TD 05
Probabilités (1)

1 Exercices classiques

Exercice 1. *Lemmes de Borel-Cantelli et applications.* ●●◐ Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements. On considère l'événement : $A = \bigcap_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right)$.

1. Traduire avec des mots en français l'événement A.

Correction. L'événement A signifie qu'une **infinité de A_n ont lieu.**

2. On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ converge. En se rappelant que la probabilité d'une réunion est inférieure à la somme des probabilités, déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Correction. On remarque que

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right).$$

Or,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Or, $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Donc $\sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par encadrement, $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0}$.

3. On suppose maintenant que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série de terme général $P(A_n)$ diverge. En étudiant $\mathbb{P}(\overline{A})$, et en remarquant que $1 - x \leqslant e^{-x}$, déterminer $\mathbb{P}(A)$.

Correction. On remarque que

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right)\right).$$

Or,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right)\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right).$$

Finalement, pour $N \geqslant k$,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{K} \overline{A_n}\right) &= \prod_{n=k}^{K} \mathbb{P}(\overline{A_n}) \\ &= \prod_{n=k}^{K} (1 - \mathbb{P}(A_n)) \\ &\leqslant \prod_{n=k}^{K} e^{-\mathbb{P}(A_n)} \\ &\leqslant e^{-\sum_{n=k}^{K} \mathbb{P}(A_n)} \end{aligned}$$

Or, par divergence de la série de terme général $\mathbb{P}(A_n)$, $\sum_{n=k}^{K} \mathbb{P}(A_n) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{K} \overline{A_n}\right) \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=k}^{+\infty} \overline{A_n}\right) = 0$ donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0$.

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1.}$

4. **Application.** On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid vérifiant $\mathbb{P}(X_1=1)=p$ et $\mathbb{P}(X_1=-1)=1-p$. On note $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n=0)$ et démontrer que si $p\neq\frac{1}{2}$, alors, presque sûrement, S_n ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

> **Correction.** On pose $A_n=\{S_n=0\}$. On a clairement $\mathbb{P}(A_{2n+1})=0$ et $\mathbb{P}(A_{2n})=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n$. Or, d'après l'équivalent de Stirling,
> $$\binom{2n}{n}\sim\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$
> Donc, si $p\neq\frac{1}{2}, p(1-p)<\frac{1}{4}$ donc $\sum\mathbb{P}(A_{2n})$ converge. D'où le résultat d'après Borel-Cantelli.

Exercice 2. *La loi géométrique est sans mémoire*. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire si pour tous j,k entiers naturels, $\mathbb{P}_{X>j}(X>j+k)=\mathbb{P}(X>k)$.

1. Démontrer que si X suit une loi géométrique, alors X est sans mémoire.

> **Correction.** Supposons que X suive une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$. Soient j,k des entiers. Alors
> $$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X>j}(X>j+k)&=\frac{\mathbb{P}(X>j,X>j+k)}{\mathbb{P}(X>j)}\\&=\frac{\mathbb{P}(X>j+k)}{\mathbb{P}(X>j)}\text{ car }\{X>j+k\}\subset\{X>j\}\\&=\frac{q^{j+k}}{q^j}=q^k=\mathbb{P}(X>k).\end{aligned}$$
> Donc X est sans mémoire.

2. Démontrer que, réciproquement, si X est sans mémoire, X suit une loi géométrique de paramètre $p=\mathbb{P}(X=1)$.

> **Correction.** Montrer que $\mathbb{P}(X>k)$ est une suite géométrique.

> **Correction.** Si X est sans mémoire, notons $p=\mathbb{P}(X=1)$ et, par conséquent, $q=1-p=\mathbb{P}(X>1)$. Alors pour tout k dans $\mathbb{N}$,
> $$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k).$$
> Or, $\mathbb{P}_{X>k-1}(X>k)=\mathbb{P}(X>1)=q$, donc $\mathbb{P}(X>k)=q\mathbb{P}(X>k-1)$. Par récurrence immédiate, il vient donc : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>k)=q^k$. Ainsi,
> $$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X>k-1)-\mathbb{P}(X>k)=q^{k-1}-q^k=q^{k-1}(1-q)=pq^{k-1}.$$
> Ainsi, $X\sim\mathscr{G}(p)$.

Exercice 3. *Loi des événements rares – théorème de Poisson*. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(n,p_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$.

Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n=k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

> **Correction.** Soit $k\in\mathbb{N}$. Soit $n\geqslant k$ (sinon $\mathbb{P}(S_n=k)=0$). Alors
> $$\mathbb{P}(S_n=k)=\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}p_n^k\mathrm{e}^{(n-k)\ln(1-p_n)}.$$
> Ensuite, faisons de l'asymptotique **proprement.**
> - Déjà, $n(n-1)\dots(n-k+1)$ est un produit **fini** de k termes (le nombre de termes du produit est indépendant de n) donc $n(n-1)\dots(n-k+1)\underset{n\to+\infty}{\sim}n^k$. Ainsi, $n(n-1)\dots(n-k+1)p_n^k\underset{n\to\infty}{\sim}(np_n)^k\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\lambda^k$.
> - Ensuite, $(n-k)\ln(1-p_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}n\ln(1-p_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-np_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\lambda$.
>
> Ainsi, par continuité de l'exponentielle, on en déduit que
> $$\mathbb{P}(S_n=k)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},$$
> d'où la convergence en loi de (S_n) vers la loi de Poisson.

Exercice 4. *Sommes de lois de Poisson et conditionnement*. Soit X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Montrer que $Z = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Correction. Déjà, Z est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ensuite, si $k \in \mathbb{N}$, comme $\{(Y = i), i \in \mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = k, Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k - i, Y = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - i, Y = i) \text{ car } X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = k - i)\mathbb{P}(Y = i) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} \mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^i}{i!} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \mu^i \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{k!} (\lambda + \mu)^k,
\end{aligned}$$

donc $Z \sim \mathbb{P}(\lambda + \mu)$.

2. Calculer $P_{Z=n}(X = k)$ pour $(k, n) \in \mathbf{N}^2$.

Correction. Soient n dans $\mathbb{N}$ et k dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\mathbb{P}_{Z=n}(X = k) = \frac{\mathbb{P}(Z = n, X = k)}{\mathbb{P}(Z = n)} = \frac{\mathbb{P}(Y = n - k, X = k)}{\mathbb{P}(Z = n)}.$$

Déjà, si $k > n$, cette probabilité est nulle. Ensuite, si $k \leqslant n$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{Z=n}(X = k) &= \frac{\mathbb{P}(Y = n - k)\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(Z = n)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}}{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

3. Reconnaître alors la loi conditionnelle de X sachant $(Z = n)$.

Correction. Donc la loi de X conditionnée à $Z = n$ est une loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

Exercice 5. *Amincissement poissonnien. Pour un habillage de cet exercice, cf. l'exercice 56.* On considère deux variables aléatoires réelles X et Y, où $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ et la loi de Y sachant $X = n$, est une loi binomiale de paramètre (n, p).

1. Déterminer la loi de Y. X et Y sont-ils indépendants ?

2. Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Z et Y sont-ils indépendants ?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance V. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.

Correction. On sait que

$$\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)=\mathbb{P}(X-m+x\geqslant\varepsilon+x)=\mathbb{P}((X-m+x)^2\geqslant(\varepsilon+x)^2),$$

donc, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbb{E}((X-m+x)^2)}{(\varepsilon+x)^2}=\frac{\mathbb{E}((X-m)^2)+2x\mathbb{E}(X-m)+x^2}{(\varepsilon+x)^2}=\frac{\mathbb{V}(X)+x^2}{(\varepsilon+x)^2}.$$

2. En déduire que $\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{V}{V+\varepsilon^2}$ et que $\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{2V}{V+\varepsilon^2}$.

Correction. L'idée est qu'on a une égalité vraie pour tout x. Si on pose la fonction $\varphi : x\mapsto\dfrac{V+x^2}{(\varepsilon+x)^2}$, on a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\varphi(x).$$

Si on arrive à **minimiser** φ, i.e. si on arrive à trouver x_0 tel que $\varphi(x_0)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}}(\varphi(x))$, on aura une inégalité optimale.
Or, la dérivée de φ est

$$\varphi'(x)=\frac{2x(\varepsilon+x)^2-2(V+x^2)(\varepsilon+x)}{(\varepsilon+x)^4},$$

et est nulle quand

$$x(\varepsilon+x)^2-(V+x^2)(\varepsilon+x)=0,$$

i.e. quand $x(\varepsilon+x)=V+x^2$, i.e. quand $x=\dfrac{V}{\varepsilon}$. On peut étudier le signe de cette dérivée et remarquer qu'alors $\dfrac{V}{\varepsilon}$ est un point en lequel φ atteint son minimum.
On a alors $\varphi\left(\dfrac{V}{\varepsilon}\right)=\dfrac{V}{V+\varepsilon^2}$.
Remarque : on aurait pu, si on y avait pensé comme ça, **poser** $x=\dfrac{V}{\varepsilon}$, et, comme l'inégalité est vraie pour tout x, dire que $\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\varphi(V/\varepsilon)$.

Enfin,

$$\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)=\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)+\mathbb{P}(X-m\leqslant-\varepsilon)=\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)+\mathbb{P}(-X+m\geqslant\varepsilon)$$

Mais en appliquant le même raisonnement que précédemment à $-X$, qui est d'espérance $-m$ et de variance V, on obtient $\mathbb{P}(-X+m\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{V}{V+\varepsilon^2}$, d'où

$$\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{2V}{V+\varepsilon^2}.$$

3. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef.

Correction. **Première inégalité.**
L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff ne permet que des estimations en valeur absolue :

$$\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V}{\varepsilon^2}.$$

Or, $\dfrac{V}{V+\varepsilon^2}\leqslant\dfrac{V}{\varepsilon^2}$. L'inégalité de Cantelli est alors meilleure dans tous les cas.
Deuxième inégalité.
On remarque que $\dfrac{2V}{V+\varepsilon^2}\leqslant\dfrac{V}{\varepsilon^2}$ si et seulement si $\varepsilon^2\leqslant V$. L'inégalité de Cantelli est donc meilleure que celle de Tchebycheff lorsque $\varepsilon^2\leqslant V$.

Exercice 7. Soient X et Y des variables aléatoires.

1. Démontrer que $\mathbb{E}(XY)^2\leqslant\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

2. Retrouver l'inégalité de Cantelli, en remarquant que $\mathbb{E}(\varepsilon+m-X)\leqslant\mathbb{E}((\varepsilon+m-X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon})$, et en appliquant

l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}$.

Exercice 8. *Espérance comme somme de queues.* ●●○

1. Calculer l'espérance du minimum/du maximum de n vaiid géométriques/uniformes.

2. Soit une urne contenant p boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à p. On tire n fois, avec remise, une boule, et on note M le plus grand numéro obtenu.

(a) Que vaut $\mathbb{P}(M \leqslant k)$? En déduire la loi de M.

(b) À l'aide des questions précédentes, donner la valeur de $\mathbb{E}(M)$.

(c) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left(\frac{k}{p}\right)^n\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite à calculer.

(d) En déduire que $\lim_{p\to+\infty}\frac{\mathbb{E}(M)}{p} = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 9. *Mines-Télécom 24.* Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Calculer $P(X_i > k)$ et $P(X_i \leqslant k)$.

Correction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i > k) &= \sum_{j>k}\mathbb{P}(X_i = j)\\ &= \sum_{j\geqslant k+1} pq^{j-1}\\ &= pq^k\frac{1}{1-q} = q^k.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X_i \leqslant k) = 1 - \mathbb{P}(X_i > k) = 1 - q^k$.

2. Soit $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(a) Calculer $P(Y > k)$ puis $P(Y \leqslant k)$ et $P(Y = k)$.

Correction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > k) &= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > k)\\ &= \mathbb{P}(X_1 > k \text{ et } X_2 > k \text{ et } \dots \text{ et } X_n > k)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i > k) \text{ par indépendance.}\\ &= \prod_{i=1}^{n} q^k \boxed{= q^{nk}}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y \leqslant k) = 1 - q^{nk}$ et $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = q^{n(k-1)}(1-q^n)$.

(b) Montrer que Y a une espérance finie, que l'on calculera.

Correction. On sait que pour Y à valeurs dans $[0, +\infty]$ (fermé !), on a juste à calculer l'espérance. Mais comme Y Est à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X \geqslant 1).$$

Donc, ici,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(Y\geqslant k)\\ &= \sum_{k\geqslant 0}\mathbb{P}(Y> k)\\ &= \sum_{k\geqslant 0} q^{nk}\\ &= \frac{1}{1-q^n} < +\infty,\end{aligned}$$

donc Y admet une espérance finie, égale à $\dfrac{1}{1-q^n}$.

Exercice 10. *Formule de Wald pour l'espérance*. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et, $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$: cela signifie que pour tout ω de Ω, $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$.

1. Justifier que S est bien une variable aléatoire discrète.
2. On suppose que X_1 et N admettent une espérance. Démontrer que $S \in L^1$ et que $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Correction. Calculons, en admettant que la somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k)$ soit potentiellement égale à $+\infty$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k, N=n)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N=n)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\mathbb{P}(N=n) \text{ par indépendance}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\mathbb{P}(N=n) \text{ car on somme une famille de termes positifs}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = k)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)n\mathbb{E}(X_1) \text{ car les } X_i \text{ suivent la même loi}\\ &= \mathbb{E}(X_1)\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)n\\ &= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(N).\end{aligned}$$

La somme $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(S=k)$ est donc finie, donc S admet une espérance, égale à $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N)$.

Exercice 11. ●●○ Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires de Rademacher iid.

1. Montrer $\quad \forall (t,\varepsilon) \in]0,+\infty[^2,\ \mathbb{P}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-tn\varepsilon}\,\mathrm{ch}^n\, t.$
2. Pour $t>0$, comparer $\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$ et $\mathrm{ch}\, t$.

3. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}$.

4. Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff.

Exercice 12. *Inégalité de Popoviciu.* ●●○ Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète telle que à valeurs dans $[a, b]$.

1. Démontrer que $\mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$

> **Correction.** On montre le résultat pour X à valeurs dans $[0,1]$: si c'est le cas, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X^2)$, car, X étant à valeurs dans $[0,1]$, $X^2(\omega) \leqslant X(\omega)$ pour tout ω dans Ω.
> Or, la fonction $x \mapsto x - x^2$ s'annule en 0 et en 1, et est maximale en $\frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$.
> Ensuite, si X est quelconque, on remarque que $Y = \frac{X-a}{b-a}$ est à valeurs dans $[0,1]$. Ainsi, $\mathbb{V}(Y) \leqslant \frac{1}{4}$, d'où
> $$\frac{1}{(b-a)^2}\mathbb{V}(X) \leqslant \frac{1}{4}, \text{ d'où } \mathbb{V}(X) \leqslant \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

2. Cette inégalité est-elle optimale ?

> **Correction.** Si X vérifie $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(X=b) = \frac{1}{2}$, alors $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{a^2+b^2}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$, donc il y a égalité.

