelle $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$

- on dit que $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ est un point fixe de σ si $\sigma(k) = k$.
- on dit que σ est un dérangement si σ n'admet pas de point fixe.

Soit σ une variable aléatoire uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Soient $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ les variables aléatoires indicatrices des événements « $\sigma(k) = k$ », soit N_n la variable aléatoire du nombre de points fixes de σ , et D l'événement « σ est un dérangement ».

1. Exprimer N_n et D à l'aide des $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$. En déduire l'espérance de N_n .
2. Déterminer la variance de N_n .
3. Relier N_n et D .
4. On cherche dans cette question à déterminer la loi de N_n . On note, pour tout k dans $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $D_{n,k} = n! \mathbb{P}(N_n = k)$. On note en particulier $d_n = D_{n,0}$.

(a) Démontrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$, puis que

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

(b) En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!},$$

et la limite de $\frac{1}{n!} d_n$ quand n tend vers $+\infty$.

(c) Déterminer la loi de N_n .

(d) Quelle est la limite de $\mathbb{P}(N_n = k)$ quand n tend vers $+\infty$? Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 48. *Un jardin fleuri.* ●●○ Dans un jardin de $n \geq 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0, 1[$ de fleurir à l'année k . Si une tulipe fleurit à l'année k , elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i . Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

1. Déterminer la loi de chaque X_i . Exprimer X en fonction des X_i .
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X \leq k)$ et en déduire la loi de X .
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 49. ●●○ On lance n fois deux dés à 6 faces équilibrés A et B , et on suppose les différents lancers indépendants. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de lancers où le numéro de A est strictement supérieur au numéro de B .

1. Déterminer la loi de X_1 , puis si n est quelconque. Donner $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.
2. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3. Soit $p_n = \mathbb{P}\left(0.9 < \frac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} < 1.1\right)$. Trouver un entier n tel que $p_n \geq 0.99$.

Exercice 50. *Probabilités et équations différentielles.* ●●○ Soit (A, B) un couple de variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p . Déterminer la probabilité que toutes les solutions réelles de l'équation $(E) : y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 51. *Tests de dépistage.* ●●○ Une maladie touche une personne sur mille. Un test est positif avec probabilité 0,99 chez un malade et 0,02 chez une personne saine.

1. Une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade?
2. On refait passer le test, les résultats étant indépendants conditionnellement à l'état de la personne. Combien de tests positifs consécutifs faut-il pour que la probabilité d'être malade dépasse 0,99?

Exercice 52. *Ruine du joueur.* ●●○ Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $a \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Une puce se trouve à l'instant 0 sur une règle graduée de longueur N , à l'abscisse a . À chaque pas de temps, elle avance de 1 avec une probabilité $p \in]0, 1[$, et recule de 1 avec probabilité $q = 1 - p$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ x_n la position de la puce au temps n .

Le processus se termine lorsque la puce atteint une extrémité de la règle, c'est-à-dire lorsque $x_n = 0$ ou $x_n = N$. On note u_a la probabilité que - la puce partant de a - elle finisse par terminer sa trajectoire en 0.

1. Calculer u_0 et u_N .
2. Pour tout $a \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, exprimer u_a en fonction de u_{a+1} et u_{a-1} .
3. En déduire u_a pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
4. On note v_a la probabilité que - la puce partant de a - elle finisse par terminer sa trajectoire en N . Calculer v_a pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$.
5. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduire ?
6. Deux joueurs A et B se partagent N billes. À chaque partie, le perdant donne une bille à l'autre. Le joueur A gagne chaque partie avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a toutes les billes. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

6 Du côté des concours

Exercice 53. Mines-Télécom PSI 2016. 1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Déterminer la loi de $X + Y$.

2. Soient $p \in]0, 1[$, X et Y deux variables aléatoires réelles, telles que Y suive une loi de Poisson de paramètre λ et que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée à $Y = n$ soit une loi binomiale de paramètres n, p .
 - (a) Donner la loi de (X, Y) , et celle de X .
 - (b) Soit $Z = X - Y$. Donner la loi de Z .
 - (c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 54. Mines-Télécom 24. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i, k) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = k) = a \frac{i+k}{2^{i+k}}$.

1. Déterminer la valeur de a .
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 55. Centrale 24. Une candidate doit se rendre sur un lieu de convocation. Elle dispose pour cela de 2 chemins : le chemin A et le chemin B . Elle prend le chemin A avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Soit T la variable aléatoire égale au temps de trajet de la candidate, en minutes. Le temps de trajet du chemin A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$ (respectivement $b > 0$).

