DM 04
à rendre le **vendredi 9 octobre**

IMPORTANT. En début de DM, indiquer : la formule choisie, le temps passé, l'aide reçue (sur quelles questions et quel type d'aide : camarades, professeur, famille, internet, IA).

Formules. Vous devez choisir une entrée et un plat.

1. entrée : au minimum l'exo de Mines MP. Vous pouvez prendre plusieurs entrées.
2. plat principal : un sujet de probabilités de sup : ou bien le plat 1 (révisions), sur lequel passer 1h30, ou bien le plat 2 (Mines MP 2018) sur lequel passer 3h.

Entrée : exercices d'oral sur les normes

Exercice 1. *Mines MP 2024*. Soient $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et $N : f \mapsto \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.

> **Correction.** Définissons, pour f et g dans E, $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. On montre qu'il s'agit d'un produit scalaire :
>
> - la bilinéarité et la symétrie sont évidentes.
> - soit $f \in E$. Alors
>
> $$\langle f, f\rangle = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \geqslant 0.$$
>
> Si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2 dt = 0$. Mais $t \mapsto f'(t)^2$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle, donc elle est nulle. Donc f est constante sur $[0,1]$, égale à $f(0) = 0$.
>
> Donc $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire, donc N, qui est la norme associée à ce produit scalaire, est bien une norme.

2. Comparer N à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

> **Correction.** Cf. corrigé du TD.

Exercice 2. *ENS PSI 2025*.

1. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$, on note $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$.
   (a) Montrer que $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_4$ sont des normes sur E.

> **Correction.** Homogénéité : immédiate. Séparation : si $\|f\|_p = 0$, $|f|^p$ est continue, positive, d'intégrale nulle, donc nulle, donc $f = 0$.
>
> Inégalité triangulaire. Pour $p = 2$: $\|\cdot\|_2$ est la norme associée au produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 fg$. Pour $p = 4$: on remarque que $\|f\|_4^2 = \|f^2\|_2$, et par Cauchy-Schwarz $\|fg\|_2^2 = \int_0^1 f^2 g^2 \leqslant \|f^2\|_2 \|g^2\|_2$, donc $\|fg\|_2 \leqslant \|f\|_4 \|g\|_4$. Ainsi, avec l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$:
>
> $$\|f+g\|_4^2 = \|f^2 + 2fg + g^2\|_2 \leqslant \|f\|_4^2 + 2\|f\|_4\|g\|_4 + \|g\|_4^2 = \big(\|f\|_4 + \|g\|_4\big)^2.$$

   (b) Montrer que $\|\cdot\|_4 \geqslant \|\cdot\|_2$.

> **Correction.** Par Cauchy-Schwarz, $\|f\|_2^2 = \int_0^1 f^2 \cdot 1 \leqslant \left(\int_0^1 f^4\right)^{1/2} \left(\int_0^1 1\right)^{1/2} = \|f\|_4^2$.

   (c) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par $f_n = 0$ sur $[0, 1/2n]$, $f_n(x) = x^{-1/4}$ sur $[1/n, 1]$ et f_n affine sur $[1/2n, 1/n]$. Comparer $\|f_n\|_2$ et $\|f_n\|_4$. Qu'en déduit-on ?

Correction. Sur $[1/2n, 1/n]$, $0 \leqslant f_n \leqslant n^{1/4} \leqslant x^{-1/4}$. Donc $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^{-1/4}$ pour tout $x \in]0,1]$, et

$$\|f_n\|_2^2 \leqslant \int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x = 2, \qquad \|f_n\|_4^4 \geqslant \int_{1/n}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n.$$

Donc $\|f_n\|_2 \leqslant \sqrt{2}$ tandis que $\|f_n\|_4 \to +\infty$: il n'existe pas de C tel que $\|\cdot\|_4 \leqslant C\|\cdot\|_2$. Les deux normes ne sont pas équivalentes (on est en dimension infinie).

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. Pour $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$, on note $N_{n,p}(a) = \left(\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^n a_k X_k\right|^p\right)\right)^{1/p}$.

(a) Calculer $N_{n,2}(a)$.