Exercice 13. *Marches aléatoires : les bases.* ●●○ Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vaiid, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $Y_k = \frac{X_k+1}{2}$. Donner la loi de Y_k.

> **Correction.** Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Quand $X_k = -1$, $Y_k = 0$ et quand $X_k = 1$, $Y_k = 1$. Donc Y_k prend ses valeurs dans $\{0,1\}$ donc Y_k suit une loi de Bernoulli. Or,
> $$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$
> Donc $X_k \sim \mathscr{B}(1/2)$.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Donner la loi de T_n et en déduire celle de S_n. Donner l'espérance et la variance de S_n.

> **Correction.** Par la question précédente, T_n est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes donc suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$. Mais comme, par un simple calcul,
> $$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k+1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(X_k+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k + \frac{n}{2} = \frac{S_n+n}{2},$$
> on en déduit que $S_n = 2T_n - n$. Donc S_n prend ses valeurs dans $\{2k-n,\ k \in [\![0,n]\!]\}$ et pour tout k dans $[\![0,n]\!]$,
> $$\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$
> On déduit, par la formule $S_n = 2T_n - n$, et par linéarité de l'espérance, que
> $$\mathbb{E}(S_n) = 2\mathbb{E}(T_n) - n = 2n\frac{1}{2} - n = n - n = 0,$$

et que
$$\mathbb{V}(S_n) = 4\mathbb{V}(T_n) = 4n\frac{1}{2}\frac{1}{2} = n.$$

3. Déterminer en particulier un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

Correction. On en déduit que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$. Or, par l'équivalent de Stirling,
$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2}{\pi}2^{2n}W_{2n} \sim \frac{2}{\pi}2^{2n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}},$$
donc
$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

4. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Correction. Soit $\varepsilon > 0$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,
$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})^2},$$
i.e.
$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \leqslant \frac{n}{n^{1+2\varepsilon}} = \frac{1}{n^{2\varepsilon}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)$ converge, et donner sa limite.

Correction. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\sum_{k=1}^n \frac{tX_k}{\sqrt{n}}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}}}\right)^n \text{ par indépendance et car les } (X_k) \text{ suivent toutes la même loi} \\
&= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{-t}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right)^n \text{ par la formule de transfert} \\
&= \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\
&= e^{n\ln\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.
\end{aligned}$$
Or,
$$\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{t^2}{2n},$$
donc $n\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{t^2}{2}$, donc
$$\mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\frac{t^2}{2}}.$$

2 Probabilités, événements

Exercice 14. *Opérations ensemblistes.* ●○○ Soient A et B deux événements. Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Correction. On note $x = \mathbb{P}(A \setminus B)$, $y = \mathbb{P}(B \setminus A)$ et $z = \mathbb{P}(A \cap B)$. On a alors les équivalences suivantes
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &\Leftrightarrow (x + y + z)z \leqslant (x + z)(y + z) \\
&\Leftrightarrow xz + yz + z^2 \leqslant xy + yz + yz + z^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant xy,
\end{aligned}$$

ce qui est toujours vrai. D'où l'inégalité.

Exercice 15. *CCINP 2019*. Soit $(\mathrm{A}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathrm{T}, \mathbb{P})$. Montrer :

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathbb{P}(\mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{A}_n) + n - 1.$$

Correction. Pour l'inégalité de gauche, c'est du cours. On montre par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour toute famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements,

$$\mathbb{P}(\mathrm{A}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{A}_n) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A}_1) + \cdots + \mathbb{P}(\mathrm{A}_n).$$

L'initialisation est évidente. Pour l'hérédité, supposons la propriété vraie au rang n. Soient $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ $n+1$ événements. Alors, en notant $B = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}(B \cup A_{n+1}) \\
&= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}(B \cap A_{n+1}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\leqslant \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \text{ par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

D'où l'hérédité et le résultat.
Pour l'autre inégalité, on écrit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}) \\
&\geqslant 1 - \mathbb{P}(\overline{A_1}) - \cdots - \mathbb{P}(\overline{A_n}) \\
&\geqslant 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1)) - (1 - \mathbb{P}(A_2)) - \cdots - (1 - \mathbb{P}(A_n)) \\
&\geqslant 1 - n + \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n),
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de droite !

Exercice 16. *Loi de succession de Laplace*. ●●○ On considère $p+1$ urnes $U_0, \ldots, U_p$ en supposant que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $p-k$ boules noires. L'expérience consiste à choisir aléatoirement une urne puis à effectuer des tirages avec remise.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A_n défini par « les n-premiers tirages ont donné des boules blanches ».

Correction. On note X la variable aléatoire correspondant à l'urne choisie, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les variables de Bernoulli égales à 1 si la k-ième boule dirée est blanche, et 0 si elle est noire.
Comme $(X = i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ est un système complet d'événements, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{P}_{X=i}(A_n)\mathbb{P}(X = i) \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{P}_{X=i}(T_1 = 1, \ldots, T_n = 1)\frac{1}{p} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbb{P}_{X=i}(T_1 = 1) \ldots \mathbb{P}_{X=i}(T_n = 1)\frac{1}{p} \text{ par indépendance.} \\
&= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{i^n}{p^n}\frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{i=0}^{p-1} i^n.
\end{aligned}$$

2. Exprimer $\mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$ puis déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathbb{P}(A_{n+1} \mid A_n)$.

Correction. On en déduit que

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1} \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{\mathbb{P}(A_{n+1})}{\mathbb{P}(A_n)} = \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=0}^{p-1} i^{n+1}}{\sum_{i=0}^{p-1} i^n}.$$

Or, une comparaison à une intégrale montre que

$$\int_0^{p-1} t^n dt \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} i^n \leqslant \int_1^p t^n dt,$$

mais, comme les membres de gauche et de droite de l'inégalité sont équivalents à $\dfrac{p^{n+1}}{n+1}$, on en déduit que

$$\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}\frac{\frac{p^{n+2}}{n+2}}{\frac{p^{n+1}}{n+1}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n+2}.$$

Exercice 17. *Inégalité de Kosmanek.* ●●◐ Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer

$$\forall (\mathrm{A},\ \mathrm{B}) \in \mathscr{A}^2 \quad |\mathbb{P}(\mathrm{A})\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A}\cap \mathrm{B})| \leqslant \frac{1}{4}$$

puis préciser le cas d'égalité.

Correction. En suivant l'indication, on note

$$a = \mathbb{P}(A\cap B), b = \mathbb{P}(A\cap \overline{B}), c = \mathbb{P}(\overline{A}\cap B), d = \mathbb{P}(\overline{A}\cap \overline{B}).$$

On remarque que l'on peut écrire $\mathbb{P}(A) = a+b$, $\mathbb{P}(B) = a+c$. Ainsi, la quantité que l'on étudie est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) &= (a+b)(a+c) - a\\ &= a^2 + (b+c-1)a\\ &= a(a+b+c-1)\\ &= -ad\end{aligned}$$

Mais alors $d = \mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) \leqslant \mathbb{P}(\overline{A}\cup\overline{B}) = 1-a$, donc $ad \leqslant a(1-a) \leqslant \dfrac{1}{4}$, quelle que soit la valeur de a. D'où le résultat.

Exercice 18. *Le produit eulérien, version probabiliste.* ●●○ Pour $s > 1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda}{n^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application $\mathbb{P}$ définit-elle une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$?

Correction. Il faut et il suffit que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(\{n\}) = 1$, i.e. que $\lambda = \dfrac{1}{\zeta(s)}$, où $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$.

2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement $A_p = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p \mid n\}$. Exprimer simplement $\mathbb{P}(A_p)$.

Correction. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_p) &= \sum_{p|n}\frac{\lambda}{n^s}\\ &= \sum_{k\geqslant 1}\frac{\lambda}{(kp)^s}\\ &= \frac{1}{p^s}.\end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des nombres premiers. Vérifier que la famille $(A_p)_{p\in\mathcal{Q}}$ est constituée d'événements mutuellement indépendants.

Correction. On sait, par le théorème de Gauss, que si $p_1, \dots, p_n$ sont n nombres premiers deux à deux distincts, on a

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{p_k} = A_{p_1\times\cdots\times p_n}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{p_k}\right) &= \mathbb{P}(A_{p_1\times\cdots\times p_n}) \\ &= \frac{1}{(p_1\times\cdots\times p_n)^s} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k^s} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_{p_k}),\end{aligned}$$

d'où l'indépendance mutuelle.

4. En étudiant $\mathbb{P}(\{1\})$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p\in\mathcal{Q}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)}.$$

Correction. On sait que 1 est le seul nombre divisible par aucun nombre premier. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{1\}) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p\in\mathcal{Q}}\overline{A_p}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{p\in\mathcal{Q}\\ p\leqslant n}}\overline{A_p}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{\substack{p\in\mathcal{Q}\\ p\leqslant n}}\mathbb{P}(\overline{A_p}) \text{ par indépendance.} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\prod_{\substack{p\in\mathcal{Q}\\ p\leqslant n}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathcal{Q}}\left(1-\frac{1}{p^s}\right),\end{aligned}$$

d'où le résultat car $\mathbb{P}(\{1\}) = \lambda$.

Exercice 19. *Urne de Polya.* ●●○ Soient b, r, c dans $\mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. On tire une boule que l'on remet dans l'urne en ajoutant c boules de la même couleur. On répète cette opération. Notons A_n l'événement « le n-ième tirage amène une boule blanche ». On a : $\mathbf{P}(A_1) = \frac{b}{b+r}$. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{b}{b+r}.$$

3 Lois de variables aléatoires

Exercice 20. *Mines-Télécom PC 2015.* Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Comparer les événements (X prend une valeur paire) et (X prend une valeur impaire).

Correction. $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$. Soit Pr l'événement « X paire » et $\mathcal{I}$ l'événement « X impaire ».

$$\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k\geqslant 0}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{ch}(\lambda) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2},$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{I}) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}.$$

Pour tout $\lambda > 0$: $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) > \mathbb{P}(\mathcal{I})$. Mais pour λ grand, $\mathbb{P}(\mathrm{Pr}) \sim \mathbb{P}(\mathcal{I}) \sim 1/2$.

Exercice 21. *CCINP 2023*. Soit une urne avec 3 jetons numérotés. On tire avec remise des jetons de l'urne. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaire pour obtenir 2 jetons différents pour la première fois. On note Z la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 jetons pour la première fois.

1. Donner la loi de Y.

Correction. On suppose les deux jetons numérotés 1, 2 et 3. On note, pour k dans $\mathbb{N}^*$, X_k la variable uniforme sur $\{1,2,3\}$ correspondant au chiffre du k-ième tirage. Alors, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}&\{Y=n\}\\&= (X_1=1, X_2=1, \dots, X_{n-1}=1, X_n \neq 1) \qquad \sqcup (X_1=2, X_2=2, \dots, X_{n-1}=2, X_n \neq 2)\\&\sqcup (X_1=3, X_2=3, \dots, X_{n-1}=3, X_n \neq 3)\end{aligned}$$

Donc Y est à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(Y=n) = 3 \times \frac{1}{3^{n-1}} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{n-2}}.$$

2. Reconnaitre la loi de $Y-1$. En déduire la variance et l'espérance de Y.

Correction. On remarque que $Y-1 \sim \mathcal{G}(2/3)$: en effet, Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Y-1=n) = \mathbb{P}(Y=n+1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Donc $\mathbb{E}(Y-1) = \dfrac{1}{2/3} = \dfrac{3}{2}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \dfrac{5}{2}}$, et $\mathbb{V}(Y-1) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{1/3}{(2/3)^2} = \dfrac{3}{4}$ donc $\boxed{\mathbb{V}(Y) = \dfrac{3}{4}}$.

3. Déterminer la loi de (Y,Z).

Correction. Déjà, (Y,Z) sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$:

- si $k \leqslant 1$ ou $n \leqslant 2$ ou $n \leqslant k$, $\mathbb{P}(Y,Z) = 0$ (situations impossibles)
- sinon, si $2 \leqslant k < n$, alors

$$\mathbb{P}_{Y=k}(Z=n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3}$$

(obtenir le troisième chiffre à l'instant n en sachant qu'on en a déjà obtenu 2 à l'instant k, c'est faire $n-k-1$ tirages des deux chiffres déjà tirés $(2/3)^{n-k-1}$ puis de tirer le troisième chiffre $(1/3)$) Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k, Z=n) &= \mathbb{P}(Y=k)\mathbb{P}_{Y=k}(Z=n)\\&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{k-2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1} \frac{1}{3}\\&= \frac{1}{3^k} \frac{2^{n-k}}{3^{n-k-1}}\\&= \frac{2^{n-k}}{3^{n-1}}\end{aligned}$$

4. Donner enfin la loi de Z.

Correction. On en déduit la loi de Z car $\{(Y=k),\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}\}$ est un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=n) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=k,Z=n)\\ &= \sum_{k=2}^{n-1}\mathbb{P}(Y=k,Z=n)\\ &= \sum_{k=2}^{n-1}\frac{2^{n-k}}{3^{n-1}}\\ &= \frac{2^n}{3^{n-1}}\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\ &= \frac{2^n}{3^{n-1}}\frac{1}{4}\frac{1-\frac{1}{2^{n-2}}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \frac{2^n}{3^{n-1}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{2}{3^{n-1}}.\end{aligned}$$

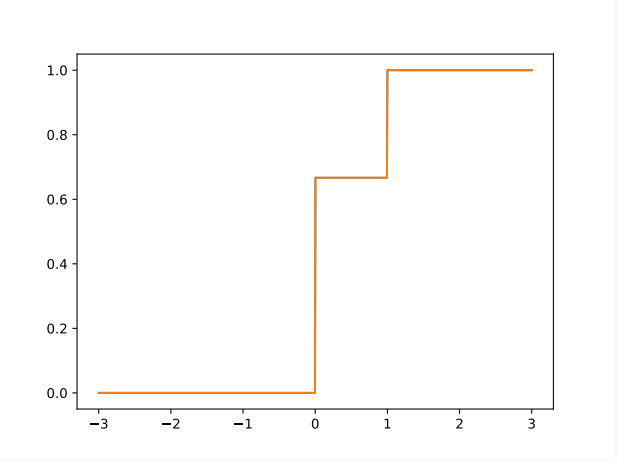
Exercice 22. *Fonction de répartition.* ●●○ Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition la fonction $F_X : t\mapsto\mathbb{P}(X\leqslant t)$.