1. (a) [Py] Écrire une fonction prenant comme argument p, a et b et renvoyant la valeur de T .
 (b) [Py] On prend $a = 5$ et $b = 10$. Donner les valeurs moyennes de T avec $N = 500$ simulations pour $p \in \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\}$.
 (c) [Py] Proposer une fonction calculant une approximation de $\mathbb{E}(T)$, justifiée par un résultat précis du cours.
2. Déterminer la loi de T en fonction de p, a et b , puis calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ si elles existent.
3. Déterminer N de sorte que, dans 95% des cas, on observe un écart maximum de 30 secondes entre la valeur moyenne de N simulations et l'espérance de T .

Exercice 56. Mines PSI 2025. On dispose d'une station d'appel. Le nombre d'appels entre 10 h et 11 h est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

La probabilité pour qu'un appel concerne le standard A est $p \in [0, 1]$. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant choisi le standard A entre 10 h et 11 h .
Donner la loi de Y .

Exercice 57. Centrale 24. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$.

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère $Z_i = e^{\lambda(X_i - 1/2)}$. Calculer l'espérance de Z_i .
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, calculer $\mathbb{E} \left(e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))} \right)$.

- Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $f_t : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}; \lambda \mapsto \lambda t - \ln(\text{ch}(\lambda/2))$.
Montrer que : $\forall \lambda > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq nt) \leq e^{-nf_t(\lambda)}$.
- Pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on pose $I(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) \ln(1 - 2t) - \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln(2t + 1)$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq nt) \leq e^{nI(t)}$.
- Comparer l'inégalité précédente avec celle de Bienaymé-Tchebycheff.

Exercice 58. Centrale MP 21. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une suite de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

et $D = \det(A)$. On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance.

- [Py]** À l'aide de Python, estimer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ dans le cas où, pour tous i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_{ij} est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(X_{ij} = -1) = \mathbb{P}(X_{ij} = 1) = \frac{1}{2}$. On trouvera notamment une expression de $\mathbb{V}(D)$ en fonction de n .
 - Justifier, dans les cas $n = 1$ et $n = 2$, les espérances et variances estimées à la question 1.
 - Plus généralement, démontrer que $\mathbb{E}(D) = \det(M)$ où $M = (\mathbb{E}(X_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$. Retrouver l'espérance estimée à la question 1.
 - Application.** Si $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\mathbb{E}(\chi_A(x))$, dans le cas où les $(X_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ sont toutes de même loi?
- On suppose désormais que pour tout (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, X_{ij} est centrée réduite.
- Soit σ et τ deux permutations de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que

$$\text{Cov} \left(\prod_{i=1}^n X_{\sigma(i), i}, \prod_{j=1}^n X_{\tau(j), j} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \neq \tau \\ 1 & \text{si } \sigma = \tau \end{cases}$$

- En déduire que la variance de D est égale à la valeur estimée à la question 1.
- Démontrer que $\mathbb{E}(|D|) \leq n^{\frac{n}{2}}$.
- Soit $\alpha > 0$. À l'aide des deux questions précédentes, majorer de deux manières différentes $\mathbb{P}(|D| \geq \alpha \sqrt{n!})$. Quelle est la meilleure majoration?

Exercice 59. X MP 21. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. centrées et bornées. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\mathbb{E}((S_n)^4) \leq Cn^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\mathbf{P} \left(\bigcup_{n \geq N} \left(\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \right) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.
- Donner une interprétation à l'événement

$$\bigcup_{k \geq 1} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq N} \left(\left| \frac{S_n}{n} \right| \geq \frac{1}{k} \right),$$

et calculer sa probabilité.

Exercice 60. Mines-Télécom MP 2018. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{e^{-b} a^i b^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geq j, \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

- Donner les lois de X et Y , ainsi que leurs espérances.
- X et Y sont-elles indépendantes?

3. Donner la loi de $Z = X - Y$.

Exercice 61. *X MP 2018.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (resp. $\{-1, 1\}$). On note $p_n = \mathbb{P}(A_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R}))$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $q_{n+1} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geq \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 62. *Mines-Ponts MP 2019.* (15 min de préparation) On considère une urne avec des boules blanches et noires, avec une proportion $p \in]0, 1[$ de boules noires. On y effectue des tirages d'une boule à la fois, indépendants et avec remise. On note X la variable aléatoire donnant la longueur de la première suite de boules de même couleur, et Y celle qui donne la longueur de la deuxième. Par exemple l'événement $(X = 2, Y = 3)$ est réalisé si et seulement si on a tiré $(n, n, b, b, b, n, \dots)$ ou $(b, b, n, n, n, b, \dots)$.

1. Donner la loi du couple (X, Y) .

2. Donner la loi et l'espérance de X . Vérifier $\mathbb{E}(X) \geq 2$.

3. Donner la loi de Y , son espérance et sa variance.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Donner la loi de $X + Y$.