Correction. On a $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $X_k^2 = 1$. Par indépendance, $\mathbb{E}(X_jX_k) = \mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0$ pour $j \neq k$, d'où

$$N_{n,2}(a)^2 = \sum_{j,k=1}^n a_j a_k \mathbb{E}(X_jX_k) = \sum_{k=1}^n a_k^2, \qquad N_{n,2}(a) = \Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^{1/2}.$$

(b) Calculer $N_{n,4}^4(a)$ en fonction de $N_{n,2}(a)$.

Correction. On développe : $N_{n,4}^4(a) = \sum_{i,j,k,\ell} a_i a_j a_k a_\ell\, \mathbb{E}(X_iX_jX_kX_\ell)$.
Par indépendance, $\mathbb{E}(X_iX_jX_kX_\ell)$ vaut 1 si chaque indice apparaît un nombre pair de fois, 0 sinon (un facteur X_m ou $X_m^3 = X_m$ isolé est d'espérance nulle). Les quadruplets qui contribuent sont donc : les n quadruplets $i=j=k=\ell$, et les (i,i,j,j), (i,j,i,j), (i,j,j,i) avec $i \neq j$. D'où

$$N_{n,4}^4(a) = \sum_{k=1}^n a_k^4 + 3\sum_{i\neq j} a_i^2 a_j^2 = 3\Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)^2 - 2\sum_{k=1}^n a_k^4 = 3N_{n,2}(a)^4 - 2\sum_{k=1}^n a_k^4.$$

Remarque. On en tire $N_{n,2}(a) \leqslant N_{n,4}(a) \leqslant 3^{1/4} N_{n,2}(a)$, avec une constante indépendante de n : c'est un cas particulier de l'inégalité de Khintchine, à comparer avec 1.(c).

Exercice 3. *X MP 2024*. Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre munie d'une norme N vérifiant : $\forall a,b \in \mathcal{A}$, $N(ab) = N(a)N(b)$.
Préliminaire. $N(1_\mathcal{A}) = N(1_\mathcal{A})^2$ et $N(1_\mathcal{A}) \neq 0$, donc $N(1_\mathcal{A}) = 1$ et $N(z\cdot 1_\mathcal{A}) = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Soit $x \in \mathcal{A}$. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $N(x-z_0) \leqslant N(x-z)$. On pose $a = x - z_0$.

Correction. $\varphi : z \mapsto N(x-z)$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{C}$, car $|N(x-z) - N(x-z')| \leqslant N(z'-z) = |z-z'|$, donc continue. De plus $\varphi(z) \geqslant |z| - N(x)$. Soit $R = 2N(x)$. Pour $|z| > R$, $\varphi(z) > N(x) = \varphi(0)$. Sur le compact $\overline{D}(0,R)$, φ atteint son minimum en un z_0, et $\varphi(z_0) \leqslant \varphi(0) < \varphi(z)$ pour $|z| > R$. Donc z_0 convient.

2. On suppose que $N(a) = 2$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{U}_n$, $N(a-z) \geqslant 2$. Montrer ensuite que $N(a-1) = 2$ puis $N(a-5) = 2$.

Correction. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $N(a-z) = N\big(x-(z_0+z)\big) \geqslant N(x-z_0) = 2$, en particulier pour $z \in \mathbb{U}_n$.
Comme $X^n - 1 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(X-\omega)$ et que $\mathbb{C}[a]$ est commutative, $a^n - 1 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(a-\omega)$. Par multiplicativité :

$$N(a-1)\cdot 2^{n-1} \leqslant \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} N(a-\omega) = N(a^n-1) \leqslant N(a)^n + 1 = 2^n + 1.$$

Donc $2 \leqslant N(a-1) \leqslant 2 + 2^{1-n}$ pour tout n, et $N(a-1) = 2$ en faisant $n \to +\infty$.
L'élément $a' = a-1$ vérifie les mêmes hypothèses : $N(a') = 2$ et $N(a'-z) = N\big(a-(1+z)\big) \geqslant 2$ pour tout z. Donc $N(a'-1) = N(a-2) = 2$. Par récurrence, $N(a-k) = 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, en particulier $N(a-5) = 2$.

3. Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, i.e. $\dim\mathcal{A} = 1$.