1. Représenter les fonctions de répartition d'une loi de Bernoulli, binomiale.

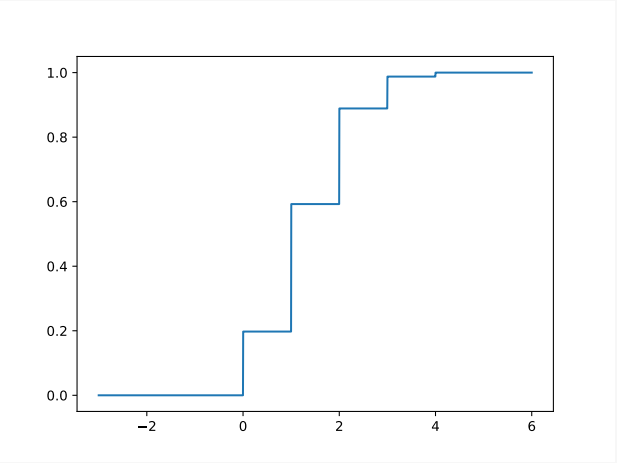
Correction. Si $X\sim\mathcal{B}(p)$, on remarque que :

- si $t<0$, $F_X(t)=0$,
- si $0\leqslant t<1$, $F_X(t)=\mathbb{P}(X=0)=1-p$,
- si $t\geqslant 1$, $F_X(t)=1$.

On obtient donc le graphe (pour $p=1/3$ ici) :



On fait pareil pour la binomiale, en découpant sur les intervalles $[k,k+1[$: si $t\in[k,k+1[$, $F_X(t)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}$. On obtient donc, pour $n=4$ et $p=1/3$,



2. Soient $p \in]0,1[$ et une variable aléatoire X telle que $X \sim \mathscr{G}(p)$.

(a) Déterminer F_X.

Correction. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :

- si $t < 1$, $\mathbb{P}(X \leqslant t) = 0$,
- sinon, si $k \in \mathbb{N}^*$ est tel que $t \in [k, k+1[$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant t) &= \mathbb{P}(X \leqslant k)\\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i)\\ &= \sum_{i=1}^{k} pq^{i-1} \text{ en posant } q = 1-p\\ &= p\frac{1-q^k}{1-q} = 1-q^k.\end{aligned}$$

(b) Retrouver le fait que la loi géométrique est une loi sans mémoire.

Correction. Ainsi, $\mathbb{P}(X > k) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant k)q^k$, ce qui permet de retrouver ce résultat de cours.

3. Soient $\lambda > 0$ et une variable aléatoire Y telle que $Y \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_Y(n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx$$

Correction. On démontre le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, $F_Y(0) = \mathbb{P}(Y \leqslant 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = \displaystyle\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}dx$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $F_Y(n) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx$. Alors

$$\begin{aligned}F_Y(n+1) &= \mathbb{P}(Y \leqslant n+1)\\ &= \mathbb{P}(Y \leqslant n) + \mathbb{P}(Y = n+1)\\ &= \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx + \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Dans l'intégrale, on fait une IPP en dérivant $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et en intégrant $x \mapsto x^n$ en $\dfrac{x}{\mapsto} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi, comme le crochet $[\mathrm{e}^{-x}x^{n+1}/(n+1)]_\lambda^{+\infty}$ converge,

$$\int_\lambda^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx = \left[\mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_\lambda^{+\infty} + \int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}dx,$$

ce qui suffit à conclure la récurrence.

4. Soient $(X_n)_n$ et X des variables aléatoires réelles discrètes telles que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour x point de continuité de $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$, montrer que

$$F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$$

Correction. Soit x un point de continuité de F_X. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que pour tout y dans $[x-\delta, x+\delta]$, on ait $|F_X(x) - F_X(y)| \leqslant \varepsilon$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \delta) \leqslant \varepsilon$. On écrit alors que

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \\ &= \mathbb{P}(X_n \leqslant x, |X_n - X| < \delta) + \mathbb{P}(X_n \leqslant x, |X_n - X| \geqslant \delta) \\ &\leqslant \mathbb{P}(X_n \leqslant x, |X_n - X| < \delta) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Or,

$$\{X_n \leqslant x, |X_n - X| < \delta\} \subset \{X_n \leqslant x, X < X_n + \delta\} \subset \{X \leqslant x + \delta\}.$$

Ceci assure que $F_{X_n}(x) \leqslant \mathbb{F}_X(x+\delta) + \varepsilon$.
De même, on peut écrire que

$$F_X(x-\delta) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x - \delta, |X_n - X| < \delta) + \varepsilon,$$

pour $n \geqslant N$. Il vient alors, comme

$$\{X \leqslant x - \delta, |X_n - X| < \delta\} \subset \{X_n \leqslant x\},$$

d'où

$$F_X(x-\delta) - \varepsilon \leqslant \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = F_{X_n}(x).$$

Ceci assure que, pour $n \geqslant N$,

$$F_X(x-\delta) - \varepsilon \leqslant F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x+\delta) + \varepsilon,$$

et donc que

$$F_X(x-\delta) - F_X(x) - \varepsilon \leqslant F_{X_n}(x) - F_X(x) \leqslant F_X(x+\delta) - F_X(x) + \varepsilon,$$

donc, comme $|F_X(x-\delta) - F_X(x)| \leqslant \varepsilon$ et $|F_X(x+\delta) - F_X(x)| \leqslant \varepsilon$,

$$|F_X(x) - F_{X_n}(x)| \leqslant 2\varepsilon.$$

La convergence est donc démontrée.

Exercice 23. *Une caractérisation de la loi de Poisson via les processus composés.* ●●○ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vaiid, telles que $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $A = X_1 + \cdots + X_N$ et $B = N - A$.

1. Montrer que A et B sont des variables aléatoires discrètes.

2. On suppose que $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Montrer qu'alors A et B sont indépendantes.

3. Réciproquement, on suppose A et B indépendantes. En écrivant $\mathbb{P}(N = i+j)$ sous la forme $\dfrac{a_i b_j}{(i+j)!}$, et en montrant que (a_i) est une suite géométrique, démontrer qu'il existe λ tel que $N \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Exercice 24. *Probabilité d'être nilpotente.* ●●○ Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. On note A la matrice aléatoire réelle définie par $\forall \omega \in \Omega \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) \\ -Y(\omega) & -Y(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathbb{P}(A \text{ est nilpotente.})$.

Correction. Soit $\omega \in \Omega$. On sait que $A(\omega)$ est nilpotente si et seulement si $A(\omega)^2 = 0$. Or,

$$A(\omega)^2 = \begin{pmatrix} X(\omega)^2 - X(\omega)Y(\omega) & X(\omega)^2 - X(\omega)Y(\omega) \\ -X(\omega)Y(\omega) + Y(\omega)^2 & -X(\omega)Y(\omega) + Y(\omega)^2 \end{pmatrix}$$

Or, $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ ne sont jamais nuls car X et Y sont géométriques. Ainsi, $A(\omega)^2 = 0$ si, et seulement si $X(\omega) = Y(\omega)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^2 = 0_2) &= \mathbb{P}(X = Y) \\
&= \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(X = Y, Y = k) \text{ car } (Y = k)_{k \in \mathbb{N}^*} \text{ est un système complet d'événements} \\
&= \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(X = k, Y = k) \\
&= \sum_{k \geqslant 1} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k) \text{ par indépdendance} \\
&= \sum_{k \geqslant 1} pq^{k-1} pq^{k-1} \text{ en notant } q = 1 - p \\
&= p^2 \sum_{k \geqslant 1} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \frac{1}{1 - q^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 25. *Minimum, maximum de géométriques.* ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$, $p \in]0, 1[$. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables géométriques iid de même paramètre p.

1. Déterminer la loi de $\min(X_1, \dots, X_n)$ et de $\max(X_1, \dots, X_n)$.

Correction. Notons $U = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $V = \max(X_1, \dots, X_n)$. Ces deux variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \geqslant k) &= \mathbb{P}(X_1 \geqslant k, X_2 \geqslant k, \dots, X_n \geqslant k) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geqslant k) \text{ par indépendance} \\
&= \prod_{i=1}^{n} p^{k-1} \\
&= ((1-p)^n)^{k-1}
\end{aligned}$$

Donc, en notant $a = (1-p)^n$, on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geqslant k) - \mathbb{P}(U \geqslant k+1) = a^{k-1} - a^k = a^{k-1}(1-a),$$

donc $U \sim \mathscr{G}(1-(1-p)^n)$.
Ensuite, en notant $V = \max(X_1, \dots, X_n)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V \leqslant k) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, \dots, X_n \leqslant k) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant k)^n \text{ par indépendance.} \\
&= (1 - \mathbb{P}(X_1 > k))^n \\
&= (1 - (1-p)^k)^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(V \leqslant k) - \mathbb{P}(V \leqslant k-1) = (1-(1-p)^k)^n - (1-(1-p)^{k-1})^n$, qui n'est pas particulièrement simplifiable.

2. Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$, $U = \min(X, Y)$ et $V = |Y - X|$. Montrer que U et V sont indépendantes, déterminer leurs lois.

Correction. On a déjà établi la loi de U. On sait que V est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V=0) &= \mathbb{P}(X=Y)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=Y,Y=k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,Y=k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k) \text{ par indépendance.}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}p^2(1-p)^{2k-2}\\ &= p^2\frac{1}{1-(1-p)^2}.\end{aligned}$$

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V=k) &= \mathbb{P}(|Y-X|=k)\\ &= \mathbb{P}(Y=X+k)+\mathbb{P}(X=Y+k)\\ &= 2\mathbb{P}(Y=X+k)\\ &= 2\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=X+k,X=i)\\ &= 2\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=i+k)\mathbb{P}(X=i)\\ &= 2\sum_{i=1}^{+\infty}p(1-p)^{i+k-1}p(1-p)^{i}\\ &= 2p^2(1-p)^{k-1}\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{2i}\\ &= 2p^2(1-p)^{k}\frac{1}{1-(1-p)^2}\end{aligned}$$

Ensuite, si $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=i,V=j) &= \mathbb{P}(\min(X,Y)=i,|Y-X|=j)\\ &= \mathbb{P}(\{X=i,Y=i+j\}\cup\{X=i+j,Y=i\})\\ &= \begin{cases}\mathbb{P}(X=i,Y=i) & \text{si } j=0\\ 2\mathbb{P}(X=i,Y=i+j) & \text{sinon.}\end{cases}\\ &= \begin{cases}p^2q^{2i-2} & \text{si } j=0\\ 2pq^{i-1}pq^{i+j-1}=2p^2q^{2i+j-2} & \text{sinon, en notant } q=1-p.\end{cases}\end{aligned}$$

Or, si $i\neq 0$ et $j\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(U=i)\mathbb{P}(V=j) = \begin{cases}(q^2)^{i-1}(1-q^2)p^2\dfrac{1}{1-q^2} & = p^2q^{2i-2} \text{ si } j=0\\ (q^2)^{i-1}(1-q^2)2p^2q^j\dfrac{1}{1-q^2} & \\ & = 2p^2q^{2i+j-2} \text{ si } j\neq 0\end{cases}$$

D'où l'indépendance des variables U et V.

Exercice 26. *Un jeu de pile ou face à deux.* ●●○ Deux joueuses jouent avec des pièces équilibrées. Elles lancent chacun n fois une pièce. Celle qui gagne est celle qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y

ait une gagnante ?

Exercice 27. *Loi des séries.* ●●● Soient $p \in]0,1[$ et une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de v.a.d. indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, portées par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_r = \inf\{n \geqslant r \mid X_{n-r+1} = \cdots = X_n = 1\}$ avec, comme convention, $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Que représente T_r ?
2. Montrer que T_r est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
3. Prouver que pour tous $n, r \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(T_r = n + r + 1) = (1-p)p^r\mathbb{P}(T_r > n)$.
4. Montrer que T_r est presque sûrement finie et calculer son espérance.

Correction. Utiliser la formule de l'espérance à l'aide des $\mathbb{P}(T_r > n)$.

4 Moments d'une variable aléatoire

Exercice 28. *Mines-Télécom 24.* Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k) = \dfrac{1+a^k}{4k!}$.

1. Déterminer la valeur de a.

Correction. On sait que l'on doit avoir $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) = 1$. Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X=k) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+a^k}{4k!} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!} \\ &= \frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^a}{4}.\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^a}{4} = 1$, i.e. $\mathrm{e}^a = 4 - \mathrm{e}$, donc $\boxed{a = \ln(4-\mathrm{e})}$.

2. Déterminer l'espérance de X.

Correction. On calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k\geqslant 0} k\mathbb{P}(X=k) \\ &= \sum_{k\geqslant 1} k\frac{1+a^k}{4k!} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k-1)!} + a\sum_{k\geqslant 1}\frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\boxed{= \frac{\mathrm{e}+a\mathrm{e}^a}{4}}.\end{aligned}$$

3. Déterminer la loi de $X+Y$.

Correction. La variable $X+Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Comme $\{(X=k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ est un système

complet d'événements,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, X+Y=n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=n-k) \text{ car } Y \text{ est à valeurs dans } \mathbb{N} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1+a^k}{4k!}\frac{1+a^{n-k}}{4(n-k)!} \\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{n} \frac{1+a^k+a^{n-k}+a^n}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{16n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1+a^k+a^{n-k}+a^n) \\
&= \frac{1+a^n}{16n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \frac{1}{16n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k + \frac{1}{16n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k} \\
&= \frac{(1+a^n)2^n}{16n!} + \frac{2}{16n!}(1+a)^n
\end{aligned}$$

Exercice 29. *Une caractérisation des Rademacher*. ●○○ Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et X variable aléatoire réelle discrète ayant un moment d'ordre 4 et vérifiant $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) = 1$.

1. Montrer que $|\mathbb{E}(X)| \leqslant 1$.

Correction. Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X\times 1)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(1)^2 = \mathbb{E}(X^2) = 1,$$

d'où le résultat recherché.

2. Déterminer la loi de X.

Correction. On a $\mathbb{E}(X^2 - X^4) = 0$, donc $\mathbb{E}(X^2(1-X^2)) = 0$.

Exercice 30. *Espérance de* $1/(1+X)$. ●○○ Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$ lorsque $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, puis lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Comparer avec $\frac{1}{1+\mathbb{E}(X)}$.

Exercice 31. *Espérance conditionnelle*. ●●○ Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence :

$$\mathbb{E}(X \mid A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x \mid A)$$

1. Montrer que si X admet une espérance finie, alors $\mathbb{E}(X \mid A)$ est bien définie.

2. Prouver alors que $\mathbb{E}(X \mid A) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbb{P}(A)}$.

3. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ où $p \in]0,1[$, calculer $\mathbb{E}(X \mid X > m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

4. Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système (quasi-)complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)\,\mathbb{E}(X \mid A_k)$.