Exercice 63. *CCINP PSI 2025.* Soient X, Y deux v.a indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $Z = \min(X, Y)$.

1. Donner la loi de X , son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbb{P}(X > 2)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X > n)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$.

Exercice 64. *CCP – maximum et minimum de deux géométriques.* ●●○ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, géométriques de paramètre p . On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .

2. Expliciter les lois de U et de V .

3. U et V sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $\mathbb{E}(U)$. Reprendre la question lorsque X et Y sont géométriques de paramètres respectifs p et q .

Exercice 65. *X PC 23.* ●●○

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$.

2. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geq \lambda) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$.

3. Soit $c > 1$ et A_n l'événement $(|S_n| \leq \sqrt{2cn \ln n})$. Démontrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geq \lambda) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$, puis que A_n est presque sûrement réalisé à partir d'un certain rang.

Exercice 66. *ENS MP 2025.* ●●●○ On considère n variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq n}$. Montrer que pour tout réel $p > 0$, il existe $c_p, C_p > 0$ indépendants de n tel que

$$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad c_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 67. *ENS MP 2019.* (BEOS 5316) Soit E un ensemble au plus dénombrable. Soit μ, ν des mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$. On introduit également $X \rightsquigarrow \mu, Y \rightsquigarrow \nu$ des variables aléatoires indépendantes. On définit la distance en variation totale par $d_{vt}(\mu, \nu) = \sup_{A \subseteq E} |\mu(A) - \nu(A)|$

1. Montrer que $d_{vt}(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})| = \frac{1}{2} \sup_{f \in \mathcal{F}(E, [-1, 1])} |\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y))|$.

On pourra chercher une partie $\tilde{A}$ et une fonction $\tilde{f}$ qui atteignent les bornes supérieures respectives.

2. Désormais, $E = \mathbb{N}$. Pour μ, ν des mesures sur E , on note $\mu * \nu$ la loi de $X + Y$, où $X \rightsquigarrow \mu, Y \rightsquigarrow \nu$, X et Y indépendantes. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots, \nu_n$ des mesures de probabilités. Montrer que

$$d_{vt}(\mu_1 * \dots * \mu_n, \nu_1 * \dots * \nu_n) \leq \sum_{i=1}^n d_{vt}(\mu_i, \nu_i)$$

On pourra commencer par le cas $n = 2$.

Indications

- Ex 1.** 1. $\omega \in A$ si et seulement si $\forall k, \exists n \geq k, \omega \in A_n$.
 2. Utiliser la continuité décroissante et la sous-additivité.
- Ex 4.** 1. Utiliser le système complet $(Y = i)_{i \in \mathbb{N}}$, puis binôme de Newton.
- Ex 5.** 1. Utiliser le système complet $(X = n)_{n \in \mathbb{N}}$, et remarquer que $\mathbb{P}_{X=n}(Y = k)$ est nulle si $k > n$.
- Ex 6.** 1. Utiliser l'inégalité de Markov.
 2. Minimiser la quantité de droite par rapport à x .
- Ex 8.** 1. Étudier la probabilité que le minimum soit $> k$; étudier la probabilité que le maximum soit $\leq k$.
 2.c. On pourra utiliser une somme de Riemann.
- Ex 10.** 2. Décomposer selon le système complet d'événements $N = n$ et remarquer que $\{N = n\} \cap \{S = k\} = \{N = n\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\}$.
- Ex 11.** 1. Appliquer l'inégalité de Markov à e^{tS_n} .
 2. On utilisera que $e^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$, et que $\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, qui s'exprime aussi comme somme d'une série.
- Ex 12.** 1. COMMencer par le cas où X est à valeurs dans $[0, 1]$; s'y ramener en considérant une transformation affine de X .
- Ex 14.** Poser $x = \mathbb{P}(A \setminus B)$, $y = \mathbb{P}(B \setminus A)$ et $z = \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Ex 15.** Faire une récurrence pour l'inégalité de gauche. Pour celle de droite, appliquer celle de gauche aux complémentaires.
- Ex 17.** Considérer $a = \mathbb{P}(A \cap B)$, $b = \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$, $c = \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$, $d = \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$
- Ex 18.** 3. Utiliser le théorème de Gauss pour établir que si p et q sont deux nombres premiers distincts, $A_p \cap A_q = A_{pq}$.
- Ex 22.** 3. Procéder par récurrence et par IPP.
 4. Pour $\varepsilon > 0$, utiliser le système complet $(\{|X_n - X| < \varepsilon\}, \{|X_n - X| \geq \varepsilon\})$. Établir l'encadrement
- $$F_X(x - \varepsilon) + o(1) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + o(1)$$
- puis conclure par continuité de F_X en x .
- Ex 23.** On doit avoir $\mathbb{P}(A = i, B = j) = \mathbb{P}(N = i + j) \binom{i+j}{i} p^i q^j$.
- Ex 25.** 1. On déterminera $\mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq k)$ et $\mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \geq k)$.
- Ex 26.** On pourra démontrer que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$.
- Ex 27.** 3. On peut remarquer que $(T_r = n + r + 1) = (T_r > n) \cap (X_{n+1} = 0) \cap (X_{n+2} = \dots = X_{n+r+1} = 1)$ et que ces événements sont indépendants.
- Ex 28.** 1. Utiliser le fait que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
- Ex 29.** 1. Remarquer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X.1)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Ex 30.** Utiliser que $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$. Pour la comparaison, la convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ peut aider.
- Ex 31.** 3. Penser au fait que la loi géométrique est sans mémoire.
 5. On peut utiliser les événements $(N = k)$.
- Ex 33.** 2. Utiliser que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X \geq \eta \mathbb{E}(X)}) + \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{X < \eta \mathbb{E}(X)})$, et le second terme est majoré par $\eta \mathbb{E}(X)$.
- Ex 34.** Pour le premier cas, c'est juste l'inégalité de Jensen. Pour le second, utiliser que la courbe de f est au-dessus de sa tangente en $\mathbb{E}(X)$.
- Ex 35.** Utiliser des fonctions indicatrices : ne pas chercher à déterminer la loi de X .