Correction. Soit $x \in \mathcal{A}$, z_0 et a comme en 1. Supposons $d = N(a) > 0$. Posons $x' = \frac{2}{d}x$. Pour tout z, $N(x'-z) = \frac{2}{d}N\big(x - \frac{dz}{2}\big) \geqslant \frac{2}{d}\,d = 2$, avec égalité en $z = \frac{2z_0}{d}$. Le a' associé à x' est donc $\frac{2}{d}a$, avec

$N(a') = 2$. D'après 2, $N(a' - 5) = 2$. Or $N(a' - 5) \geqslant N(5) - N(a') = 5 - 2 = 3$: contradiction.
Donc $N(a) = 0$, $a = 0$ et $x = z_0 \cdot 1_{\mathcal{A}}$. Ainsi $\mathcal{A} = \mathbb{C} \cdot 1_{\mathcal{A}}$, et $z \mapsto z \cdot 1_{\mathcal{A}}$ est un morphisme d'algèbres, injectif car $N(z \cdot 1_{\mathcal{A}}) = |z|$, et surjectif : c'est un isomorphisme $\mathbb{C} \simeq \mathcal{A}$.

Plat principal 1 : révisions sur des bases de probabilités

Le but est de réviser son cours de probas de sup.

Exercice 4. Soient U et V deux variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On note $m=\min(U,V)$ et $M=\max(U,V)$.

1. Les variables aléatoires m et M sont-elles indépendantes ?

Correction. On remarque que $\mathbb{P}(m=1,M=1)=\mathbb{P}(U=1,V=1)=\mathbb{P}(U=1)\mathbb{P}(V=1)=\dfrac{1}{n^2}$ et $\mathbb{P}(m=1)\mathbb{P}(M=1)=\mathbb{P}(m=1)\mathbb{P}(U=1,V=1)=\mathbb{P}(m=1)\dfrac{1}{n^2}<\mathbb{P}(m=1,M=1)$. Donc les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

2. Déterminer la loi de m, et en déduire son espérance.

Correction. Soit k dans $[\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(m=k)&=\mathbb{P}(U=k,V=k)+\mathbb{P}(U=k)\mathbb{P}(V\geqslant k+1)+\mathbb{P}(U\geqslant k+1)\mathbb{P}(V=k)\\&=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\frac{n-k}{n}+\frac{n-k}{n}\frac{1}{n}\\&=\frac{1+2(n-k)}{n^2}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(m)&=\sum_{k=1}^{n}k\mathbb{P}(m=k)\\&=\sum_{k=1}^{n}k\frac{1+2(n-k)}{n^2}.\\&=\frac{1+2n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=\frac{1+2n}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.\end{aligned}$$

Remarque : $m=\dfrac{U+V-|U-V|}{2}$, donc $\mathbb{E}(m)=\dfrac{1}{2}(\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(V)-\mathbb{E}(|U-V|))$.

3. Calculer l'espérance de M sans calculer sa loi.

Correction. C'est amusant, il suffit de remarquer que $U+V=m+M$! Donc

$$\mathbb{E}(M)=\mathbb{E}(U+V-m)=\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(V)-\mathbb{E}(m) \text{ par linéarité.}$$

Or, $\mathbb{E}(U)=\mathbb{E}(V)=\dfrac{n+1}{2}$, donc $\mathbb{E}(M)=n+1-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}=\dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

4. Déterminer la loi de (m,M).

Correction. La loi conjointe est facile à trouver ! Déjà si $a>b$, $\mathbb{P}(m=a,M=b)=0$. Ensuite, si $a<b$, $\mathbb{P}(m=a,M=b)=\mathbb{P}(U=a,V=b)+\mathbb{P}(U=b,V=a)=\dfrac{2}{n^2}$. Enfin si $a=b$, $\mathbb{P}(m=a,M=b)=\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$.

1. On pose pour tout k entier $Y_k=X_k+X_{k+1}$. Donner la loi de Y_k, son espérance et sa variance. Donner la covariance de Y_i et Y_j pour $i\neq j$.

Correction. Y_k est la somme de deux variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes, donc $Y_k\sim\mathscr{B}(2,p)$: $\mathbb{P}(Y_k=0)=(1-p)^2$, $\mathbb{P}(Y_k=1)=2p(1-p)$, $\mathbb{P}(Y_k=2)=p^2$. Ainsi $\mathbb{E}(Y_k)=2p$ et $\mathbb{V}(Y_k)=2p(1-p)$.