5. *Application : identité de Wald.* Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $N, X_1, X_2, \ldots$ soient mutuellement indépendantes. On suppose que N et X_1 sont d'espérance finie et on pose $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Retrouver la formule $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\,\mathbb{E}(X_1)$ à l'aide de la question précédente.

Exercice 32. *Médianes d'une variable aléatoire.* ●●○ Si X est une v.a.d. réelle, on appelle médiane de X tout nombre réel m tel que $\mathbb{P}(X \geqslant m)$ et $\mathbb{P}(X \leqslant m)$ soient supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$.

1. Montrer que l'ensemble des médianes $\mathcal{M}$ de X est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Vérifier que c'est même un segment de $\mathbb{R}$.

> **Correction.** On revient à la définition d'un intervalle : I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tous a et b dans I, $[a,b] \subset \mathrm{I}$.
> Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, $a<b$. Soit $c \in [a,b]$. On sait que
> $$\mathbb{P}(X \geqslant c) \geqslant \mathbb{P}(X \geqslant b) \geqslant \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X \leqslant c) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant a) \geqslant \frac{1}{2},$$
> donc c est une médiane de X. Pour que l'ensemble des médianes soit un singleton, il faut que pour tout $x > a$, $\mathbb{P}(X \geqslant x) < \frac{1}{2}$

2. Montrer que $\mathcal{M}$ n'est pas réduit à un point si et seulement s'il existe des réels $a<b$ tels que $\mathbb{P}(X \leqslant a) = \mathbb{P}(X \geqslant b) = \frac{1}{2}$, et qu'on a alors $\mathcal{M} = [a,b]$.
3. ●●● Lorsque X est d'espérance finie, montrer qu'un réel m est une médiane de X si et seulement si $t \mapsto \mathbb{E}(|X-t|)$ est minimale en m.

Exercice 33. *Inégalité de Paley-Zygmund.* ●●○ Soient X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle $\mathbb{E}(X^2) > 0$ et $\eta \in [0,1]$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X))$.

> **Correction.** On applique l'inégalité de Cauchy-Scwharz et on trouve que
> $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}\right)^2 &\leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right) \mathbb{E}\left(\mathbb{1}^2_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}\right) \\ &\leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)).\end{aligned}$$

2. En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund : $P(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)) \geqslant (1-\eta)^2 \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

> **Correction.** On en déduit que
> $$\mathbb{P}(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)) \geqslant \frac{\mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}\right)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$
> Or,
> $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}) + \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \leqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}) \leqslant \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}) + \eta \mathbb{E}(X),$$
> donc
> $$(1-\eta)\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)\}}),$$
> donc
> $$(1-\eta)^2 \mathbb{E}(X)^2 \leqslant\leqslant \mathbb{E}(X^2)\mathbb{P}(X \geqslant \eta \mathbb{E}(X)),$$
> d'où le résultat.

Exercice 34. *Inégalité de Jensen pour l'espérance.* ●●○ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle telle que X et $f(X)$ admettent une espérance finie.
Montrer $f(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(f(X))$...

1. ... dans le cas où $X(\Omega)$ est fini
2. ... dans le cas où X est discrète et f est dérivable

Exercice 35. ●●○ Une urne contient n billes numérotées de 1 à n. On saisit une poignée de billes et on note X la somme des numéros des billes. En supposant que toutes les poignées sont équiprobables, que vaut $\mathbb{E}(X)$?

Exercice 36. *Corrélation et régression.* ●●○ Soient X et Y des variables aléatoires réelles admettant un moment d'ordre 2, de variances non nulles, et $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

1. Montrer que $|\rho| \leqslant 1$ et étudier le cas d'égalité.

2. Déterminer $\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \mathbb{E}\big((Y-aX-b)^2\big)$ en fonction de $\mathbb{V}(Y)$ et ρ.

3. Soient $X_1,\dots,X_n$ i.i.d. de variance non nulle et $S_k = X_1+\cdots+X_k$. Calculer $\rho(S_m,S_n)$ pour $m\leqslant n$.

Exercice 37. *Formule de Wald pour la variance.* ●●○ On reprend les notations de l'exercice 10. On suppose que X_1 et N admettent une variance. Démontrer que $S\in L^2$ et que $\mathbb{V}(S)=\mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(N)\mathbb{E}(X_1)^2$.

Correction. Comme X_1 est centrée, S aussi, donc, si elle existe, $\mathbb{V}(S)=\mathbb{E}(S^2)$. On calcule donc, ar la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(S=k,N=n)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}X_i=k^2,N=n)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}X_i=k^2)\mathbb{P}(N=n) \text{ par indépendance}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}X_i=k^2)\mathbb{P}(N=n) \text{ car on somme une famille de termes positifs}\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n}X_i=k^2)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)=\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right),$$

car $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=0$ (les variables sont centrées). Or, par indépendance, $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)=n\mathbb{V}(X_1)$. Ainsi,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k^2\mathbb{P}(S=k)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(N=n)n\mathbb{V}(X_1)=\mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1).$$

La série de terme général $k^2\mathbb{P}(S=k)$ converge donc. Ainsi, S possède une variance, égale à $\mathbb{E}(N)\mathbb{V}(X_1)$.

Exercice 38. *Inégalité de Popoviciu raffinée.* ●●◐ Soit X une v.a.d. à valeurs dans $[a,b]$ d'espérance m.

1. Montrer que $\mathbb{V}(X)\leqslant(m-a)(b-m)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Correction. C'est essentiellement une autre formulation de celle des « exercices classiques ». Cependant, on ne peut pas facilement renormaliser. On remarque plutôt que, X étant à valeurs dans $[a,b]$, on a $(X(\omega)-a)(b-X(\omega))\geqslant 0$ pour tout ω dans Ω. Ainsi, $\mathbb{E}((X-a)(b-X))\geqslant 0$, ce qui assure que

$$\mathbb{E}(-X^2+(a+b)X-ab)\geqslant 0,$$

2. Si $m\in[a,b]$, exhiber une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$ d'espérance m et de variance $(m-a)(b-m)$. Quelle est la variance maximale d'une v.a.d. à valeurs dans $[a,b]$?

Exercice 39. *Espérance d'un quotient (2).* ●●◐

1. Soient X et Y deux v.a.d. indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, $Z=\dfrac{Y}{X}$. Montrer que $\mathbb{E}(Z)\geqslant 1$ et caractériser l'égalité.

2. Montrer que le résultat de la question précédente subsiste sans hypothèse d'indépendance. On pourra commencer par le cas où $\ln(X)$ est d'espérance finie et utiliser $\ln(Z)\leqslant Z-1$.

Exercice 40. ●●●

1. Soit X une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

Soit une variable aléatoire X et une suite de variables aléatoires (X_n), toutes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs réelles positives.

2. À l'aide de la variable $\lceil X \rceil$, montrer que $0 \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

3. On suppose que X_0 est d'espérance finie et que pour tout $\omega \in \Omega$, $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle. Au moyen d'un découpage judicieux, montrer que $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. On suppose que pour tout $\omega \in \Omega$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$, et que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n) < +\infty$. Montrer que X est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 41. *Inégalité de Hoeffding pour des variables symétriquement bornées.* ●●●

1. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\mathrm{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}$.

2. Soit X une variable aléatoire telle que $|X| \leqslant 1$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et que

$$\mathbb{E}(\exp(tX)) \leqslant \mathrm{ch}t \leqslant \exp\left(t^2/2\right).$$

3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que $|X_i| \leqslant a_i$ pour tout i. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Montrer que

$$\mathbb{E}(\exp(tS_n)) \leqslant \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right),$$

puis que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > 0$, $\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)$.

4. En choisissant une bonne valeur de t, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n > \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right).$$

5. Commenter le résultat de la première question.

5 Modélisation et applications à d'autres domaines des maths

Exercice 42. *Transmission d'informations.* ●○○ On donne une information I à une permière personne, qui doit la transmettre à une autre, etc. Chaque personne donne l'information reçue avec une probabilité $p \in]0, 1[$ ou en donne le contraire avec une probabilité $1 - p$.
On note p_n la probabilité que la personne n donne l'information I.

1. Calculer p_1 et p_2.

> **Correction.** Par définition $p_1 = p$ (probabilité de transmettre l'information I).
> Ensuite, pour que la deuxième personne transmettre l'information, il faut ou bien que la personne 1 transmette bien l'information et que la personne 2 transmette la même information (probabilité p^2), ou bien que la personne 1 transmette la mauvaise l'information (probabilité $1-p$) et que la personne 2 transmette l'information contraire de la personne 1 (probabilité $1-p$), d'où, au total, $p_2 = p^2 + (1-p)^2$.

2. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n puis exprimer p_n en fonction de n. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de p_n.

Correction. La modélisation, c'est vraiment nul. On va noter X_k la variable indicatrice de l'événement « la personne k donne l'information I ».
On sait que, pour n dans $\mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1}=1) \\ &= \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=0) \\ &= pp_n+(1-p)(1-p_n) \\ &= (2p-1)p_n+(1-p). \end{aligned}$$

Ainsi, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
Sinon, on cherche c vérifiant $c=(2p-1)c+1-p$, i.e. $2(1-p)c=1-p$, ou encore $c=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, on sait que

$$p_n-c=(2p-1)^n(p_0-c), i.e. p_n=c+(2p-1)^n(p_0-c).$$

On en déduit, comme $|2p-1|<1$, que $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$, ce qui signifie qu'au bout d'un grand nombre de personnes, l'information est « mélangée » : il y a une chance sur deux que l'information I soit correctement transmise.

Exercice 43. *CCINP MP 2015*. Une secrétaire effectue un appel téléphonique vers n correspondants. Lors d'un appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est $p\in]0,1[$. Les appels sont des événements mutuellement indépendants. Soit X la variable aléatoire du nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X.

2. La secrétaire rappelle les $n-X$ correspondants non joints. On nomme Y le nombre de correspondants joints lors de la seconde tentative.
(i) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y=k|X=i)$.
(ii) Montrer que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale, en donner les caractéristiques.
(iii) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Correction.

1. X est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p, donc $X\sim\mathscr{B}(n,p)$: $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (i) Si i personnes ont été appelées, il en reste $n-i$, d'où $Y|X=i$ suit une binomiale de paramètres $(n-i,p)$, donc $\mathbb{P}(Y=k|X=i)=\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}$.

(ii) On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i|X=i) \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^k(1-p)^{2n-k-i}. \end{aligned}$$

Or $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}=\binom{n}{k}\binom{k}{i}$, donc en sommant

$$\mathbb{P}(Z=k)=\binom{n}{k}\left(1-(1-p)^2\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}.$$

Donc $Z\sim\mathscr{B}(n,1-(1-p)^2)=\mathscr{B}(n,2p-p^2)$.

(iii) $\mathbb{E}(Z)=n(2p-p^2)$ et $\mathbb{V}(Z)=n(2p-p^2)(1-(2p-p^2))$.

Exercice 44. *Mines-Ponts MP 2026*. Soient $X_1\dots X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U=\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots \\ X_n\end{pmatrix}$ et $M=UU^\top$.

1. Déterminer la loi de $\mathrm{tr}(M)$ et la loi de $\mathrm{rang}(M)$.

Correction. **Trace.** On sait que $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}(n,p)$ car c'est une somme de n variables de Bernoulli iid.
Rang. On sait que toute matrice de la forme $U^\top V$ est de rang inférieur ou égal à 1. Donc $\mathrm{rg}(M) = 0$ ou 1. Or, M est de rang 0 si et seulement si $M = 0$, i.e. si et seulement si tous les coefficients de U sont nuls. Donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{rg}(M) = 0) = \mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^n,$$

par indépendance. Donc $\mathrm{rg}(M)$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

Correction. Deuxième chose importante sur les matrices de rang 1 : elles vérifient $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$. On le vérifie ici :

$$M^2 = U^\top \underbrace{UU^\top}_{\in\mathbb{R}} U = U^\top (UU^\top) U = (UU^\top) M = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) M.$$

Donc $M^2 = M$ si et seulement si :

(a) ou bien touts les X_i sont nuls,

(b) ou bien un seul des X_i est non nul :

$$\mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_2 = \cdots = X_n = 0) = p(1-p)^{n-1},$$

et les événements $(\{X_i \neq 0\} \cap \{\forall j \neq i,\ X_j = 0\})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont disjoints, donc la probabilité qu'un seul des X_i soit non nul est de $np(1-p)^{n-1}$.

D'où, au final, une probabilité de

$$(1-p)^n + np(1-p)^{n-1} = (1+(n-1)p)(1-p)^{n-1}.$$

3. Dans cette question, $n = 2$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $S = V^\top MV$. Calculer $\mathbb{E}(S)$, $\mathbb{V}(S)$.

Correction. On calcule

$$V^\top MV = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 + X_1X_2 \\ X_1X_2 + X_2 \end{pmatrix} = X_1 + 2X_1X_2 + X_2.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + 2\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_2) = p + 2p^2 + p = 2p(p+1).$$

De plus,

$$S^2 = X_1^2 + 4X_1^2X_2^2 + X_2^2 + 2X_1 2X_1X_2 + 2X_1X_2 + 2X_1X_2X_2 = X_1 + X_2 + 14X_1X_2$$

Ainsi, $\mathbb{E}(S^2) = 2p + 14p^2$, donc

$$\mathbb{V}(S) = 2p + 12p^2 - 4p^2(p^2 + 2p + 1) = 2p + 10p^2 - 8p^3 - 4p^4.$$

Exercice 45. *Coefficients d'une matrice aléatoire.* ●○○ Les coefficients d'une matrice aléatoire $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont indépendants et suivent tous une loi de Bernoulli de parametre $p \in [0,1]$.

1. Donner la loi de $\mathrm{tr}(M)$ et l'espérance de $\mathrm{tr}(M)^2$.

2. Les coefficients de M^2 sont-ils indépendants ?

Exercice 46. *Déterminants aléatoires, d'après Centrale MP 2021.* ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une suite de n^2

variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

et $D = \det(A)$. On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance.

1. Démontrer que $\mathbb{E}(D) = \det(M)$ où $M = (\mathbb{E}(X_{ij}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Correction. On sait que $D = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}$, donc par linéarité de l'espérance, que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}) \text{ par indépendance.} \\ &= \det(\mathbb{E}(X_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}). \end{aligned}$$

On suppose désormais que pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]$, X_{ij} est centrée réduite.