- Ex 37.** Utiliser la même méthode que pour l'exercice 10, et remarquer qu'à n fixé, $\mathbb{E}(S_n^2) = n\mathbb{V}(X_1) + n^2\mathbb{E}(X_1)^2$ (si S_n est la somme jusqu'à n)
- Ex 38. 1.** On utilisera l'inégalité $(X - a)(b - X) \geq 0$.
- Ex 40. 3.** Écrire que, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{E}(X_n) \leq \varepsilon + \sum_x x\mathbb{P}(X_0 = x, X_n > \varepsilon)$, puis couper la somme.
- Ex 41. 4.** Utiliser $t = \varepsilon / \sum a_i^2$.
- Ex 42. 2.** Démontrer, avec les probabilités totales, que $p_{n+1} = pp_n + (1 - p)(1 - p_n)$, et reconnaître une suite arithmético-géométrique.
- Ex 43. 2.b.** On pourra utiliser que $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$.
- Ex 46. 5.** On pourra supposer que tous les X_{ij} sont des variables de Rademacher.
- Ex 47. 4.b.** On a tout intérêt à écrire que $n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{n-k} (-1)^k (n-k)! = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k!$ et à remplacer $k!$ par son expression à l'aide des d_j . C'est la formule d'inversion de Pascal, probablement vue en TD en sup.
- Ex 49. 1.** On doit trouver que $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{5}{12}\right)$.
- 3.** Écrire le contraire de l'événement sous la forme $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq 0,1\mathbb{E}(X_n)$ et appliquer Bienaymé-Tchebycheff.
- Ex 50.** Les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ tendent toutes vers 0 si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$ (discuter selon le discriminant).
- Ex 59. 1.** En développant S_n^4 , seuls les termes $\mathbb{E}(X_i^4)$ et $\mathbb{E}(X_i^2 X_j^2)$ survivent.
- 2.** Utiliser l'inégalité de Markov.
- 3.** Utiliser Borel-Cantelli.
- Ex 61. 1.** Multiplier lignes et colonnes par ± 1 pour que la dernière ligne et la dernière colonne ne contiennent que des 1.
- 2.** Choisir les colonnes une à une. Un sous-espace de dimension $k-1$ contient au plus 2^{k-1} éléments de $\{0, 1\}^n$.
- Ex 65. 3.** Appliquer le premier lemme de Borel-Cantelli à $\overline{A_n}$.
- Ex 66.** Traiter d'abord le cas de z_i réels. Majoration : queue sous-gaussienne $\mathbb{P}(|S| \geq t) \leq 2e^{-t^2/(2\sum z_i^2)}$, puis $\mathbb{E}(|S|^p) = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{P}(|S| > t)dt$. Minoration : si $p \geq 2$, Hölder ; si $p < 2$, interpoler $\mathbb{E}(S^2)$ entre $\mathbb{E}(|S|^p)$ et $\mathbb{E}(S^4) \leq 3\left(\sum z_i^2\right)^2$.
- Ex 67. 1.** Considérer $B = \{x, \mu(x) \geq \nu(x)\}$ et $f = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{\overline{B}}$.
- 2.** Utiliser l'inégalité triangulaire avec $\nu_1 * \mu_2$, et $d_{vt}(\mu * \lambda, \nu * \lambda) \leq d_{vt}(\mu, \nu)$.