Soit $i<j$. Par bilinéarité,

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\mathrm{Cov}(X_i,X_j)+\mathrm{Cov}(X_i,X_{j+1})+\mathrm{Cov}(X_{i+1},X_j)+\mathrm{Cov}(X_{i+1},X_{j+1}).$$

Par indépendance, $\mathrm{Cov}(X_a,X_b)=0$ si $a\neq b$, et $\mathrm{Cov}(X_a,X_a)=\mathbb{V}(X_a)=p(1-p)$. Le seul indice commun possible est $i+1=j$, d'où

$$\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)=\begin{cases}p(1-p) & \text{si } |i-j|=1,\\ 0 & \text{si } |i-j|\geqslant 2.\end{cases}$$

2. On pose $T_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de T_n.

Correction. Par linéarité, $\mathbb{E}(T_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2p=2p$. Ensuite, d'après la question précédente (il y a $n-1$ couples (i,j) avec $1\leqslant i<j\leqslant n$ et $j=i+1$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(T_n)&=\frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(Y_k)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(Y_i,Y_j)\Big)\\&=\frac{1}{n^2}\big(2np(1-p)+2(n-1)p(1-p)\big)=\frac{2(2n-1)p(1-p)}{n^2}.\end{aligned}$$

Variante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}Y_k=X_1+2\sum_{k=2}^{n}X_k+X_{n+1}$, somme de variables indépendantes, de variance $p(1-p)\big(1+4(n-1)+1\big)=(4n-2)p(1-p)$.

Exercice 6. Soit X une variable de loi $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}(2^X)$ et $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Correction. On utilise le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(2^X)&=\sum_{k=0}^{n}2^k\mathbb{P}(X=k)\\&=\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2p)^k(1-p)^{n-k}\\&=(2p+1-p)^n=(1+p)^n.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&\underset{\ell=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}p^{\ell-1}(1-p)^{n-\ell+1} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n+1-\ell} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell}p^{\ell}(1-p)^{n+1-\ell} - (1-p)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left(1-(1-p)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Plat principal 2 : Mines MP 2018

Lemme de Fekete et théorème de Erdös-Szekeres

Le but de ce problème est d'étudier quelques applications probabilistes du lemme de sous-additivité de Fekete et du théorème de Erdös-Szekeres.

Dans tout le problème, $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé. On note $P(A)$ la probabilité d'un événement A et on note $\mathrm{E}(X)$ l'espérance (si elle existe) d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

A. Préliminaires

Les deux questions de cette partie sont indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

1) Montrer que pour toute variable aléatoire X réelle à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$ et pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathrm{E}(X) \leqslant m - 1 + n\,P(X \geqslant m).$$

2) À l'aide d'une comparaison entre une somme et une intégrale, montrer que

$$n\ln(n) - n + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(k).$$

En déduire l'inégalité

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \leqslant n!$$

B. Le lemme de sous-additivité de Fekete

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k\,;\, k \geqslant n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \quad \text{et} \quad \overline{u}_n = \sup(U_n).$$

3) Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est *plus petite* que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est *plus grande* que v.

4) Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite du problème, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u}_n$$

5) Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et de $\overline{v}$.

6) Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites u, $\overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *sous-additive* si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$.

Dans le reste de cette partie on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive *et* sous-additive.

7) Soit m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leqslant (q-1)\,u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m}.$$

8) En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}.$$

9) En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

C. Une application probabiliste

Soit x un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note Y_n la variable aléatoire réelle définie par

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

10) Montrer que si $P(X_1 < x) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n < x) = 1$ et que si $P(X_1 \geqslant x) > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

11) Soit m et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante :

$$\left(\{Y_m \geqslant x\} \cap \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right\}\right) \subset \{Y_{m+n} \geqslant x\}$$

et en déduire l'inégalité

$$P(Y_{m+n} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x)P(Y_n \geqslant x).$$

12) Démontrer la convergence de la suite

$$\left(\left(P(Y_n \geqslant x)\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

D. Le théorème de Erdös-Szekeres

Si r est un entier naturel non nul, on note $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_r)$ une liste de nombres réels de longueur r ; cette liste est *croissante* si $\ell_1 \leqslant \ell_2 \leqslant \cdots \leqslant \ell_r$, *décroissante* si $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_r$. Une liste ℓ' de longueur $p \in \{1, \ldots, r\}$ est *extraite* de ℓ s'il existe p indices strictement croissants $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$ dans $\{1, \ldots, r\}$ tels que $\ell' = (\ell_{i_1}, \ldots, \ell_{i_p})$.