2. Soit σ et τ deux permutations de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma \neq \tau \\ 1 \text{ si } \sigma = \tau \end{cases}$$

Correction. Par la formule de Koening-Huygens pour la covariance,

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) - \mathbb{E}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right)\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right)\right).$$

Or, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}) = 0,$$

car les variables sont centrées. De même, $\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = 0$. Enfin, si $\sigma = \tau$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}^2\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}^2) = 1, \end{aligned}$$

car $X_{\sigma(i),i}$ est centrée réduite. Ensuite, si $\sigma \neq \tau$, on dispose de i_0 tel que $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) &= \mathbb{E}\left(X_{\sigma(i_0),i_0} \times \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_0}} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X_{\sigma(i_0),i_0}\right) \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_0}} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right), \end{aligned}$$

par indépendance de $X_{\sigma(i_0),i_0}$ avec $\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}$, donc, comme $X_{\sigma(i),i}$ est centrée,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = 0.$$

3. En déduire que la variance de D est égale à $n!$

Correction. On vient de démontrer que les variables aléatoires $\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right)_{\sigma\in\mathcal{S}_n}$ sont non corrélées, donc

$$\mathbb{V}(D) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{V}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{V}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} 1 = n!$$

4. Soit $\alpha > 0$. Démontrer que $\mathbb{P}(|D| \geqslant \alpha\sqrt{n!}) \leqslant \dfrac{1}{\alpha^2}$.

Correction. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\mathbb{P}(|D| \geqslant \alpha\sqrt{n!}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(D)}{\alpha^2 n!} = \frac{1}{\alpha^2},$$

5. Démontrer qu'il existe une matrice M à coefficients dans $\{-1,1\}$ et vérifiant $|\det(M)| \geqslant \sqrt{n!}$.

Correction. On suppose dans cette question que pour tout i et j, X_{ij} est une variable de Rademacher. On sait, par le calcul de la variance, que $\mathbb{E}(D^2) = n!$. Ainsi, il existe au moins un ω dans Ω tel que $D(\omega)^2 \geqslant n!$, i.e. $|D| \geqslant \sqrt{n!}$.
Si on n'avait jamais inégalité stricte, alors pour tout ω dans Ω, on aurait $|D(\omega)| = \sqrt{n!}$, ce qui est faut, car D est nul avec une probabilité non nulle. Donc il existe ω dans Ω tel que $|D(\omega)| \geqslant \sqrt{n!}$. Donc il existe M à coefficients dans $\{-1,1\}$ telle que $|\det(M)| \geqslant \sqrt{n!}$ (et même, quitte à multiplier une ligne par -1, telle que $\det(M) \geqslant \sqrt{n!}$.)

Exercice 47. *Permutations aléatoires, d'après Centrale MP 2019*. ●●○ Soit n dans $\mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On apppelle $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![0, n-1]\!]$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$

- on dit que $k \in [\![0, n-1]\!]$ est un point fixe de σ si $\sigma(k) = k$.
- on dit que σ est un dérangement si σ n'admet pas de point fixe.

Soit σ une variable aléatoire uniforme sur $\mathcal{S}_n$. Soient $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ les variables aléatoires indicatrices des événements « $\sigma(k) = k$ », soit N_n la variable aléatoire du nombre de points fixes de σ, et D l'événement « σ est un dérangement » .

1. Exprimer N_n et D à l'aide des $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$. En déduire l'espérance de N_n.

Correction. n a $N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, et $D = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}$. On en déduit, par linéarité de l'espérance, que $\mathbb{E}(N_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{n} = 1$, car pour tout i, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n}$ (choisir une permutation de $\S_n$ telle que i est un point fixe, c'est simplement choisir une permutation sur les $n-1$ éléments restants, d'où $(n-1)!$ possibilités. Donc $\mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$).
En revanche, les X_i ne sont **pas indépendants** ! Donc on ne peut pas facilement calculer $\mathbb{P}(D)$!

2. Déterminer la variance de N_n.

Correction. Comme on n'a pas d'indépendance des (X_i), il faut déterminer la covariance de X_i et X_j. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^n$. Si $i = j$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{V}(X_i)$.
Si $i \neq j$,

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j).$$

Or, si $i \neq j$,

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{P}(X_iX_j = 1) = \frac{\text{Card}\{\sigma \in \S_n,\ \sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j\}}{\text{Card}(\S_n)}.$$

Or, choisir une permutation de $\S_n$ telle que i et j sont des points fixes, c'est simplement choisir une permutation sur les $n-2$ éléments restants, d'où $(n-2)!$ possibilités. Donc

$$\mathbb{E}(X_iX_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

donc

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-(n-1)}{n^2(n-1)} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(N_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \text{Cov}(X_i, X_j)\\ &= \frac{n-1}{n} + 2\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1,\end{aligned}$$

donc la variance est de 1.

3. Relier N_n et D.

Correction. On a immédiatement $D = (N_n = 0)$.

4. On cherche dans cette question à déterminer la loi de N_n. On note, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$, $D_{n,k} = n!\mathbb{P}(N_n = k)$. On note en particulier $d_n = D_{n,0}$.

(a) Démontrer que $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$, puis que

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

Correction. On remarque que $D_{n,k}$ est le nombre de permutations possédant k points fixes. Or, choisir une permutation possédant k points fixes, c'est choisir ces k points fixes (donc $\binom{n}{k}$ possibilités) et choisir ensuite un dérangement des $n-k$ points restants (donc $n-k$ possibilités). Donc $D_{n,k} = \binom{n}{k} d_{n-k}$, donc le nombre de permutations, qui est égal à $n!$, égale

$$n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k,$$

d'où le résultat demandé.

(b) En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

et la limite de $\dfrac{1}{n!} d_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Correction. On s'intéresse au membre de droite :

$$\begin{aligned} n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{n-k}(-1)^k(n-k)! \\ &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k! \\ &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}d_j \\ &= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^k d_j \\ &= (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^k d_j \end{aligned}$$

Or, $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{(n-k)!(k-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$, donc

$$\begin{aligned} n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} &= (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}(-1)^k d_j \\ &= (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}d_j(-1)^j\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^{k-j} \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^{k-j} = 0$ sauf si $j = n$, donc

$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = (-1)^n(-1)^n d_n = d_n,$$

d'où le résultat ! On a alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{d_n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

(c) Déterminer la loi de N_n.

Correction. On en déduit alors que pour tout k,

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{n!}D_{n,k} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}d_{n-k} = \frac{1}{k!(n-k)!}(n-k)!\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$$

(d) Quelle est la limite de $\mathbb{P}(N_n = k)$ quand n tend vers $+\infty$? Reconnaître une loi usuelle.

Correction. Quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbb{P}(N_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{k!\mathrm{e}},$$

on reconnaît alors une loi de Poisson de paramètre 1.

Exercice 48. *Un jardin fleuri.* ●◐○ Dans un jardin de $n \geqslant 1$ tulipes (numérotées), chaque tulipe a une probabilité $p \in]0,1[$ de fleurir à l'année k. Si une tulipe fleurit à l'année k, elle fleurira aussi les années suivantes. Soit X_i la variable qui compte le nombre d'années au bout desquelles la tulipe i est fleurie. On suppose l'indépendance des X_i. Soit enfin X la variable qui compte le nombre d'années au bout duquel tout le jardin est fleuri.

1. Déterminer la loi de chaque X_i. Exprimer X en fonction des X_i.

Correction. Étant donné l'énoncé, X_i suit une loi géométrique de paramètre p. On a ensuite $X = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(X \leqslant k)$ et en déduire la loi de X.

Correction. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leqslant k) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant k, X_2 \leqslant k, \dots, X_n \leqslant k) \text{ car tout le jardin est fleur si chaque tulipe a fleur.}\\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leqslant k)\\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_i > k))\\ &= \prod_{i=1}^{n} (1 - q^k), \text{ en posant } q = 1 - p.\\ &= (1 - q^k)^n\end{aligned}$$

On en déduit que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k+1)\\ &= (1 - q^k)^n - (1 - q^{k+1})^n.\end{aligned}$$

Ceci suffit à déterminer la loi de X.

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 49. ●◐○ On lance n fois deux dés à 6 faces équilibrés A et B, et on suppose les différents lancers indépendants. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de lancers où le numéro de A est strictement supérieur au numéro de B.

1. Déterminer la loi de X_1, puis si n est quelconque. Donner $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

Correction. On note Y_i la variable aléatoire du résultat du i-ème lancer du dé A et Z_i la variable aléatoire du résultat du i-ème lancer du dé B. On a alors $X_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{Y_i > Z_i}$.

On a notamment $X_1 = \mathbb{1}_{Y_1 > Z_1}$. Alors X_1 est à valeurs dans $\{0, 1\}$, c'est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 > Z_1)$. Or,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 > Z_1) &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Y_1 > Z_1, Y_1 = k)\\ &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Z_1 < k, Y_1 = k)\\ &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Z_1 < k)\mathbb{P}(Y_1 = k) \text{ par indépendance.}\\ &= \sum_{k=1}^{6} \frac{k-1}{6}\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{36}\sum_{k=0}^{5} k = \frac{1}{36}\frac{5\times 6}{2} = \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Autre manière de retrouver ce résultat :

$$1 = \mathbb{P}(Y_1 > Z_1) + \mathbb{P}(Y_1 = Z_1) + \mathbb{P}(Y_1 < Z_1),$$

mais $\mathbb{P}(Y_1 > Z_1) = \mathbb{P}(Z_1 > Y_1)$ par symétrie des rôles de Y_1 et Z_1. Ainsi, comme $\mathbb{P}(Y_1 = Z_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (la probabilité calculée est celle que $Y_1 = 1$ et $Z_1 = 1$, ou $Y_1 = 2$ et $Z_1 = 2$, etc.), on a

$$\mathbb{P}(Y_1 > Z_1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{12}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{Y_k>Z_k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y_k>Z_k}) \text{ par linéarité de l'espérance.}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{12}\\ &= \frac{5n}{12}.\end{aligned}$$

Enfin, les lancers sont indépendants, donc les variables $(\mathbb{1}_{Y_k>Z_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont iid. On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{Y_k>Z_k})\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{12}\left(1-\frac{5}{12}\right)\\ &= n\frac{35}{144}.\end{aligned}$$

2. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Correction. Soit X une variable aléatoire L^2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

3. Soit $p_n = \mathbb{P}\left(0.9 < \dfrac{X_n}{\mathbb{E}(X_n)} < 1.1\right)$. Trouver un entier n tel que $p_n \geqslant 0.99$.

Correction. On a $p_n = \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < 0.1\mathbb{E}(X_n)) = 1 - \mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geqslant 0.1\mathbb{E}(X_n))$. Or, on sait que

$$\mathbb{P}(|X_n-\mathbb{E}(X_n)| \geqslant 0.1) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X_n)}{0.1^2\mathbb{E}(X_n)^2} = \frac{35n}{144}\times\frac{100\times 144}{25n^2} = \frac{140}{n},$$

Donc si $\dfrac{140}{n} \leqslant 0.01$, i.e. $n \geqslant 14000$, alors $p_n \geqslant 0.99$.

Exercice 50. *Probabilités et équations différentielles.* ●●◐ Soit (A, B) un couple de variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que toutes les solutions réelles de l'équation $(E) : y'' + (A-1)y' + By = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Correction. Soient a et b deux réels , et (E) l'équation $y'' + (a-1)y' + by = 0$. L'équation caractéristique de (E) est $r^2 + (a-1)r + b = 0$, de discriminant $\Delta = (a-1)^2 - 4b$:

- si le discriminant est < 0, alors les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, où $r_1 = \dfrac{(1-a)+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{(1-a)-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Pour que $e^{r_i t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il faut que r_i soit de partie réelle < 0, i.e. que $1-a<0$, ou que $a > 1$.
- si le discriminant est nul, l'unique solution de l'équation caractéristique est $\dfrac{1-a}{2}$, et les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto (\lambda+\mu t)e^{\frac{1-a}{2}t}$, qui tend vers 0 ssi $a > 1$.
- si le discriminant est strictement positif, l'équation admet deux solutions $\dfrac{1-a\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$. Il faut et il suffit que ces deux racines soient strictement négatives pour que toute solution de (E) tende vers 0 en $+\infty$. Il faut donc que $(1-a)^2 > (a-1)^2 - 4b$, i.e. que $b > 0$.

Dans tous les cas, la seule condition est $a > 1$.
Ainsi, ce faux exo de probas nous donne que la probabilité recherchée est $\mathbb{P}(A > 1) = 1 - p$.

Exercice 51. *Tests de dépistage*. ●◐○ Une maladie touche une personne sur mille. Un test est positif avec probabilité 0,99 chez un malade et 0,02 chez une personne saine.

1. Une personne est testée positive. Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ?
2. On refait passer le test, les résultats étant indépendants conditionnellement à l'état de la personne. Combien de tests positifs consécutifs faut-il pour que la probabilité d'être malade dépasse 0,99 ?

Exercice 52. *Ruine du joueur*. ●●○ Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et $a \in [\![0, n]\!]$. Une puce se trouve à l'instant 0 sur une règle graduée de longueur N, à l'abscisse a. À chaque pas de temps, elle avance de 1 avec une probabilité $p \in]0, 1[$, et recule de 1 avec probabilité $q = 1 - p$. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^* x_n$ la position de la puce au temps n.
Le processus se termine lorsque la puce atteint une extrémité de la règle, c'est-à -dire lorsque $x_n = 0$ ou $x_n = N$. On note u_a la probabilité que - la puce partant de a - elle finisse par terminer sa trajectoire en 0 .

1. Calculer u_0 et u_N.
2. Pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, exprimer u_a en fonction de u_{a+1} et u_{a-1}.
3. En déduire u_a pour tout $a \in [\![0, N]\!]$.
4. On note v_a la probabilité que - la puce partant de a - elle finisse par terminer sa trajectoire en N. Calculer v_a pour tout $a \in [\![0, N]\!]$.
5. Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduire ?
6. Deux joueurs A et B se partagent N billes. À chaque partie, le perdant donne une bille à l'autre. Le joueur A gagne chaque partie avec la probabilité $p \in]0, 1[$. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a toutes les billes. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

6 Du côté des concours

Exercice 53. *Mines-Télécom PSI 2016*.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de $X + Y$.
2. Soient $p \in]0, 1[$, X et Y deux variables aléatoires réelles, telles que Y suive une loi de Poisson de paramètre λ et que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de X conditionnée à $Y = n$ soit une loi binomiale de paramètres n, p.
   (a) Donner la loi de (X, Y), et celle de X.
   (b) Soit $Z = X - Y$. Donner la loi de Z.
   (c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction.

1. C'est une question de cours ! La variable $Z = X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k, Y = n - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) \text{ par indépendance} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-\lambda_2} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^k,
\end{aligned}$$

   donc $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

2. (a) Le couple (X, Y) est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ et, si $Y = n$, alors X est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soient alors k et n tels que $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\mathbb{P}(X = k, Y = n) = \mathbb{P}_{Y=n}(X = k)\mathbb{P}(Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

On en déduit que, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}(X=k, Y=n) \\
&= \sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&\underbrace{=}_{m=n-k} \sum_{m\geqslant 0} \binom{m+k}{k} p^k (1-p)^m \frac{\lambda^{m+k}}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{p^k}{k!} \sum_{m\geqslant 0} \frac{1}{m!} (1-p)^m \lambda^{m+k} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{p^k}{k!} \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{m\geqslant 0} \frac{1}{m!} ((1-p)\lambda)^m \\
&= \frac{p^k}{k!} \lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \mathrm{e}^{-p\lambda}.
\end{aligned}$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

(b) Comme $X \leqslant Y$, Z est à valeurs dans $\mathbb{Z}_-$. Soit alors k dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X-Y=-k) &= \mathbb{P}(X=Y-k) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=Y-k, Y=n) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X=n-k, Y=n) \\
&= \sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}(X=n-k, Y=n) \text{ car } X \text{ est positive} \\
&= \sum_{n\geqslant k} \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k \frac{\lambda^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{(\lambda(1-p))^k}{k!} \mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}, \text{ par analogie avec la question précédente.}
\end{aligned}$$

Donc $-Z$ suit une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$.

(c) X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}_{Y=0}(X=0) = 1 \neq \mathbb{P}(X=0)$.

Exercice 54. *Mines-Télécom 24*. On suppose que X et Y sont des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que : $\forall (i,k) \in \mathbb{N}^2, P(X=i, Y=k) = a\dfrac{i+k}{2^{i+k}}$.

1. Déterminer la valeur de a.

Correction. Le réel a est tel que $\displaystyle\sum_{(i,k)\in\mathbb{N}^2} \mathbb{P}(X=i, Y=k) = 1$. On calcule alors, en sachant que, comme on somme des quantités positives, on peut sommer dans l'ordre que l'on souhaite.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{i+k}{2^{i+k}} &= a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i+k}{2^{i+k}} \\
&= a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i}{2^{i+k}} + a\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^{i+k}}.
\end{aligned}$$

Comme on peut intervertir les sommes, on remarque que i et k jouent des rôles symétriques. On va juste

calculer la première somme :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i}{2^{i+k}} &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} i\frac{1}{2^{i-1}}\\ &= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a\frac{i+k}{2^{i+k}} = 8a.$$

Il faut donc prendre $\boxed{a=\frac{1}{8}}$ pour que cette somme soit égale à 1.

2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction. On va déterminer la loi de X. Soit $i \in \mathbb{N}$. Alors, $\{(Y=k),\ k\in\mathbb{N}\}$ étant un système complet d'événements,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= a\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=k)\\ &= a\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{i+k}{2^{i+k}}\\ &= ai\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+k}} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^{i+k}}\\ &= ai\frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{i+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^{k-1}}\\ &= ai\frac{1}{2^i}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{i+1}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\\ &= ai\frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^{i-1}}\\ &= a\frac{i+1}{2^{i-1}} = \frac{1}{8}\frac{i+1}{2^{i-1}} = \boxed{\frac{i+1}{2^{i+2}}}\end{aligned}$$

Par symétrie des variables i et k, Y suit la même loi que i. Ainsi, $\mathbb{P}(X=0)\neq 0$, $\mathbb{P}(Y=0)\neq 0$ mais $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0$, donc X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Calculer $P(X=Y)$.

Correction. Comme $\{(Y=k), k\in\mathbb{N}\}$ est un système complet d'événements, on sait que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=Y, Y=k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k, Y=k)\\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+k}{2^{k+k}}\\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k}{4^k}\\ &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}2\frac{k}{4\times 4^{k-1}}\\ &= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{4^{k-1}}\\ &= \frac{1}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}\boxed{=\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

Exercice 55. *Centrale 24*. Une candidate doit se rendre sur un lieu de convocation. Elle dispose pour cela de 2 chemins : le chemin A et le chemin B. Elle prend le chemin A avec une probabilité $p\in]0,1[$. Soit T la variable aléatoire égale au temps de trajet de la candidate, en minutes. Le temps de trajet du chemin A (respectivement B) suit une loi de Poisson de paramètre $a>0$ (respectivement $b>0$).

1. (a) **[Py]** Écrire une fonction prenant comme argument p, a et b et renvoyant la valeur de T.

Correction. On propose

```
1  import numpy.random as rd
2
3  def T(p,a,b):
4      x = rd.random()
5      if x<p:
6          return rd.poisson(a)
7      else:
8          return rd.poisson(b)
```

(b) **[Py]** On prend $a=5$ et $b=10$. Donner les valeurs moyennes de T avec $N=500$ simulations pour $p\in\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\}$.

Correction. On propose

```
9  def moyenne(p,a,b,N):
10     res = 0
11     for _ in range(N):
12         res += T(p,a,b)
13     return res/N
```

On obtient

```
14 >>> moyenne(0.25,5,10,10000)
15 8.7552
16
17 >>> moyenne(0.5,5,10,10000)
18 7.4901
19
20 >>> moyenne(0.75,5,10,10000)
21 6.2476
```

(c) **[Py]** Proposer une fonction calculant une approximation de $\mathbb{E}(T)$, justifiée par un résultat précis du cours.

Correction. Il suffit d'utiliser la fonction de la question précédente car, d'après la loi faible des grands nombres, si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de vaiid, alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

2. Déterminer la loi de T en fonction de p, a et b, puis calculer $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ si elles existent.

Correction. Notons X la variable de Bernoulli de paramètre p valant 0 si la candidate prend le chemin a et 1 si elle prend le chemin b. La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \mathbb{P}_{X=0}(T=n)\mathbb{P}(X=a) + \mathbb{P}_{X=1}(T=n)\mathbb{P}(X=b)\\ &= \mathrm{e}^{-a}\frac{a^n}{n!}p + \mathrm{e}^{-b}\frac{b^n}{n!}(1-p).\end{aligned}$$

On voit alors facilement que la série de terme général $n\mathbb{P}(T=n)$ converge et que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(T=n)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{-a}\frac{a^n}{n!}p + \mathrm{e}^{-b}\frac{b^n}{n!}(1-p)\right)\\ &= p\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{a^n}{n!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{b^n}{n!}\\ &= p\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{(n-1)!}\\ &= pa\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)b\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^{n-1}}{(n-1)!}\\ &= pa + (1-p)b\end{aligned}$$

Ce résultat est cohérent avec les tests python. J'ai changé le programme en

```
22 def moyenne(p,a,b,N):
23     res = 0
24     for _ in range(N):
25         res += T(p,a,b)
26     return res/N,p*a+(1-p)*b
```

On trouve alors

```
27 >>> moyenne(0.25,5,10,100000)
28 (8.7556, 8.75)
29
30 >>> moyenne(0.5,5,10,100000)
31 (7.51172, 7.5)
32
33 >>> moyenne(0.75,5,10,100000)
34 (6.24631, 6.25)
```

Ces résultats sont cohérents. **En fait, on a montré que $\mathbb{E}(T) = p\mathbb{E}(Y) + (1-p)\mathbb{E}(Z)$, où $Y \sim \mathscr{P}(a)$ et $Z \sim \mathscr{P}(b)$.**
Ensuite, on sait que $\mathbb{V}(T)$, si elle existe, vaut $\mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)$. Or, si elle existe,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(T=n)\\ &= p\mathrm{e}^{-a}\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\frac{a^n}{n!} + \mathrm{e}^{-b}(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\frac{b^n}{n!}\\ &= p\mathbb{E}(Y^2) + (1-p)\mathbb{E}(Z^2),\end{aligned}$$

où $Y \sim \mathscr{P}(a)$ et $Z \sim \mathscr{P}(b)$. Ainsi, on obtient

$$\mathbb{V}(T) = p\mathbb{V}(Y) + (1-p)\mathbb{V}(Z) = pa + (1-p)b.$$

3. Déterminer N de sorte que, dans 95% des cas, on observe un écart maximum de 30 secondes entre la valeur moyenne de N simulations et l'espérance de T.

Correction. Là, il s'agit de mettre en œuvre la loi des grands nombres. On note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vaiid telles que $X_1 \sim T$. On sait que, pour $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \mathbb{E}(T)\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(T)}{N\varepsilon^2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \mathbb{E}(T)\right| \leqslant \frac{30}{60}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i - \mathbb{E}(T)\right| \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ &\geqslant 1 - \frac{\mathbb{V}(T)}{N\frac{1}{4}} = 1 - \frac{4\mathbb{V}(T)}{N}.\end{aligned}$$

Il suffit donc d'avoir $1 - \dfrac{4\mathbb{V}(T)}{N} \geqslant \dfrac{95}{100}$, i.e. $\dfrac{4\mathbb{V}(T)}{N} \leqslant \dfrac{5}{100}$, ou encore $\boxed{N \geqslant 80\mathbb{V}(T)}$.

Exercice 56. *Mines PSI 2025*. On dispose d'une station d'appel. Le nombre d'appels entre 10 h et 11 h est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ :

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

La probabilité pour qu'un appel concerne le standard A est $p \in [0,1]$. On note Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant choisi le standard A entre 10 h et 11 h .
Donner la loi de Y.

Exercice 57. *Centrale 24*. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre 1/2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$.

1. Pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, on considère $Z_i = \mathrm{e}^{\lambda(X_i - 1/2)}$. Calculer l'espérance de Z_i.

Correction. Par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Z_i) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda(0-1/2)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda(1-1/2)} = \mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$, calculer $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - \mathbb{E}(S_n))}\right)$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$. Alors

$$\begin{aligned}S_n - \mathbb{E}(S_n) &= \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{2}\right),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n-\mathbb{E}(S_n))}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\lambda\sum_{i=1}^n\left(X_i-\frac{1}{2}\right)}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{\lambda\left(X_i-\frac{1}{2}\right)}\right)\\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left(e^{\lambda\left(X_i-\frac{1}{2}\right)}\right) \text{ par indépendance}\\ &= \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \text{ par la question précédente.}\end{aligned}$$

3. Pour $t\in\mathbb{R}$ on pose $f_t:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R};\lambda\mapsto\lambda t-\ln(\operatorname{ch}(\lambda/2))$.
Montrer que : $\forall\lambda>0,\forall t\in\mathbb{R},\mathbb{P}(S_n-\mathbb{E}(S_n)\geqslant nt)\leqslant e^{-nf_t(\lambda)}$.

Correction. Soit $\lambda>0$ et $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n-\mathbb{E}(S_n)\geqslant nt) &= \mathbb{P}(\lambda((S_n-\mathbb{E}(S_n))\geqslant\lambda nt) \text{ car } \lambda>0\\ &= \mathbb{P}\left(e^{\lambda((S_n-\mathbb{E}(S_n))}\geqslant e^{\lambda nt}\right) \text{ par croissance de l'exponentielle..}\end{aligned}$$

Or, la variable aléatoire $e^{\lambda((S_n-\mathbb{E}(S_n))}$ est positive et admet une espérance donc, par l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n-\mathbb{E}(S_n)\geqslant nt) &\leqslant \frac{\mathbb{E}\left(e^{\lambda(S_n-\mathbb{E}(S_n))}\right)}{e^{\lambda nt}}\\ &\leqslant \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{e^{\lambda nt}}\\ &\leqslant e^{-n\left(\lambda t-\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)\right)}=e^{-nf_t(\lambda)}.\end{aligned}$$

4. Pour $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right[$, on pose $\mathrm{I}(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)\ln(1-2t)-\left(t+\frac{1}{2}\right)\ln(2t+1)$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n-\mathbb{E}(S_n)\geqslant nt)\leqslant e^{n\mathrm{I}(t)}$.

Correction. Étudions la fonction f_t décrite ci-dessus. f_t est dérivable et pour tout $\lambda>0$,

$$f_t'(\lambda)=t-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}=t-\frac{1}{2}\operatorname{th}\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

même si la fonction th en tant que telle n'est pas au programme de PCSI donc pas à celui de PSI (mais l'expression avec des exponentielles suffira). Par croissance stricte de th, et comme th varie entre -1 et 1, on sait que f_t' sera strictement positive puis strictement négative. On cherche alors le point d'annulation de f_t'. Soit $\lambda>0$ On a les équivalences

$$\begin{aligned}t-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}=2t\\ &\Leftrightarrow \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}-e^{-\frac{\lambda}{2}}}{e^{\frac{\lambda}{2}}+e^{-\frac{\lambda}{2}}}=2t\end{aligned}$$

Notons $x = \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}}$. Alors on a toujours les équivalences

$$\begin{aligned} t - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} &\Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = 2t \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 2t(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow x^2(1-2t) = 1 + 2t \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} \text{ car } 1+2t > 0 \text{ et } 1-2t > 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} \\ &\Leftrightarrow \lambda = 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}\right). \end{aligned}$$

On a donc bien un point d'annulation, avant lequel f_t' est strictement positive et après lequel elle est strictement négative. Donc f_t admet un maximum en cette valeur, maximum qui vaut

$$\begin{aligned} \lambda t - \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) &= 2t\ln\left(\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}\right) - \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{2}}}{2}\right) \\ &= t\ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}\right). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}} &= \frac{1}{2}\frac{1+2t+1-2t}{\sqrt{(1+2t)(1-2t)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+2t)(1-2t)}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda t - \ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right) &= t\ln\left(\frac{1+2t}{1-2t}\right) + \ln\left(\sqrt{(1+2t)(1-2t)}\right) \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)\ln(1+2t) + \left(\frac{1}{2} - t\right)\ln(1-2t). \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

5. Comparer l'inégalité précédente avec celle de Bienaymé-Tchebycheff.

Correction. L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geqslant nt) &\leqslant \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geqslant nt) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{V}(S_n)}{n^2t^2} \\ &\leqslant \frac{n}{4n^2t^2} \text{ car on connaît la variance d'une binomiale.} \\ &\leqslant \frac{1}{4nt^2}. \end{aligned}$$

La dépendance en n est clairement meilleure dans l'estimation précédente.

Exercice 58. *Centrale MP 21*. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une suite de n^2 variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn} \end{pmatrix}$$

et $D = \det(A)$. On note $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ l'espérance et la variance.

1. **[Py]** À l'aide de Python, estimer $\mathbb{E}(D)$ et $\mathbb{V}(D)$ dans le cas où, pour tous i et j dans $[\![1,n]\!]$, X_{ij} est à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $\mathbb{P}(X_{ij}=-1)=\mathbb{P}(X_{ij}=1)=\dfrac{1}{2}$. On trouvera notamment une expression de $\mathbb{V}(D)$ en fonction de n.
2. Justifier, dans les cas $n=1$ et $n=2$, les espérances et variances estimées à la question 1.
3. Plus généralement, démontrer que $\mathbb{E}(D)=\det(M)$ où $M=(\mathbb{E}(X_{ij}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Retrouver l'espérance estimée à la question 1.
4. **Application.** Si $x\in\mathbb{R}$, que vaut $\mathbb{E}(\chi_A(x))$, dans le cas où les $(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ sont toutes de même loi ?