Soit p et q deux entiers naturels non nuls et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{pq+1})$ une liste de longueur $pq+1$ de nombres réels deux-à-deux distincts qui représentent les valeurs de $pq+1$ jetons numérotés $1, 2, \ldots, pq+1$.

On range successivement les jetons en piles de gauche à droite par le procédé suivant :

- le jeton n°1 de valeur a_1 débute la première pile ;
- *si* $a_2 > a_1$, alors on pose le jeton n°2 de valeur a_2 sur le jeton n°1 ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton n°2, située à droite de la première pile ;
- lors des étapes suivantes, disposant du jeton n°k de valeur a_k, on le dépose sur la première pile en partant de la gauche telle que a_k est supérieur à la valeur du jeton au sommet de la pile, *si* une telle pile existe ;
  sinon on crée une nouvelle pile avec ce jeton, située à droite des précédentes.

En suivant ce procédé avec tous les jetons, on obtient plusieurs piles de jetons, chaque pile ayant des valeurs rangées dans l'ordre croissant du bas vers le haut.

Par exemple, avec la liste

$$a = (1,4,2,3,7,6,5,9,10,8)$$

dans cet ordre, on obtient de gauche à droite les trois piles suivantes :

10		
9	8	
7	6	
4	3	
1	2	5

13) À l'aide d'un raisonnement par récurrence sur le nombre s de piles, montrer qu'à l'issue du processus, pour tout jeton de valeur z de la dernière pile, il existe une liste $b = (b_1, \ldots, b_s)$ de réels extraite de la liste a vérifiant :
- b est décroissante et de longueur s ;
- pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$ le jeton n°i de valeur b_i est dans la i-ème pile en partant de la gauche ;
- $b_s = z$.

Par exemple, avec la liste $a = (1,4,2,3,7,6,5,9,10,8)$ on a une liste extraite $b = (7,6,5)$.

14) En déduire que la liste a admet au moins une liste extraite croissante de longueur $p+1$ *ou* une liste extraite décroissante de longueur $q+1$.

E. Comportement asymptotique d'une suite aléatoire

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1,2,\ldots,n\}$. Chaque élément $\sigma \in S_n$ est noté par la liste de ses n images $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$.

Soit B une variable aléatoire à valeurs dans S_n de loi uniforme, c'est-à-dire que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $P(B = \sigma) = 1/\mathrm{Card}(S_n)$. On définit la variable aléatoire A à valeurs dans S_n en posant, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$A(\omega) = \big(B(\omega)(1), \ldots, B(\omega)(n)\big).$$

On note également, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $A_k(\omega) = B(\omega)(k)$. Enfin, on considère les variables aléatoires réelles C_n et D_n définies par :
- C_n est la longueur de la plus longue liste croissante extraite de A ;
- D_n est la longueur de la plus longue liste décroissante extraite de A.

15) Les variables aléatoires réelles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

16) Soit $k \in \{1,\dots,n\}$ et $s = (s_1,\dots,s_k)$ une liste croissante de longueur k d'éléments de $\{1,\dots,n\}$. On note A^s l'événement : « la liste $(A_{s_1},\dots,A_{s_k})$ est croissante ». Montrer que $P(A^s) = \dfrac{1}{k!}$.

17) Démontrer que C_n et D_n ont la même loi. Démontrer alors, à l'aide du résultat de la question 14, que :

$$\mathrm{E}(C_n) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

18) Démontrer que pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$,

$$P(C_n \geqslant k) \leqslant \frac{\binom{n}{k}}{k!}.$$

19) Soit n un entier naturel non nul et α un réel strictement supérieur à 1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul k tel que $k-1 < \alpha e\sqrt{n} \leqslant k$. À l'aide du résultat de la question 2, déduire de la question précédente que

$$P(C_n \geqslant \alpha e\sqrt{n}) \leqslant \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2\alpha e\sqrt{n}}.$$

20) En déduire qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tendant vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant \left(1 + n^{-1/4}\right) e + \varepsilon_n.$$

En conclure que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}}$ existe et que $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{\mathrm{E}(C_n)}{\sqrt{n}} \leqslant e$.

FIN DU PROBLÈME