On suppose désormais que pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]$, X_{ij} est centrée réduite.

5. Soit σ et τ deux permutations de $\mathcal{S}_n$. Démontrer que
$$\operatorname{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma\neq\tau \\ 1 \text{ si } \sigma=\tau \end{cases}$$
6. En déduire que la variance de D est égale à la valeur estimée à la question 1.
7. Démontrer que $\mathbb{E}(|D|)\leqslant n^{\frac{n}{2}}$.
8. Soit $\alpha>0$. À l'aide des deux questions précédentes, majorer de deux manières différentes $\mathbb{P}(|D|\geqslant\alpha\sqrt{n!})$. Quelle est la meilleure majoration ?

Correction.

1. On propose le script suivant (j'ai arrondi les résultats pour voir mieux apparaître les choses).

```
35 import numpy as np
36 import numpy.linalg as alg
37 import numpy.random as rd
38 import matplotlib.pyplot as plt
39
40 def matal(n):
41     A = np.zeros((n,n))
42     for i in range(n):
43         for j in range(n):
44             A[i,j] = 2*rd.binomial(1,1/2)-1
45     return A
46
47 E = []
48 V = []
49
50 M = 50000
51 for n in range(1,7):
52     res1 = 0
53     res2 = 0
54     for _ in range(M):
55         A =matal(n)
56         res1+=alg.det(A)
57         res2+=alg.det(A)**2
58     esp =res1/M
59     E.append(round(esp,1))
60     var = res2/M - esp**2
61     V.append(round(var,1))
```

On appelle

```
62 >>> E
63 [-0.0, 0.0, 0.0, -0.0, -0.0, 0.1]
64
65 >>> V
66 [1.0, 2.0, 6.1, 24.0, 118.5, 717.1]
```

On remarque que l'espérance n'a pas l'air bien grande (nulle ?) et que la variance semble être égale à $n!$

2. Dans le cas où $n = 1$, $\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(X_{11}) = 0$ et $\mathbb{V}(D) = \mathbb{V}(X_{11}) = \mathbb{E}(X_{11}^2) - \mathbb{E}(X_{11})^2 = 1$.
Dans le cas où $n = 2$,

$$\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}) = \mathbb{E}(X_{11}X_{22}) - \mathbb{E}(X_{12}X_{21}) = \mathbb{E}(X_{11})\mathbb{E}(X_{22}) - \mathbb{E}(X_{12}X_{21}) = 0,$$

par indépendance mutuelle des X_{ij}. De même, comme, par le lemme des coalitions, $X_{11}X_{22}$ et $X_{12}X_{21}$ sont indépendantes,

$$\mathbb{V}(D) = \mathbb{V}(X_{11}X_{22}) + \mathbb{V}(X_{12}X_{21}) = 2\mathbb{V}(X_{11}X_{22}).$$

Mais

$$\mathbb{V}(X_{11}X_{22}) = \mathbb{E}(X_{11}^2X22^2) - \mathbb{E}(X_{11}X_{22}) = 1,$$

donc $\mathbb{V}(D) = 2$.
On retrouve bien les résultats conjecturés !

3. On sait que $D = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}$, donc par linéarité de l'espérance, que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}) \text{ par indépendance.} \\ &= \det(\mathbb{E}(X_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}).\end{aligned}$$

4. Ainsi, si on note m l'espérance commune des (X_{ij}), on sait que, si $x \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{E}(\chi_A(x)) = \begin{vmatrix} x-m & -m & \cdots & -m \\ -m & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -m \\ -m & \cdots & -m & x-m \end{vmatrix}$$

Pour calculer ce déterminant, on soustrait la dernière ligne aux précédentes :

$$\mathbb{E}(\chi_A(x)) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -x \\ 0 & x & \ddots & \vdots & -x \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & -x \\ -m & \cdots & -m & -m & x-m \end{vmatrix}$$

puis on ajoute toutes les colonnes à la dernière

$$\mathbb{E}(\chi_A(x)) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & 0 \\ -m & \cdots & -m & -m & x-nm \end{vmatrix}$$

Donc $\mathbb{E}(\chi_A(x)) = x^{n-1}(x - nm)$.

5. Par la formule de Koening-Huygens pour la covariance,

$$\mathrm{Cov}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}, \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) - \mathbb{E}(\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right)\mathbb{E}(\prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right)).$$

Or, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}) = 0,$$

car les variables sont centrées. De même, $\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = 0$. Enfin, si $\sigma = \tau$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}^2\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_{\sigma(i),i}^2) = 1,\end{aligned}$$

car $X_{\sigma(i),i}$ est centrée réduite. Ensuite, si $\sigma \neq \tau$, on dispose de i_0 tel que $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) &= \mathbb{E}\left(X_{\sigma(i_0),i_0} \times \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(X_{\sigma(i_0),i_0}\right) \mathbb{E}\left(\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right),\end{aligned}$$

par indépendance de $X_{\sigma(i_0),i_0}$ avec $\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq i_0}} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}$, donc, comme $X_{\sigma(i),i}$ est centrée,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i} \times \prod_{j=1}^{n} X_{\tau(j),j}\right) = 0.$$

6. On vient de démontrer que les variables aléatoires $\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right)_{\sigma\in\mathcal{S}_n}$ sont non corrélées, donc

$$\mathbb{V}(D) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{V}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{V}\left(\prod_{i=1}^{n} X_{\sigma(i),i}\right) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} 1 = n!$$

7. On demande d'abord d'établir l'inégalité d'Hadamard ! Déjà, le On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, et il existe alors une matrice orthogonale Q, constitué de vecteurs $(E_1, \dots, E_n)$ formant une BON, une matrice triangulaire supérieure R, telles que $A = QR$. Alors $\det(A) = \det(R) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$. Mais $r_{ii} = \langle C_i, E_i\rangle \leqslant \|C_i\|\,\|E_i\| = \|C_i\|$, d'où le résultat !

Ainsi, $\mathbb{E}(|D|) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\|C_i\|)$. Or,

$$\mathbb{E}(\|C_i\|) = \mathbb{E}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} X_{ki}^2}\right) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_{ki}^2\right)} \leqslant \sqrt{n},$$

par concavité de $x \mapsto \sqrt{x}$. On en déduit le résultat désiré ! $\mathbb{E}(|D|) \leqslant n^{\frac{n}{2}}$.

8. Par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|D| \geqslant \alpha\sqrt{n!}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|D|)}{\alpha\sqrt{n!}} \leqslant \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\alpha\sqrt{n!}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{\alpha\sqrt[4]{2\pi n}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{\mathrm{e}^{n/2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{n/2}}{\alpha\sqrt[4]{2\pi n}}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\mathbb{P}(|D| \geqslant \alpha\sqrt{n!}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(D)}{\alpha^2 n!} = \frac{1}{\alpha^2},$$

cette deuxième estimation est donc largement meilleure !

Exercice 59. *X MP 21*. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. centrées et bornées.
Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\mathbb{E}\left((S_n)^4\right) \leqslant Cn^2$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n\geqslant N}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
3. Donner une interprétation à l'événement

$$\bigcup_{k\geqslant 1}\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant N}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \frac{1}{k}\right),$$

et calculer sa probabilité.

Correction.

1. Développer le carré et compter les termes non nuls par indépendance.
2. Markov en passant à la puissance 4.
3. Borel-Cantelli, côté simple (continuité croissante). Cela permet de démontrer une convergence presque sûre.

Exercice 60. *Mines-Télécom MP 2018*. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-b}a^j b^i (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} \text{ si } i \geqslant j, \\ 0 \text{ si } i < j \end{cases}$$

1. Donner les lois de X et Y, ainsi que leurs espérances.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Donner la loi de $Z = X - Y$.

Correction.

1. • **Loi de X.** On utilise le fait que $(\{Y = j\})_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements : si $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\ &= \sum_{j=0}^{i} \frac{\mathrm{e}^{-b}a^j b^i (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\ &= \mathrm{e}^{-b}b^i \frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i} a^j (1-a)^{i-j}\frac{i!}{j!(i-j)!} \\ &= \mathrm{e}^{-b}b^i\frac{1}{i!},\end{aligned}$$

i.e. X suit une loi de Poisson de paramètre b, d'espérance b (c'est du cours !).

- **Loi de Y.** De même, si $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i, Y=j) \\
&= \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-b} a^j b^i (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} \\
&= \mathrm{e}^{-b} a^j \frac{1}{j!} \sum_{i=j+1}^{+\infty} \frac{b^i (1-a)^{i-j}}{(i-j)!} \\
&=_{k=i-j} \mathrm{e}^{-b} a^j \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^{j+k}(1-a)^k}{k!} \\
&= \mathrm{e}^{-b} a^j b^j \frac{1}{j!} \mathrm{e}^{b(1-a)} \\
&= \mathrm{e}^{-ab} \frac{(ab)^j}{j!},
\end{aligned}$$

  i.e. Y suit une loi de Poisson de paramètre ab, d'espérance ab (c'est du cours toujours !).

2. Non !

$$\mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0 \neq \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1).$$

3. Déjà, étant donné la loi de X et Y, $\mathbb{P}(Y \leqslant X) = 1$. Donc Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit k dans $\mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z=k, Y=j) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=j+k, Y=j) \\
&= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-b} a^j b^{j+k} (1-a)^k}{j!k!} \\
&= \frac{b^k (1-a)^k}{k!} \mathrm{e}^{-b} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{a^j b^j}{j!} \\
&= \frac{b^k (1-a)^k}{k!} \mathrm{e}^{-b} \mathrm{e}^{ab} \\
&= \mathrm{e}^{b(1-a)} \frac{(b(1-a))^k}{k!},
\end{aligned}$$

donc Z suit une loi de Poisson de paramètre $b(1-a)$.

Exercice 61. *X MP 2018*. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0,1\}$ (resp. $\{-1,1\}$). On note $p_n = \mathbb{P}(A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $q_{n+1} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Correction.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
&\text{- L'application } \Phi : \mathcal{M}_{n+1}(\{-1,1\}) \to \mathcal{M}_n(\{0,1\}) \\
&M \mapsto \left(\frac{1}{2}(1 - M_{n+1,j} M_{i,n+1} M_{n+1,n+1} M_{i,j})\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}
\end{aligned}$$

est surjective et chaque élément N de $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$ possède exactement 2^{2n+1} antécédents M puisque la donnée du bord $(M_{i,n+1})_{1 \leqslant i \leqslant n+1}, (M_{n+1,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ définit un unique antécédent M de N donné par $M_{i,j} = (1 - 2N_{i,j}) M_{n+1,j} M_{i,n+1} M_{n+1,n+1}$ On en déduit que $\Phi(B_{n+1})$ a la même loi que A_n Soit $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\{-1,1\})$.

Montrons que

$$M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \iff \Phi(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Pour cela, calculons le déterminant de $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\{-1,1\})$ par la méthode du pivot en annulant les $(M_{i,n+1})_{1\leqslant i\leqslant n}$

$$\begin{aligned}\det M &= M_{n+1,n+1} \det\left[\left(M_{i,j} - \frac{M_{i,n+1}M_{n+1,j}}{M_{n+1,n+1}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right] \\ &= (M_{n+1,n+1})^{n+1} \prod_{i=1}^{n} M_{i,n+1} \prod_{j=1}^{n} M_{n+1,j}\Delta_{i,j}\end{aligned}$$

où $\Delta_{i,j} = \det\left[(M_{i,n+1}M_{n+1,j}M_{n+1,n+1}M_{i,j} - 1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\right]$ donc $\det M = (M_{n+1,n+1})^{n+1} \prod_{i=1}^{n} M_{i,n+1} \times \prod_{j=1}^{n} M_{n+1,j} 2^n (-1)^n \det\Phi(M)$ On a donc bien $M \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) \iff \Phi(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et ainsi $\mathbb{P}(B_{n+1} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})) = \mathbb{P}(\Phi(B_{n+1}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = p_n$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $p_n = \mathbb{P}(\det A_n \neq 0) \geqslant \mathbb{P}(\det A_n \text{ est impair})$ Soit $\overline{A_n}$ la réduite de A_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Alors $\det A_n$ est impair $\iff \overline{A_n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ Comme $\overline{A_n}$ suit la loi uniforme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{A_n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\right) &= \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|}{|\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})|} = \frac{(2^n-1)\dots\left(2^n-2^{n-1}\right)}{2^{n^2}} \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\end{aligned}$$

et ainsi $p_n \geqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 62. *Mines-Ponts MP 2019*. (15 min de préparation) On considère une urne avec des boules blanches et noires, avec un proportion $p \in]0,1[$ de boules noires. On y effectue des tirages d'une boule à la fois, indépendants et avec remise. On note X la variable aléatoire donnant la longueur de la première suite de boules de même couleur, et Y celle qui donne la longueur de la deuxième. Par exemple l'événement $(X=2, Y=3)$ est réalisé si et seulement si on a tiré $(n,n,b,b,b,n,\dots)$ ou $(b,b,n,n,n,b,\dots)$.

1. Donner la loi du couple (X,Y).

2. Donner la loi et l'espérance de X. Vérifier $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.

3. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Donner la loi de $X+Y$.

Correction. (15 min de préparation) On considère une urne avec des boules blanches et noires, avec un proportion $p \in]0,1[$ de boules noires. On y effectue des tirages d'une boule à la fois, indépendants et avec remise. On note X la variable aléatoire donnant la longueur de la première suite de boules de même couleur, et Y celle qui donne la longueur de la deuxième. Par exemple l'événement $(X=2, Y=3)$ est réalisé si et seulement si on a tiré $(n,n,b,b,b,n,\dots)$ ou $(b,b,n,n,n,b,\dots)$.

1. Donner la loi du couple (X,Y).

2. Donner la loi et l'espérance de X. Vérifier $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.

3. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance.

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Donner la loi de $X+Y$.

Exercice 63. *CCINP PSI 2025*. Soient X,Y deux v.a indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On note $Z = \min(X,Y)$.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

2. Calculer $\mathbb{P}(X>2)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X>n)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(Z > n)$

Exercice 64. *CCP – maximum et minimum de deux géométriques.* ●●○ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, géométriques de paramètre p. On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V).

2. Expliciter les lois de U et de V.

3. U et V sont-elles indépendantes ?

4. Calculer $\mathbb{E}(U)$. Reprendre la question lorsque X et Y sont géométriques de paramètres respectifs p et q.

Exercice 65. *X PC 23.* ●●○

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

> **Correction.** C'est une question vraiment très difficile si on ne pense pas aux séries entières ! Mais avec les séries entières, cela se fait parfaitement. On écrit que
>
> $$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \text{ et } \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$
>
> Ensuite on remarque que
>
> $$(2p)! = (2p) \times \cdots \times (p+1) \times p! \geqslant 2 \times 2 \times p! = 2^p p!$$
>
> Donc
>
> $$\operatorname{ch}(x) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \leqslant \sum_{p\geqslant 0} \frac{x^{2p}}{2^p p!} = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

2. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$.

> **Correction.** On écrit que, pour $t > 0$,
>
> $$\begin{aligned}
> \mathbb{P}(S_n \geqslant \lambda) &= \mathbb{P}(\mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \mathrm{e}^{t\lambda}) \\
> &\leqslant \frac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tS_n})}{\mathrm{e}^{t\lambda}} \\
> &\leqslant \frac{\prod_{k=1}^n \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX_n})}{\mathrm{e}^{t\lambda}} \text{ par indépendance.} \\
> &\leqslant \frac{\operatorname{ch}(t)^n}{\mathrm{e}^{t\lambda}} \\
> &\leqslant \mathrm{e}^{\frac{nt^2}{2} - t\lambda},
> \end{aligned}$$
>
> d'où le résultat en prenant $t = \dfrac{\lambda}{2n}$.

3. Soit $c > 1$ et A_n l'événement $\left(|S_n| \leqslant \sqrt{2cn \ln n}\right)$. Démontrer que $\mathbb{P}(|S_n| \geqslant \lambda) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{2n}}$, puis que A_n est presque sûrement réalisé à partir d'un certain rang.

Exercice 66. *ENS MP 2025.* ●●◐ On considère n variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Montrer que pour tout réel $p > 0$, il existe $c_p, C_p > 0$ indépendants de n tel que

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad c_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 67. *ENS MP 2019.* (BEOS 5316) Soit E un ensemble au plus dénombrable. Soit μ, ν des mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$. On introduit également $X \rightsquigarrow \mu, Y \rightsquigarrow \nu$ des variables aléatoires indépendantes. On définit la distance en variation totale par $d_{vt}(\mu, \nu) = \sup_{A\subset E} |\mu(A) - \nu(A)|$

1. Montrer que $d_{vt}(\mu, \nu) = \dfrac{1}{2}\sum_{x\in E} \left|\mu(\{x\}) - \nu(\{x\})\right| = \dfrac{1}{2} \sup_{f\in\mathcal{F}(E,[-1,1])} |\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y))|$.

On pourra chercher une partie $\tilde{A}$ et une fonction $\tilde{f}$ qui atteignent les bornes supérieures respectives.

2. Désormais, $E = \mathbb{N}$. Pour μ, ν des mesures sur E, on note $\mu * \nu$ la loi de $X + Y$, où $X \rightsquigarrow \mu, Y \rightsquigarrow \nu$, X et Y indépendantes. Soit $n \in \mathbb{N}^*, \mu_1, \dots, \mu_n, \nu_1, \dots \nu_n$ des mesures de probabilités. Montrer que

$$d_{vt}(\mu_1 * \cdots * \mu_n, \nu_1 * \cdots * \nu_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} d_{vt}(\mu_i, \nu_i)$$

On pourra commencer par le cas $n = 2$.

Correction. Soit E un ensemble au plus dénombrable. Soit μ, ν des mesures de probabilités sur $(E, \mathcal{P}(E))$. On introduit également $X \rightsquigarrow \mu, Y \rightsquigarrow \nu$ des variables aléatoires indépendantes. On définit la distance en variation totale par $d_{vt}(\mu, \nu) = \sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)|$

1. L'idée cruciale est de considérer la partie suivante

$$B = \{x \in E,\ \mu(x) \geqslant \nu(x)\}.$$

Soit désormais $A \subset E$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu(A) - \nu(A) &= \mu(A \cap B) + \mu(A \cap \overline{B}) - \nu(A \cap B) - \nu(A \cap \overline{B}) \\
&= \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) + \underbrace{\mu(A \cap \overline{B}) - \nu(A \cap \overline{B})}_{\leqslant 0 \text{ car si } x \in \overline{B},\ \nu(x) > \mu(x)} \\
&\leqslant \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) \\
&\leqslant \mu(A \cap B) - \nu(A \cap B) + \underbrace{\mu(\overline{A} \cap B) - \nu(\overline{A} \cap B)}_{\geqslant 0} \\
&\leqslant \mu(B) - \nu(B).
\end{aligned}$$

De même,

$$\nu(A) - \mu(A) \leqslant \nu(\overline{B}) - \mu(\overline{B}) = \mu(B) - \nu(B),$$

d'où $|\mu(A) - \nu(A)| \leqslant \mu(B) - \nu(B)$. Donc le sup est un max, atteint en B et en $\overline{B}$. Ainsi,

$$d_{vt}(\mu, \nu) = \mu(B) - \nu(B) = \nu(\overline{B}) - \mu(\overline{B}),$$

donc

$$\begin{aligned}
d_{vt}(\mu, \nu) &= \frac{1}{2}\left(\mu(B) - \nu(B) + \nu(\overline{B}) - \mu(\overline{B})\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x \in E} (\mu(x) - \nu(x))_+ + (\mu(x) - \nu(x))_- \text{ parties positive et négative} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|,
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré !
Pour la dernière égalité, on prend $f = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{\overline{B}}$: l'égalité est clairement atteinte en cette fonction ! Pour l'inégalité inverse, on remarque juste que

$$\frac{1}{2}|\mathbb{E}(f(X)) - \mathbb{E}(f(Y))| = \frac{1}{2}\left|\sum_{x \in E} f(x)(\mu(x) - \nu(x))\right|,$$

d'où l'autre inégalité par inégalité triangulaire et comme $|f| \leqslant 1$.

2. Pour le coup, si on fait le cas $n = 2$, le reste se conclut immédiatement par récurrence ! On écrit que

$$
\begin{aligned}
&d_{vt}(\mu_1 * \mu_2 - \nu_1 * \nu_2)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu_1 * \mu_2(n) - \nu_1 * \nu_2(n)|\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{p\in\mathbb{N}} \mu_1(p)\mu_2(n-p) - \nu_1(p)\nu_2(n-p)\right| \text{ quitte à rajouter des valeurs nulles sur les négatifs}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{p\in\mathbb{N}} |\mu_1(p)\mu_2(n-p) - \nu_1(p)\nu_2(n-p)|\\
&= \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu_1(p)\mu_2(m) - \nu_1(p)\nu_2(m)|\\
&= \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu_1(p)\mu_2(m) - \nu_1(p)\mu_2(m) + \nu_1(p)\mu_2(m) - \nu_1(p)\nu_2(m)|\\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu_1(p)\mu_2(m) - \nu_1(p)\mu_2(m)| + \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\nu_1(p)\mu_2(m) - \nu_1(p)\nu_2(m)|\\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu_1(p) - \nu_1(p)| + \sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{m\in\mathbb{N}} |\mu_2(m) - \nu_2(m)| \text{ car } \mu_2 \text{ et } \nu_1 \text{ sont des probabilités}\\
&\leqslant d_{vt}(\mu_1, \nu_1) + d_{vt}(\mu_2, \nu_2).
\end{aligned}
$$

D'où l'inégalité pour $n = 2$ et pour $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Indications

Ex 1. **1.** $\omega \in A$ si et seulement si $\forall k, \exists n \geqslant k, \omega \in A_n$.
2. Utiliser la continuité décroissante et la sous-additivité.

Ex 4. **1.** Utiliser le système complet $(Y = i)_{i\in\mathbb{N}}$, puis binôme de Newton.

Ex 5. **1.** Utiliser le système complet $(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$, et remarquer que $\mathbb{P}_{X=n}(Y = k)$ est nulle si $k > n$.

Ex 6. **1.** Utiliser l'inégalité de Markov.
2. Minimiser la quantité de droite par rapport à x.

Ex 8. **1.** Étudier la probabilité que le minimum soit $> k$; étudier la probabilité que le maximum soit $\leqslant k$.
2.c. On pourra utiliser une somme de Riemann.

Ex 10. **2.** Décomposer selon le système complet d'événements $N = n$ et remarquer que $\{N = n\} \cap \{S = k\} = \{N = n\} \cap \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right\}$.

Ex 11. **1.** Appliquer l'inégalité de Markov à e^{tS_n}.
2. On utilisera que $\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{t^{2k}}{2^k k!}$, et que $\mathrm{ch}(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$, qui s'exprime aussi comme somme d'une série.

Ex 12. **1.** COmmencer par le cas où X est à valeurs dans $[0, 1]$; s'y ramener en considérant une transformation affine de X.

Ex 14. Poser $x = \mathbb{P}(A \setminus B)$, $y = \mathbb{P}(B \setminus A)$ et $z = \mathbb{P}(A \cap B)$.

Ex 15. Faire une récurrence pour l'inégalité de gauche. Pour celle de droite, appliquer celle de gauche aux complémentaires.

Ex 17. Considérer $a = \mathbb{P}(A \cap B)$, $b = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, $c = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$, $d = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$

Ex 18. **3.** Utiliser le théorème de Gauss pour établir que si p et q sont deux nombres premiers distincts, $A_p \cap A_q = A_{pq}$.

Ex 22. **3.** Procéder par récurrence et par IPP.
4. Pour $\varepsilon > 0$, utiliser le système complet $(\{|X_n - X| < \varepsilon\}, \{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\})$. Établir l'encadrement

$$F_X(x - \varepsilon) + o(1) \leqslant F_{X_n}(x) \leqslant F_X(x + \varepsilon) + o(1)$$

puis conclure par continuité de F_X en x.

Ex 23. On doit avoir $\mathbb{P}(A = i, B = j) = \mathbb{P}(N = i + j)\binom{i+j}{i} p^i q$.

Ex 25. **1.** On déterminera $\mathbb{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) \leqslant k)$ et $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \geqslant k)$.

Ex 26. On pourra démontrer que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$.

Ex 27. **3.** On peut remarquer que $(T_r = n + r + 1) = (T_r > n) \cap (X_{n+1} = 0) \cap (X_{n+2} = \cdots = X_{n+r+1} = 1)$ et que ces événements sont indépendants.

Ex 28. **1.** Utiliser le fait que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Ex 29. **1.** Remarquer que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X.1)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Ex 30. Utiliser que $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Pour la comparaison, la convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ peut aider.

Ex 31. **3.** Penser au fait que la loi géométrique est sans mémoire.
5. On peut utiliser les événements $(N = k)$.

Ex 33. **2.** Utiliser que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{X\geqslant\eta\mathbb{E}(X)}\right) + \mathbb{E}\left(X\mathbf{1}_{X<\eta\mathbb{E}(X)}\right)$, et le second terme est majoré par $\eta\mathbb{E}(X)$.

Ex 34. Pour le premier cas, c'est juste l'inégalité de Jensen. Pour le second, utiliser que la courbe de f est au-dessus de sa tangente en $\mathbb{E}(X)$.

Ex 35. Utiliser des fonctions indicatrices : ne pas chercher à déterminer la loi de X.

Ex 37. Utiliser la même méthode que pour l'exercice 10, et remarquer qu'à n fixé, $\mathbb{E}\left(S_n^2\right) = n\mathbb{V}\left(X_1\right) + n^2\mathbb{E}\left(X_1\right)^2$ (si S_n est la somme jusqu'à n)

Ex 38. **1.** On utilisera l'inégalité $(X-a)(b-X) \geqslant 0$.

Ex 40. **3.** Écrire que, pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{E}\left(X_n\right) \leqslant \varepsilon + \sum_x x\mathbb{P}\left(X_0 = x, X_n > \varepsilon\right)$, puis couper la somme.

Ex 41. **4.** Utiliser $t = \varepsilon / \sum a_i^2$.

Ex 42. **2.** Démontrer, avec les probabilités totales, que $p_{n+1} = pp_n + (1-p)(1-p_n)$, et reconnaître une suite arithmético-géométrique.

Ex 43. **2.b.** On pourra utiliser que $\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i} = \binom{n}{k}\binom{k}{i}$.

Ex 46. **5.** On pourra supposer que tous les X_{ij} sont des variables de Rademacher.

Ex 47. **4.b.** On a tout intérêt à écrire que $n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{n-k}(-1)^k(n-k)! = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k k!$ et à remplacer $k!$ par son expression à l'aide des d_j. C'est la formule d'inversion de Pascal, probablement vue en TD en sup.

Ex 49. **1.** On doit trouver que $X_n \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{5}{12}\right)$.

3. Écrire le contraire de l'événement sous la forme $\mid X_n - \mathbb{E}\left(X_n\right) \mid \geqslant 0,1\mathbb{E}\left(X_n\right)$ et appliquer Bienaymé-Tchebycheff.

Ex 50. Les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ tendent toutes vers 0 si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$ (discuter selon le discriminant).

Ex 59. **1.** En développant S_n^4, seuls les termes $\mathbb{E}\left(X_i^4\right)$ et $\mathbb{E}\left(X_i^2X_j^2\right)$ survivent.

2. Utiliser l'inégalité de Markov.

3. Utiliser Borel-Cantelli.

Ex 61. **1.** Multiplier lignes et colonnes par ± 1 pour que la dernière ligne et la dernière colonne ne contiennent que des 1.

2. Choisir les colonnes une à une. Un sous-espace de dimension $k-1$ contient au plus 2^{k-1} éléments de $\{0,1\}^n$.

Ex 65. **3.** Appliquer le premier lemme de Borel-Cantelli à $\overline{A_n}$.

Ex 66. Traiter d'abord le cas de z_i réels. Majoration : queue sous-gaussienne $\mathbb{P}(|S| \geqslant t) \leqslant 2e^{-t^2/\left(2\sum z_i^2\right)}$, puis $\mathbb{E}\left(|S|^p\right) = \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\mathbb{P}(|S| > t)dt$. Minoration : si $p \geqslant 2$, Hölder ; si $p < 2$, interpoler $\mathbb{E}\left(S^2\right)$ entre $\mathbb{E}\left(|S|^p\right)$ et $\mathbb{E}\left(S^4\right) \leqslant 3\left(\sum z_i^2\right)^2$.

Ex 67. **1.** Considérer $B = \{x, \mu(x) \geqslant \nu(x)\}$ et $f = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{\overline{B}}$.

2. Utiliser l'inégalité triangulaire avec $\nu_1 * \mu_2$, et $d_{vt}(\mu * \lambda, \nu * \lambda) \leqslant d_{vt}(\mu, \nu)$.